Рег. №:
Класс участия:
Место проведения:
Дата проведения: 22 февраля 2020 г.
Время начала (местное): 11:35

ШК
(заполняется секретарём)

Олимпиада школь
по математике
Название предмета

Заключительный этап 2020 г.

Анкета участника

Данная анкета предъявляется участником вместе с документом, удостоверяющим личность, при входе на олимпиаду. По окончании написания олимпиады анкета обязательно вкладывается в работу. Работа без предоставления анкеты недействительна и не проверяется. Анкета без подписей недействительна.

Фамилия	Имя	Отчество	Дата рождения	Возраст
Жижелев	Андрей	Арсеньевич	10.05.2004г	15

Страна	Регион	Населенный пункт
РФ	Воронежская область	г. Воронеж

Документ, удостоверяющий личность	Серия	Номер	Дата выдачи	Код подразделения
Паспорт РФ	2018	200369	06.06.2018г	360-005

Страна школы	Регион школы	Населенный пункт школы
РФ	Воронежская область	г. Воронеж

Класс обучения	Полное название образовательного учреждения
10	МБОУ гимназия им. академика Н.Г. Басова при ВГУ

Мобильный телефон	Доп. телефон	E-mail
89803457806	—	andrey.zhizhelev@yandex.ru

Согласие на обработку персональных данных

Я согласен(-на) на сбор, хранение, использование, распространение (передачу) и публикацию своих персональных данных, а также олимпиадных работ, в том числе в сети "Интернет". Я согласен(-на), что мои персональные данные будут ограниченно доступны организаторам олимпиады для решения административных и иных рабочих задач. Я проинформирован(а), что под обработкой персональных данных понимаются действия (операции) с персональными данными в рамках выполнения Федерального закона №152 от 27 июля 2006 г., конфиденциальность персональных данных соблюдается в рамках исполнения Операторами законодательства Российской Федерации. Я согласен(-на) на получение информационных писем от организаторов олимпиады на E-mail, указанный при регистрации.

Я подтверждаю, что все указанные мной данные верны и в указанном виде будут использованы при печати дипломов олимпиад в случае их получения. Я согласен(-на) на передачу данных в государственный информационный ресурс о детях, проявивших выдающиеся способности, созданный во исполнение Постановления Правительства Российской Федерации № 1239 от 17 ноября 2015 г.

Я подтверждаю, что ознакомлен с Положением и Регламентом проведения олимпиады школьников «Физтех», а также с правилами оформления и условиями проверки работы.

«22» февраля 2020 г

Анд
Подпись участника олимпиады

ФИО законного представителя	Степень родства	Подпись законного представителя
Жижелева Н.И.	мать	[signature]

Анкета без подписи недействительна.
Анкета обязательно должна быть вложена в работу!

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР 2 0 0 1 4 0 5 6

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1; 2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2; -4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16, \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$4900 = 7\cdot7\cdot10\cdot10 = 2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7$, $\Rightarrow$ чтобы произведение цифр было равно 4900, надо, чтобы либо цифры были равны 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7, 7, либо 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7, 7 (в остальных случаях произведение $\neq 4900$).

1) Цифры — 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7, 7. Всего способов сделать из них цепочку из 8 — 8!, но так как есть 4 пары одинаковых цифр, надо разделить на $(2!)^4$ (2! — количество перестановок 2 одинаковых цифр). Получили

$$\frac{8!}{(2!)^4} = \frac{8!}{16} = \frac{7!}{2} = 2520.$$

2) Цифры — 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7, 7. Аналогично 1) пункту, получаем

$$\frac{8!}{2!\cdot2!\cdot1!\cdot3!} = \frac{8!}{2\cdot2\cdot6} = \frac{7!}{3} = \frac{5040}{3} = 1680$$

Всего — $2520 + 1680 = 4200$

Ответ 4200

№2

Сумма геометрической прогрессии с 1-м членом b_1 и знаменателем k равна $b_1 \cdot \frac{k^n-1}{k-1}$, где n — ~~ко~~ количество членов геометрической прогрессии.

Тогда в нашем случае — $S = b_1 \cdot \frac{k^{3000}-1}{k-1}$, k — знаменатель нашей прогрессии.

Аналогично, сумма всех членов, № которых $\vdots 3$ (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$) — $S_1 = b_3 \cdot \frac{k_1^{1000}-1}{k_1-1}$, k_1 — знаменатель этой прогрессии (нетрудно заметить, что $k_1 = k^3$), b_3 — 1-й член прогрессии ($b_3 = b_1 \cdot k^2$).

$$S_1 = b_1 \cdot k^2 \cdot \frac{k^{3000}-1}{k^3-1}$$

Заметим, что $5S = S + 39 S_1$ (из условия); 39 — так как сумма прогрессии увеличилась НА $39 S_1$, кого сумма членов, чей номер $\vdots 3$, возросла в 40 раз.

Отсюда $4S = 39 S_1$

$$4b_1 \cdot \frac{k^{3000}-1}{k-1} = 39 \cdot b_1 \cdot k^2 \cdot \frac{k^{3000}-1}{(k-1)(k^2+k+1)}$$

Сократив, получаем $4 = 39 \cdot \frac{k^2}{k^2+k+1}$

$4k^2+4k+4 = 39k^2$, $35k^2-4k-4=0$.

$D = 16+4\cdot4\cdot35 = 16+560 = 24^2$, $\Rightarrow k = \frac{4 \pm 24}{70}$. Т.к. все члены прогрессии положительны (из условия), $k>0$, $\Rightarrow k = \frac{28}{70} = 0{,}4$.

Теперь найдём S_2 — Σ всех членов прогрессии, номер которых кратен 2. Аналогично случаю с S_1,

$S_2 = b_1 \cdot k \cdot \frac{k^{3000}-1}{k^2-1}$, и $S + (3-1) \cdot S_1 = x S$, где x — искомая величина

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что $S_2 = S \cdot \frac{k}{k+1}$, тогда $S + S_2 = xS =$

$= \frac{2k+1}{k+1} \cdot S$, $x = \frac{2k+1}{k+1}$ $x = \frac{2 \cdot 3/4 + 1}{3/4 + 1} = \frac{9}{7}$.

Ответ: в $\frac{9}{7}$ раз.

№3

1) $\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (x+10)$

2) $x^2 + 6x - 40 = (x+10)(x-4)$

Тогда уравнение принимает вид:

$\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (x+10) \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 700} = (x+10)(x-4)$.

Если $(x+10) = 0$, то $x = -10$, и подкоренное выражение $= -160 < 0$, $\Rightarrow$ противоречие.

Значит, $(x+10) \neq 0$, и $\Rightarrow$ сократим на $(x+10)$.

Получили:

$\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 700} = (x-4)$, и т.к. корень должен быть ≥ 0, $(x-4) \geq 0$ и $x \geq 4$. Возведём обе части в квадрат:

$x^3 - 64x + 700 = 8(x-4)^2 = 8x^2 - 64x + 8 \cdot 16$

$x^3 - 8x^2 + 700 - 128 = 0$, $x^3 - 8x^2 + 72 = 0$.

