

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$N_I$$

$$4900 = 7^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2$$

Следовательно, чтобы число было возмущающее необходимо, чтобы в его разложении были единицы.

Числа могут состоять из 2-ух наборов цифр:

1-ый набор: 1, 2, 7, 57 при этом можно составить цепочку из пятидесяти таких 2 раз.

2-ой набор: 1, 4, 7, 5 цифрами 7 4 5 по 2 раз, 1-раз и 4-раз

7-е. Число чисел в сумме

$$K = \frac{P_1}{2!2!2!2!} + \frac{P_2}{2!2!3!} = \frac{8!}{2!2!2!2!} + \frac{8!}{2!2!3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{16} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4} =$$

$$= 2520 + 1680 = 4200$$

Orubem: 4200

$$N_2$$

$$S = b_1 + b_1 q + \dots + b_1 q^{2999} = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} \quad |q \neq 1$$

$$J_2 = b_1 + b_1 g + 40 b_1 g^2 + \dots + b_1 g^{2938} + 40 b_1 g^{2999}$$

$$S_2 - S_1 = 1 \cdot 3 \cdot 9 (q^2 + q^5 + q^8 \dots + q^{2999}) = 3 \cdot 9 \cdot 1 \cdot \frac{q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

T.k. no yavbary $S_2 = 5 S_1$, $\forall S_2 - S = 4S$

$$4 \int_1 = \frac{3961 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} \Rightarrow \frac{4 q^2 (q^{3000} - 1)}{q - 1} = 3961 q \frac{(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T \cdot x \neq 1$$

$$\frac{4}{q-1} = \frac{39q^2}{q^3-1} \quad ; \quad \frac{4}{q-1} = \frac{39q^2}{(q-1)(q^2+q+1)}$$

$$4q^2 + 4q + 4 - 39q^2 = 0$$

$$-35q^2 + 4q + 4 = 0$$

$$35q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$D_1 = 4 + 140 = 144$$

$$q_1 = \frac{2+12}{35} = \frac{14}{35}$$

$$q_2 = \frac{2-12}{35} < 0 \text{ — не подходит}$$

Требуется сумма

$$\begin{aligned} S_3 &= b_1 + 3b_1q + b_1q^2 + 3b_1q^3 + \dots + 3b_1q^{2999} = (b_1 + b_1q^2 + \dots + b_1q^{2998}) + 3(b_1q + b_1q^3 + \dots + b_1q^{2999}) \\ &= \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} + \frac{3b_1q(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{b_1q^{3000} - b_1 + 3b_1q^{3001} - 3b_1q}{q^2 - 1} = \frac{b_1q^{3000}(1+3q) - (b_1 + 3b_1q)}{q^2 - 1} \\ &= \frac{b_1(q^{3000} - 1)(1+3q)}{q^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{1+3q(q-1)}{q^2-1} = \frac{1+3q}{q+1} = \frac{1 + \frac{14 \cdot 3}{35}}{\frac{14}{35} + 1} = \frac{47}{49} = \frac{11}{7}$$

Ответ: сумма увеличится в $\frac{11}{7}$ раз.

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\frac{x\sqrt{2} + 10\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^3 - 64x + 200} - (x+10)(x-4) = 0$$

$$(x+10) \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^3 - 64x + 200} - x + 4 \right) = 0$$

$$\sqrt{2x^3 - 128x + 400} = 4(x-4); \quad x \geq 4$$

$$x = -10;$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x \geq 4;$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8(x^2 - 8x + 16)$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

Подбираем $x=6$ (по теореме Безу)
(свернули)

$$216 - 36 \cdot 8 + 72 = 0$$

Схема Горнера

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -8 & 0 & 72 \\ 6 & 1 & -2 & -12 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$D_1 = 1 + 12 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{1} = 1 \pm \sqrt{13}$$

Т.к. $x \geq 4$, то подходит только $1 + \sqrt{13}$, т.к. $\sqrt{13} > 3$

Ответ: $6, 1 + \sqrt{13}, -10$

№4

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 / (x+2) + 4 \geq 0$$

1) $x \leq -2$, тогда

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0 / \cdot 2$$

$$8x^4 + 10x^3 + 20x^2 + 2(x+2)^2 \geq 0$$

$$5x^4 + 10x^3 + x^2 + 3x^4 + 19x^2 + 2(x+2)^2 \geq 0$$

$$(\sqrt{5}x^2 + x)^2 + 3x^4 + 19x^2 + 2(x+2)^2 \geq 0 \text{ - верно, т.к. каждый член } \geq 0$$

Тогда $x \leq -2$

2) $x > 2$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

Подбираем корни по схеме из
хвостов Безу
 $x = -1; x = 2$

Схема Горнера:

$$\begin{array}{r|rr|rr|r} 4 & -9 & -9 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & -9 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -2 & 0 & \end{array}$$

$$4x^2 - x - 2 = 0$$