Подбором находим корень $x = 6$, делим наш многочлен на $(x-6)$:

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 8x^2 + 0\cdot x + 72 & x-6 \\ \cline{2-2} -\ x^3 - 6x^2 \qquad\qquad & x^2 - 2x - 12 \\ \hline -2x^2 + 0x \qquad & \\ -\ -2x^2 + 12x \qquad & \\ \hline -12x + 72 & \\ -\ -12x + 72 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ищем корни $x^2 - 2x - 12$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4\cdot 12}}{2} = 1 \pm \sqrt{13}$$

При этом $x = 1 - \sqrt{13} < 4$, $\Rightarrow$ он нам не подходит.

При $x = 6$ подкоренное выражение $= 32 > 0$, $\Rightarrow$ $x = 6$ — подходит. Проверяем $x = 1 + \sqrt{13}$.

$x = 1 + \sqrt{13}$, $x > 4$, но $x < 5$;

$f(x) = x^3 - 64x + 200$, её минимум (для $x > 0$) — при

~~$f'(x) = 0$, $f'(x) = 3x^2 - 64 = 0$, $x = \frac{8}{3}\sqrt{3} > 5$,~~

$f(4) = 64 - 64\cdot 4 + 200 = 8 > 0$

$f(5) = 125 - 320 + 200 = 5 > 0$, $\Rightarrow f(1 + \sqrt{13}) > 0$.

Ответ $x = \{6;\ 1 + \sqrt{13}\}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 \cdot |x+2| + 4 \geq 0$.

1) $x+2 \geq 0$, $x \geq -2$.

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$

$f(x) = 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$; решим уравнение $f(x) = 0$.

Заметим, что $x = 2$ и $x = -1$ подходят; последовательно разделив $f(x)$ на $(x-2)$ и на $(x+1)$, получаем

$4x^2 - x - 2 = 0$

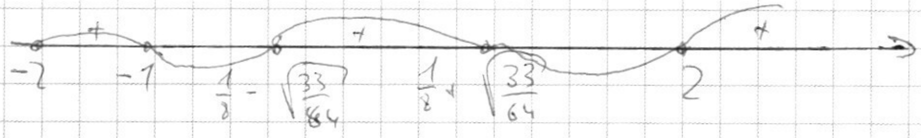
$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2 \cdot 4}}{8} = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{33}{64}}$

Т.к. $\left|\sqrt{\frac{33}{64}}\right| < 1$, то $\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{33}{64}} > -1$, и $\frac{1}{8} + \sqrt{\frac{33}{64}} < 2$.

Получили 4 корня:

$f(x) = (x-2)(x+1)\left(x - \frac{1}{8} + \sqrt{\frac{33}{64}}\right)\left(x - \frac{1}{8} - \sqrt{\frac{33}{64}}\right) \geq 0$.

Решаем методом интервалов:



Т.к. $x \geq -2$, получаем ответ ~~$x \in [-2; -1] \cup [$~~

$x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{33}{64}}; \frac{1}{8} + \sqrt{\frac{33}{64}}\right] \cup [2; +\infty)$.

(2) $x+2 \le 0, \quad x < -2.$

Пусть $\underline{a = -x}$, т.е. $a = |x|$, и $\Rightarrow a \ge 2$.

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(a-2) + 4 \ge 0$

$4a^4 + a^2 - 4a - 5a^3 + 10a^2 + 4 \ge 0$

$(a^2 - 4a + 4) + a^2(4a^2 - 5a + 10) \ge 0$ — ?

$(a-2)^2 + a^2(4a^2 - 5a + 10) \ge 0$

Найдем минимум $g(a) = 4a^2 - 5a + 10$ при $a \ge 2$

$g'(a) = 8a - 5, \quad a = \frac{5}{8}, \quad g\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{4 \cdot 25}{64} - \frac{25}{8} + 10 =$

$= 10 - \frac{25}{16} > 0$, и т.к. минимум ~~всегда~~ > 0, то

$4a^2 - 5a + 10$ всегда > 0, $\Rightarrow$ ответ

$a \in R$, но $a \ge 2 \Rightarrow$ ответ $a \in [2; +\infty)$, $a = -x$,

$\Rightarrow x \in (-\infty; -2]$.

Ответ $x \in (-\infty; -2]$

Суммируя интервалы из (1) и (2), получаем итоговый результат:

Ответ $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{33}{64}}; \frac{1}{8} + \sqrt{\frac{33}{64}}\right] \cup [2; +\infty)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

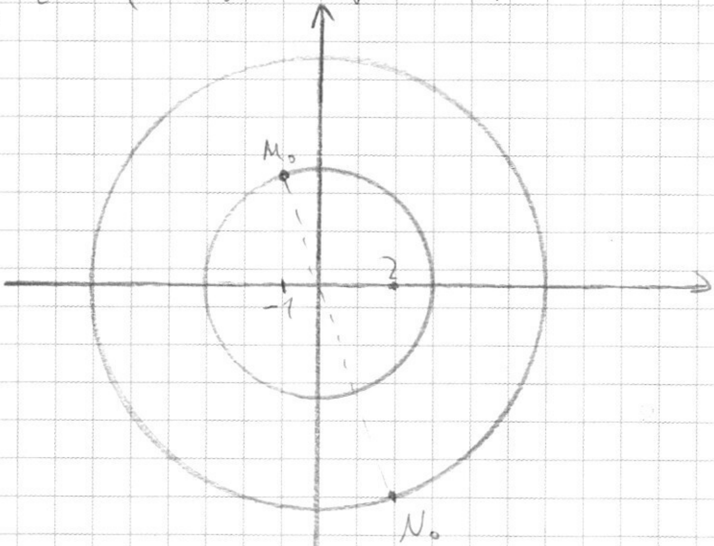
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

По начальным координатам найдём радиусы окружностей, по которым двигались рыбы.

$R_M = \sqrt{(-1)^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{9} = 3$

$R_N = \sqrt{2^2 + (-4\sqrt{2})^2} = \sqrt{36} = 6.$



Несложно заметить, что центр системы координат (точка $0;0$) лежит на прямой $M_0 N_0$.

Так как скорость карася (точки M_0) в 2,5 раза больше скорости пескаря (точки N_0), то т.к. $R_M = \frac{1}{2} R_N$, то $\omega_M = 5\omega_N$ (угловая скорость M_0 в 5 раз больше угловой скорости N_0). Перейдем в С.О. пескаря. Там M_0 движется с угловой скоростью 4ω (ω – угловая скорость N_0), и проходит π за время t, через которое расстояние между ними будет кратчайшее (совпадут радиусы из M_0 и N_0 к центру координат).

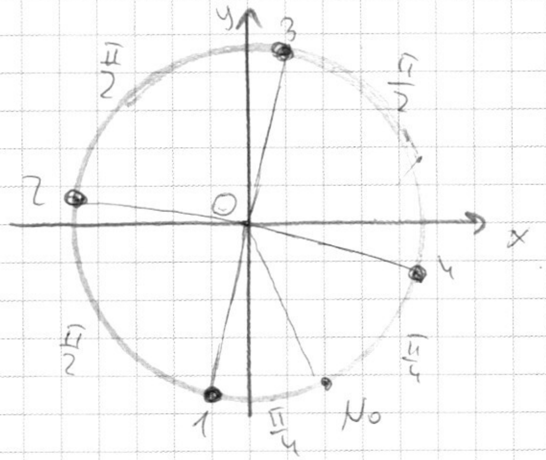
$4\omega \cdot t = \pi$, откуда $t = \frac{\pi}{4\omega}$

За это время пескарь успеет сместиться на $\omega t = \frac{\pi}{4\omega} \cdot \omega = \frac{\pi}{4}$.

Аналогично тому, что выше, следующая такая „встреча" произойдёт через $\frac{2\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{2\omega}$, и за это время пескарь проплывёт $\frac{\pi}{2}$, и т.д.

Получили, что 1-я встреча произошла через $\frac{\pi}{4}$, а затем координата пескаря увеличивалась на $\frac{\pi}{2}$.

В итоге есть 4 искомые точки!



Найдём координаты точек 1 и 2 и, отразив их от O, получим координаты точек 3 и 4.

Зададим их через углы от Ox. Угол между Ox и ON_0 — $\arccos\frac{1}{3}$, точка 1 — $-\arccos\frac{1}{3} - \frac{\pi}{4} = \alpha_1$

точка 2 — $-\arccos\frac{1}{3} - \frac{3\pi}{4} = \alpha_2$

Точка 3 — $-\arccos\frac{1}{3} + \frac{3\pi}{4} = \alpha_3$

точка 4 — $-\arccos\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} = \alpha_4$

Их координаты по осям x и y — радиус окружности, умноженный на эти углы ($R_A = 6$).

точка 1 — ~~$(6 \cdot \cos(-\arccos\frac{1}{3} - \frac{\pi}{4});\ 6 \cdot \sin$~~ $(6 \cdot \cos\alpha_1;\ 6 \cdot \sin\alpha_1)$

Точка 2 — $(6 \cdot \cos\alpha_2;\ 6 \cdot \sin\alpha_2)$;

Точка 3 — $(6 \cdot \cos\alpha_3;\ 6 \cdot \sin\alpha_3)$; точка 4 — $(6 \cdot \cos\alpha_4;\ 6 \cdot \sin\alpha_4)$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 8

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

1) Построим график $|y+x+8| + |y-x+8| = 16$.

Заметим, что $y \le 8$ и $x \le 8$ (иначе левый модуль ≥ 16, и т.к. правый ≥ 0, получаем противоречие).

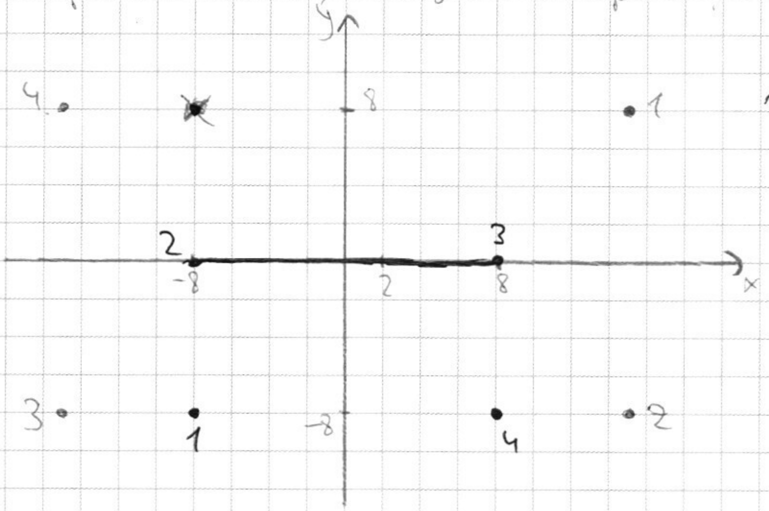


График II-го, нижнего уравнения системы — это 4 окружности с центрами $(15; 8)$, $(15; -8)$, $(-15; 8)$, и $(-15; -8)$ с радиусом $\sqrt{a}$ (их центры на рисунке выше отмечены синими точками и пронумерованы синим)

$r = \sqrt{a}$; будем называть окружность с центром в i-й точке ω_i

1) $r = 7$ — когда ω_3 и ω_2 касаются графика в точках 1 и 4

2) $r = \sqrt{7^2 + 8^2} = \sqrt{113}$ — когда все ω_i касаются графика в точках 2 и 3.

3) $r \in [\sqrt{113}; \sqrt{15^2+8^2}]$ — касание в 2 точках.

При $r = \sqrt{15^2+8^2} = 17$ — все попадают в точку $(0;0)$, и решение только одно.

4) $r \in (14; \sqrt{23^2+8^2}]$ — пока ω_3 и ω_4 не коснутся 3, а ω_1 и ω_2 — 2 точки графика, будет 2 решение

$r \in (14; \sqrt{529+64}]$, $r \in (14; \sqrt{593})$, =>

5) Когда ω_{3} коснется 4, а ω_1 — 1 точки графика (там $r = \sqrt{23^2+16^2} = \sqrt{785}$.

Получили, что

$$\left[\begin{array}{l} r = 7 \\ r \in [\sqrt{113}; 14) \\ r \in (14; \sqrt{593}] \\ r = \sqrt{785} \end{array}\right. , \quad a = r^2, \Rightarrow a = \left[\begin{array}{l} 49 \\ [113; 289) \\ (289; 593] \\ 785 \end{array}\right.$$

Ответ: $a \in \{49\} \cup [113; 289) \cup (289; 593] \cup \{785\}$, не

$$a = \left[\begin{array}{l} a = 49 \\ a \in [113; 289) \\ a \in (289; 593] \\ a = 785. \end{array}\right.$$

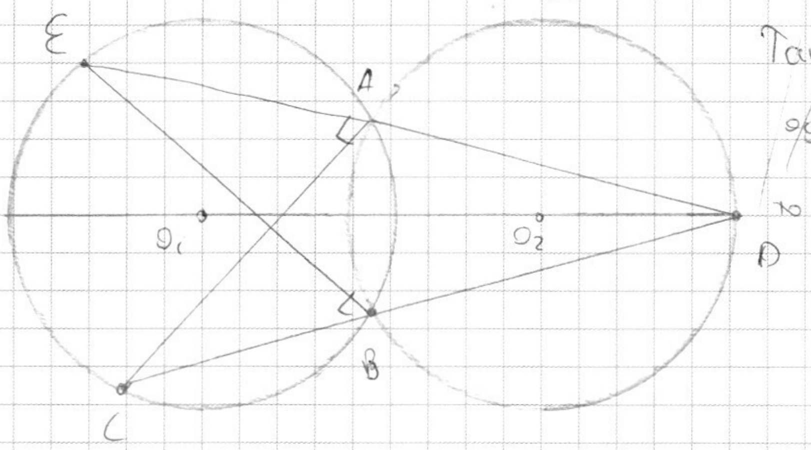
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



а) Пусть E — пересечение окружности ABC и перпендикуляра ~~к~~ через B на CD. Заметим, что $\angle CBE$ ~~$= \angle CAE$~~ $= 90°$, т.е. CE — диаметр, $\Rightarrow$ $\angle CAE = 90°$, и $\Rightarrow$ $E \in AD$.

Т.к. окружности одинаковые, то вся картинка симметрична относительно прямой O_1O_2 (соединяющей центры окружностей).

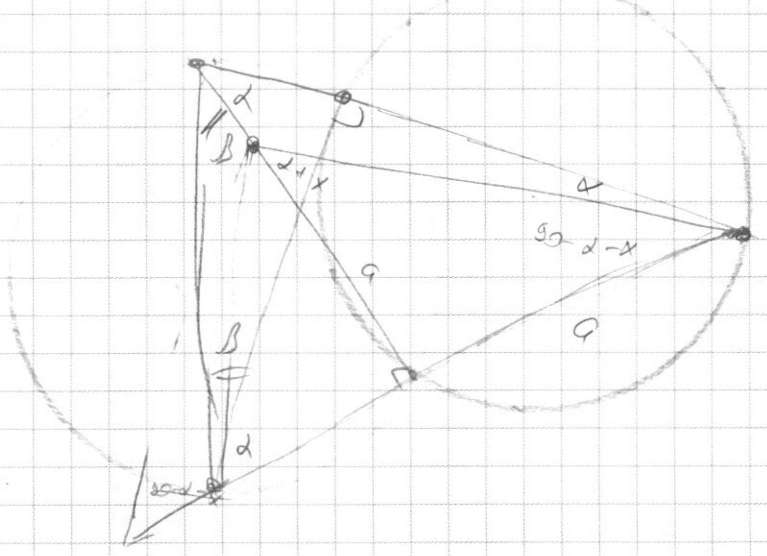
Отсюда E — как раз и есть точка F (из симметрии), и тогда $CF = CE$; CE — диаметр $\Rightarrow$ $CF = CE = 26$.

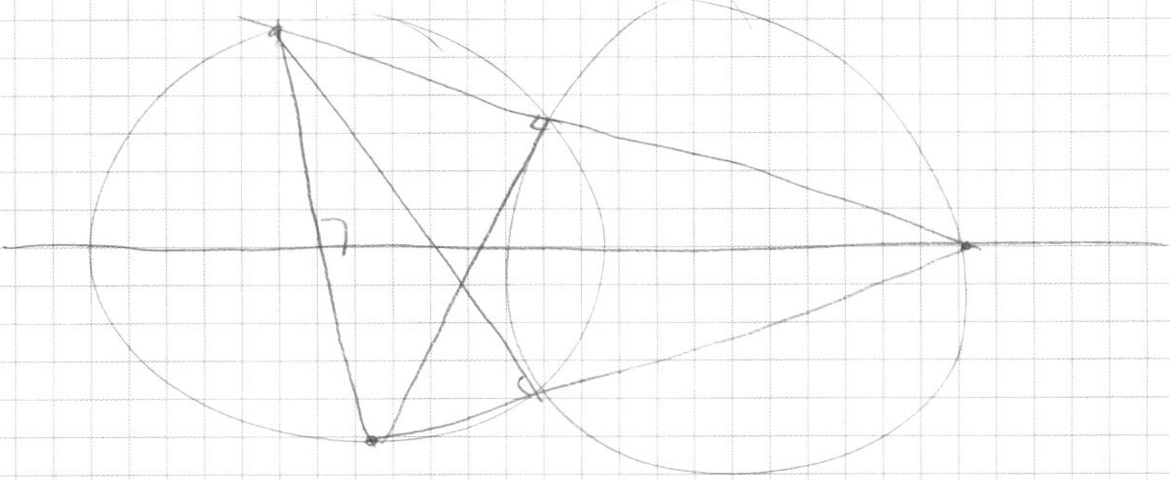
б) ~~Так как~~ S_{ACF} — ?

$BE = AC = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$, $\Rightarrow$ $S_{ACF} = 24 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 120$

<u>Ответ</u> а) 26; б) 120.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)


α
β
α+x
x
90-α-x
a
a
β
α



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left(\frac{x}{2\sqrt{21}} + \frac{5\sqrt{21}}{2}\right) = \frac{x\sqrt{21}}{2\cdot 2} + \frac{5\cdot\sqrt{21}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{2}\left(\frac{x+10}{2}\right) = \frac{\sqrt{21}}{4}(x+10)$

$\frac{\sqrt{21}}{4}(x+10)\sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x+40$

$\cancel{x^2+6x+40}$ $x^2+6x-40$

$\cancel{D = 36-}$ $D = 36+4\cdot 40 = 36+160 = 196 = 14^2$

$\cancel{x=5 \quad 125-320+200=5}$ $x = \frac{-6\pm 14}{2}$, $x=4$, $x=-10$

$(x+10)(x-4)=0.$

$x(x^2-64)+200$

$\cancel{216-64\cdot 6}$

$(x+10)\sqrt{2x^3-128x+400} = 4x^2+24x+40$

$446-64\cdot 6$ 360

$200-128$ 72

$\frac{\sqrt{21}}{4}(x+10)\sqrt{\quad} = (x+10)(x-4)$

$4\times 6 \quad 384$

1) $x=-10$, тогда под корнем <0 — противоречие!

Сократим на $(x+10)$.

$116-84$

$3x^2-64$, $x^2 = \frac{64}{3}$, $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$36-4$ $\frac{\sqrt{21}}{4}\sqrt{\quad} = x-4$

$2x^3-128x+400 = (4x-16)^2 = 16x^2-128x+16^2$ $\frac{64}{3}$

$2x^3-16x^2+400-256=0$

$x^3-8x^2+72=0.$

$\cancel{216}$ $x=6$ — подходит ($\cancel{x^3}$ $\cancel{216}$ $6^3-8\cdot 6\cdot 6 = -2\cdot 6\cdot 6 = -72+72=0$)

$$\begin{array}{l|l} x^3-8x^2+0x+72 & x-6 \\ \underline{x^3-6x^2} & \overline{x^2-2x-12} \\ \quad -2x^2+0x & \\ \quad \underline{-2x^2+12x} & \\ \qquad -12x+72 & \\ \qquad \underline{-12x+72} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$x = \frac{2\pm\sqrt{52}}{2} = 1\pm\sqrt{13}$

6;

$\cancel{x=}$ $D = 4+12\cdot 4 = 52$

№2 $k^x + k^{x-1} + \ldots + 1 = \frac{k^{x+1}-1}{k-1}$

Σ геом. прогрессии — $\frac{k^{3000}-1}{k-1} \cdot b_1 = 5$

Σ каждого III-го — $\frac{k_3^{1000}-1}{k_3-1} \cdot b_3 = 45$

$k_3 = k^3$, $b_3 = b_1 \cdot k^2$

$39 \cdot \left(\frac{k^{3000}-1}{k^3-1} \cdot b_1 \cdot k\right) = 45$

$4 = k^2 \cdot \frac{(k-1)}{k^3-1} \cdot 39$ $k \neq 1$

$\frac{4}{39} = \frac{k^2}{k^2+k+1}$

$4k^2+4k+4 = 39k^2$

$35k^2 - 4k - 4 = 0$

$D = 16 + 4 \cdot 4 \cdot 35 = 16 \cdot 36 = (6 \cdot 4)^2 = 24^2$

$k = \frac{4 + 24}{70}$, $k > 0 \Rightarrow k = 0{,}4$

$2\cancel{39}\left(\frac{k^{3000}-1}{k^2-1} \cdot b_1 \cdot k\right) = x5$

$x = k \cdot \frac{k-1}{k^2-1} \cdot \cancel{39}\,2$

$x = 0{,}4 \cdot \frac{1}{1{,}4} \cdot 2 = \frac{4 \cdot 2}{14} = \frac{8}{14}$

$x = \frac{4}{7}$ $= \cancel{1\frac{1}{7}\text{ раза}}$. $\frac{4}{7}$ раза, т.е. в $\frac{11}{7}$ раза

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$

1) $x \geq -2;$

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$

$\cancel{(x+2)^2 - 5x^2(x+2) = (x+2)(x+2-5x^2)}$

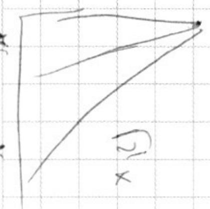
$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$

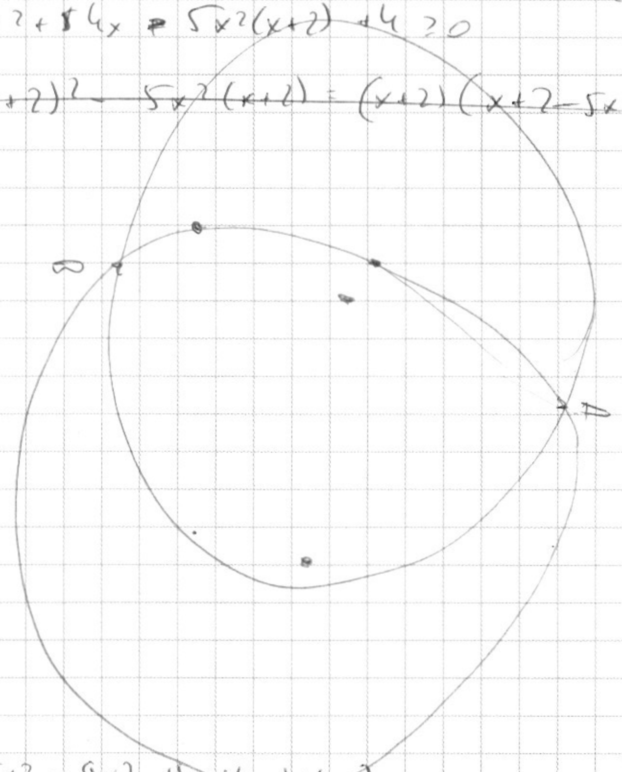
$4x^4 \cancel{+ x^2} - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4$

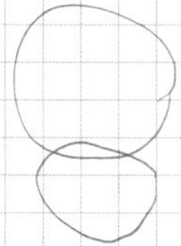
$\underbrace{4 \cdot 16}_{64} - \underbrace{5 \cdot 8}_{40} - \underbrace{9 \cdot 4}_{36} + \underbrace{4 \cdot 2 + 4}_{12}$

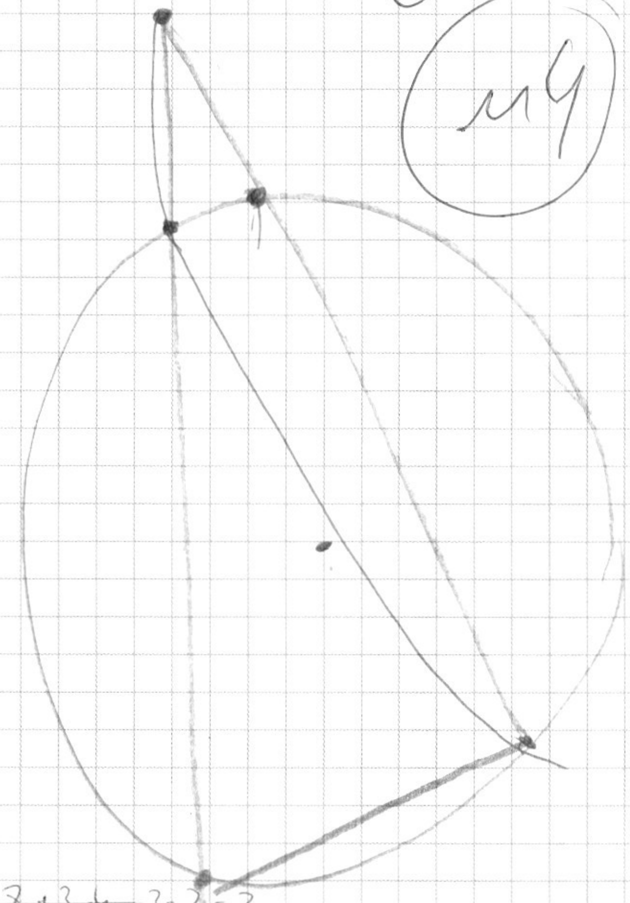
№6

M4









$\sqrt{2}x$

$x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$\operatorname{tg} x = 2\sqrt{2}$

$$
\begin{array}{l|l}
4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 & x-2 \\
\underline{-\,4x^4 - 8x^3} & 4x^3 + 3x^2 - 3x - 2 \\
\quad 3x^3 - 9x^2 & \\
\underline{-\,3x^3 - 6x^2} & \\
\quad -3x^2 + 4x & \\
\underline{-\,-3x^2 + 6x} & \\
\quad -2x + 4 & \\
\underline{-\,-2x + 4} & \\
\quad 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3 + 3x^2 - 3x - 2 & x+1 \\
\underline{-\,4x^3 + 4x^2} & 4x^2 - x - 2 \\
\quad -x^2 - 3x & \\
\underline{-\,-x^2 - x} & \\
\quad -2x - 2 & \\
\underline{-\,-2x - 2} & \\
\quad 0 &
\end{array}
$$

$\cancel{4 \cdot 8 + 3 \cdot 4 - 3 \cdot 2 - 2}$

$-4 \cdot 8 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 2$

$\cancel{-32 + 12 + 6 - 2}$

$|-3+2| = -(-3+2)$

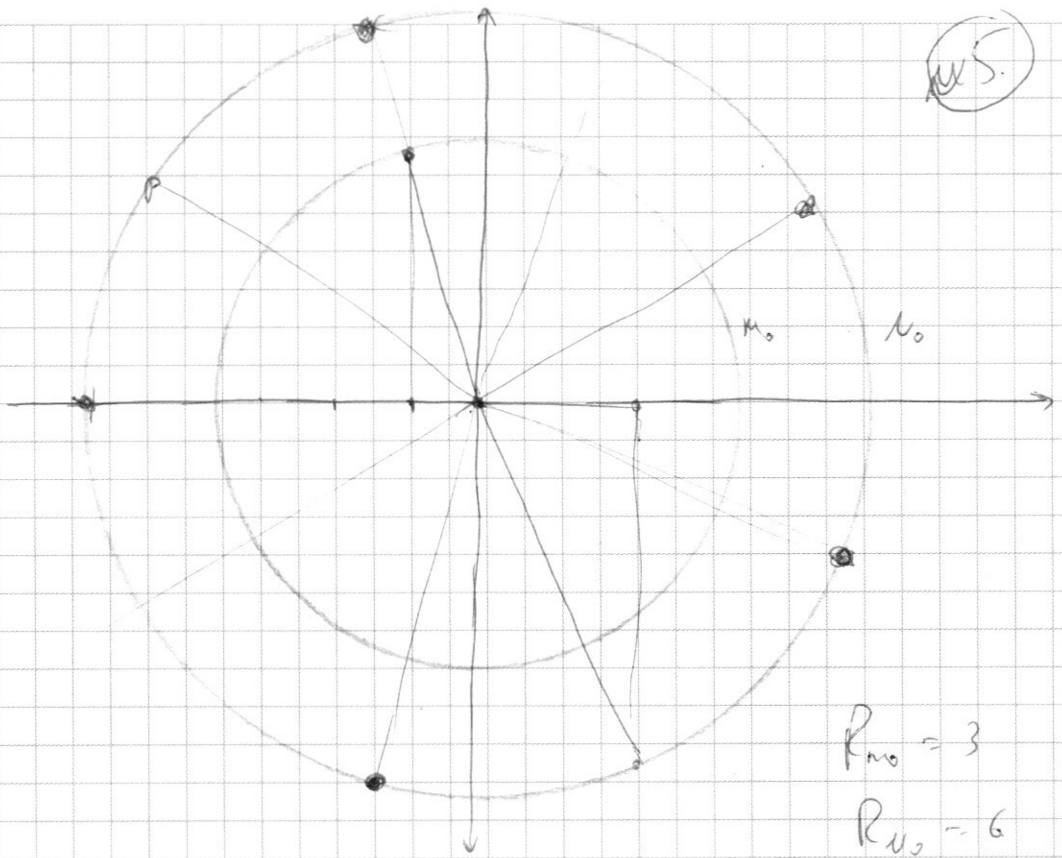
$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 4 = 33$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$

Корни: $-1;\ \frac{1}{8} - \sqrt{\frac{33}{64}},\ \frac{1}{8} + \sqrt{\frac{33}{64}},\ 2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

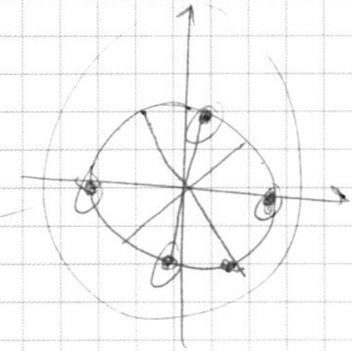


$R_{m_0} = 3$

$R_{N_0} = 6$

$R_{m_0} = \sqrt{1+8} = 3$

$R_{N_0} = 6$



До 1 встречи

$\pi + \omega t = 5\omega t$, $4\omega t = \pi$ — 1 встреча, $t = \frac{\pi}{4\omega}$

Затем — $2\pi + \omega t_1 = 5\omega t_1$, $\omega t_1 = 2\pi = 4\omega t_1$, $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$

$(1+\sqrt{13})^3 - 64 - 64\sqrt{13} + 200$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $x < -2$, $a = -x$ (т.е. $a > 2$)

№4

$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$

$4x^4 + 5x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$

$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$

~~$4x^4 + x^2 + 4x + 4$~~

~~$4 \cdot 5 - 5 \cdot 4^3 + 11 \cdot 4^2 - 16 + 4$~~

$4x^4 + 5x^2(x+2) + (x+2)^2$

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(a-2) + 4$

$4a^4 + a^2 - 4a - 5a^2(a-2) + 4 > 0$

$(a-2)^2 + 4a^4 - 5a^2(a-2)$

$(a-2)^2 + a^2(4a^2 - 5a + 10)$

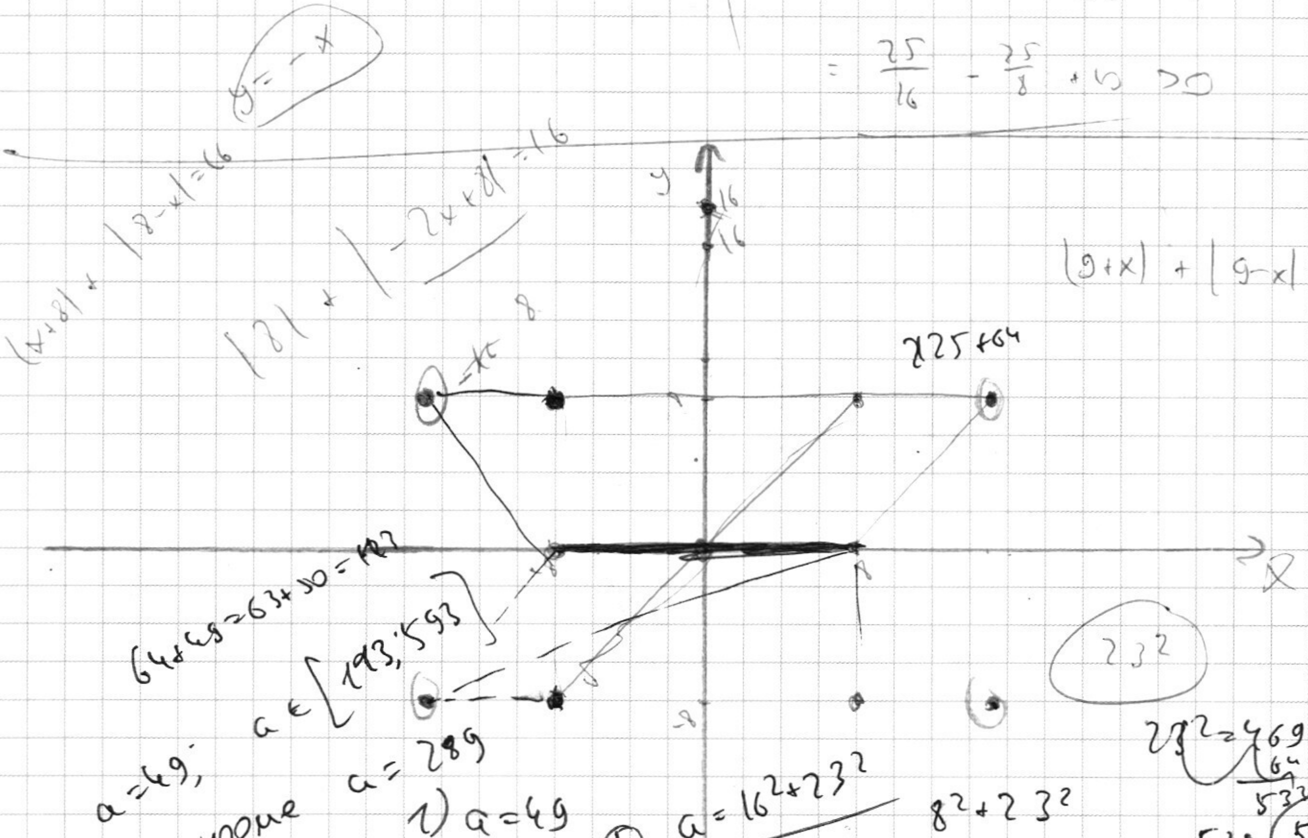
$D < 0$, ветви вверх, ее минимум —

$(4a^2 - 5a + 10)' =$

$= 8a - 5$, $a = \frac{5}{8}$,

$f(\frac{5}{8}) = 4 \cdot \frac{25}{64} - \frac{25}{8} + 10 =$

$= \frac{25}{16} - \frac{25}{8} + 10 > 0$



$|y+x| + |y-x| = 16$

$64 + 49 = 63 + 50 = 113$

$a = 49$; $a \in [113; 593]$

кроме $a = 289$

1) $a = 49$

2) $a = 16^2 + 23^2$

$8^2 + 23^2$

23^2

$23^2 = 469$

$\begin{array}{r} 529 \\ + 64 \\ \hline 593 \end{array}$

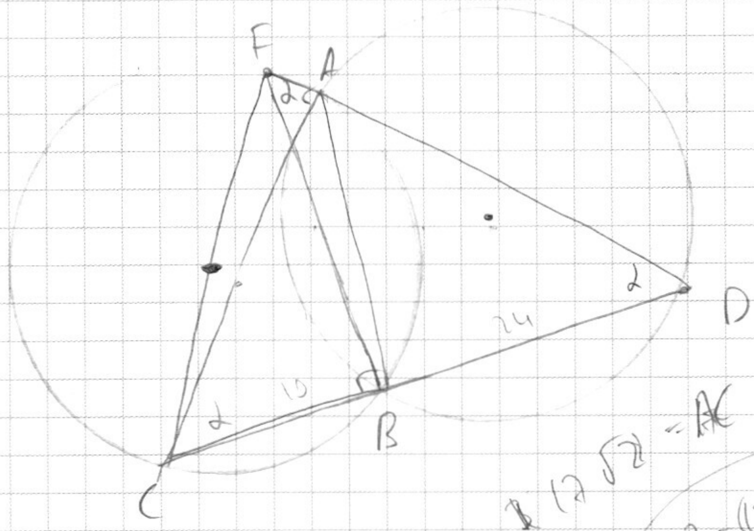
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{26^2-10^2}$

$169-25$

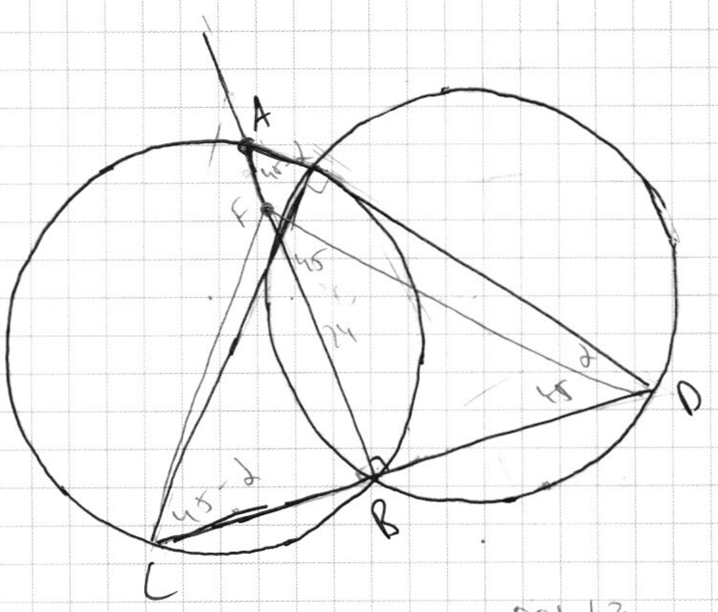
24



$17\sqrt{2} = AC$

$\sqrt{26^2-(17\sqrt{2})^2}$

34



504 | 3

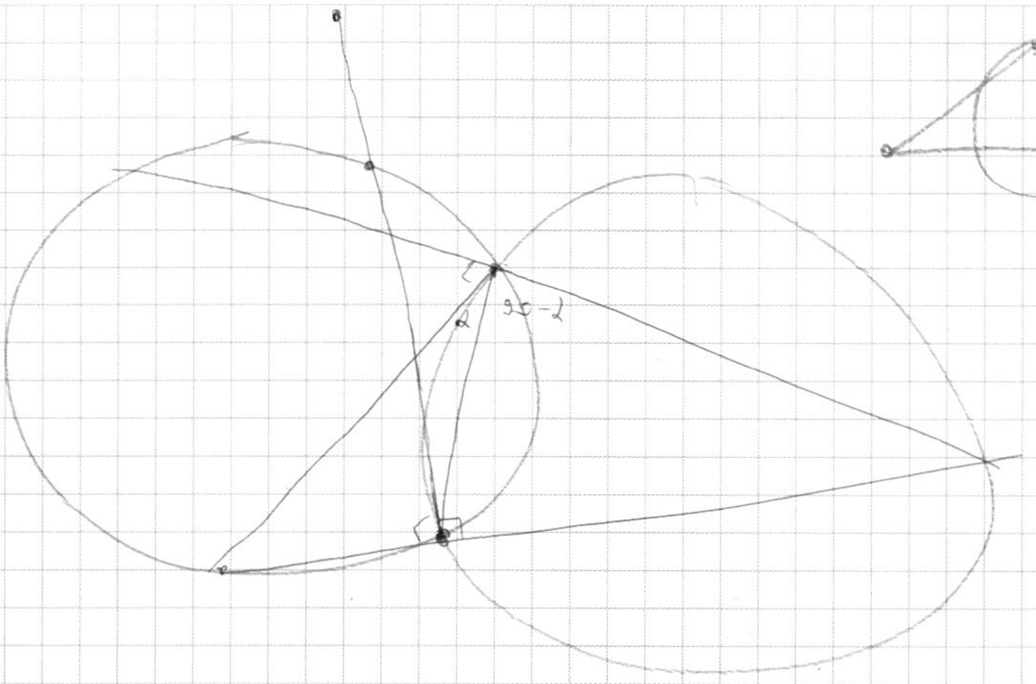
168 | 3

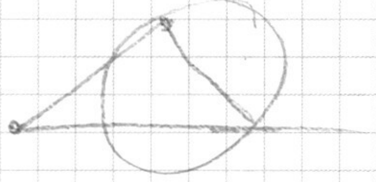
4

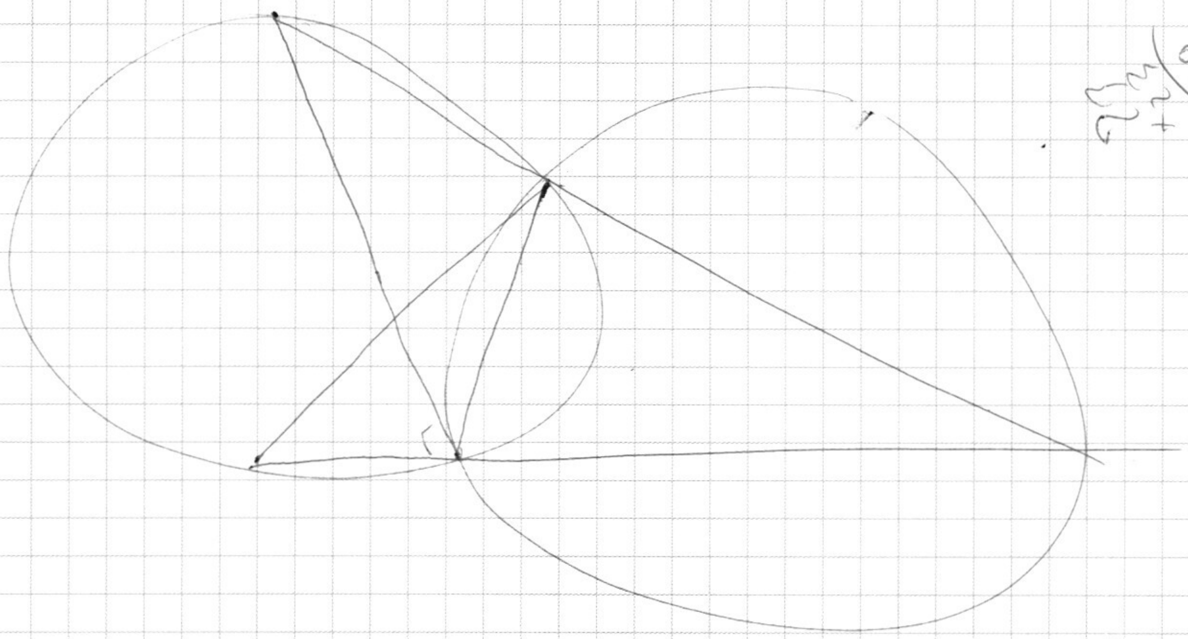
$$\begin{array}{r} 168 \\ +252 \\ \hline 420 \end{array}$$

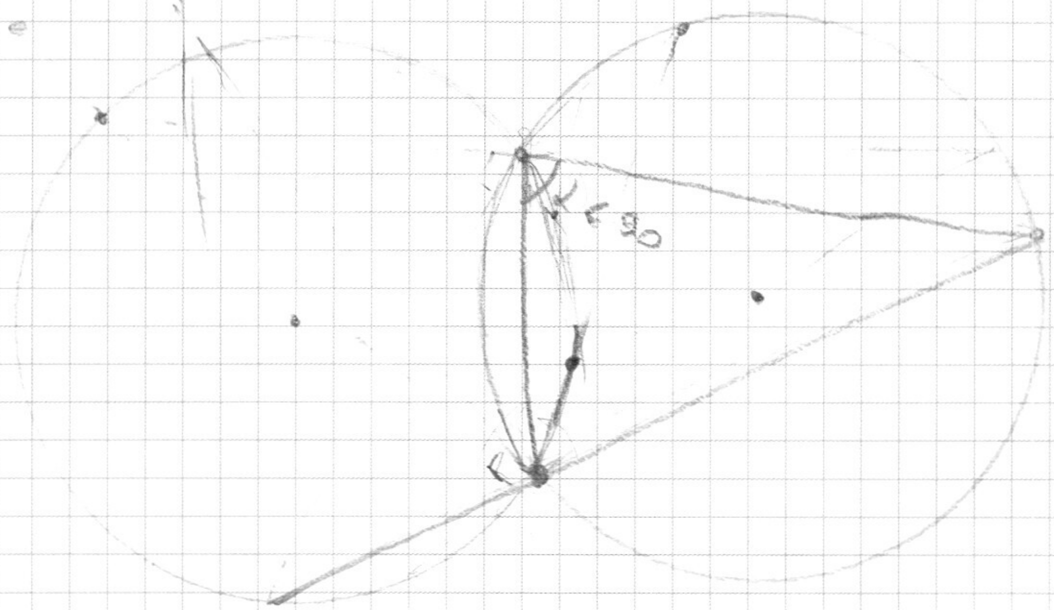
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)









ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4900 = 7\cdot7\cdot10\cdot10 = 7\cdot7\cdot2\cdot5\cdot2\cdot5\cdot1\cdot1 = 1\cdot1\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7$

№1

$\frac{8!}{(2!)^4} = \frac{8!}{16} = \frac{7!}{2} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2} = \underline{2520}$

~~501~~

$b_1,\ b_1k,\ b_1k^2,\ \_\_\_,\ b_1k^{2999}$

$\frac{(k^{n-1} \_ +1)\cdot b_1}{\cancel{k+1}} = \frac{k^n-1}{k-1}\ \ \frac{k^n-1}{k-1}\cdot b_1$

$\frac{k^n-1}{k-1}\ b_1 = S$

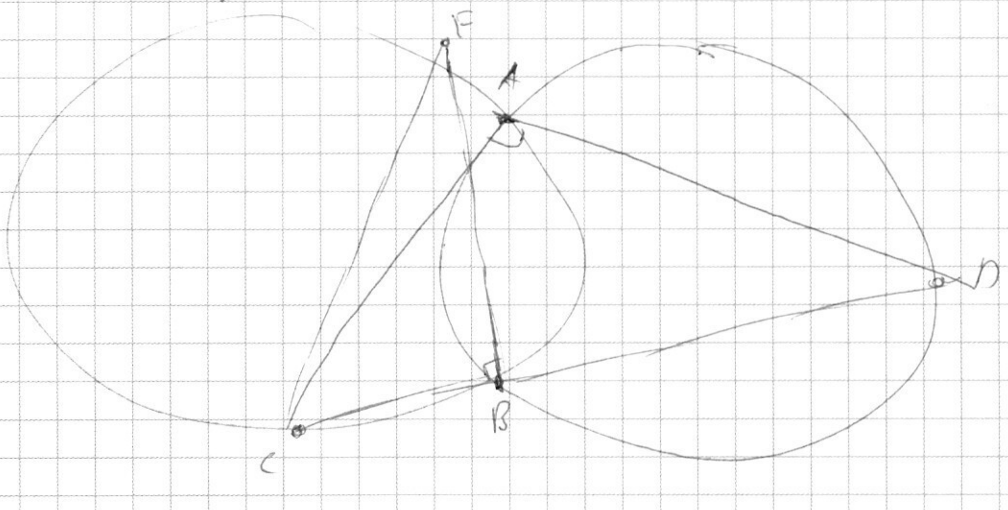
$45 = 39(b_3+b_6+ \_ + b_{3000})$

$b_6 = b_3\cdot x,\quad x=k^3$

$\frac{k^{3\cdot1000}-1}{k^3-1}\cdot b_1 k^2 \cdot 39 = 45$

$\frac{k^{3000}-1}{k^2-1}\cdot b_1\cdot k\cdot 39 = y\,S,\quad y-?$

$\frac{k^{3000}-1}{k-1}\cdot b_1 = S$



черновик ☑ чистовик ☐ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)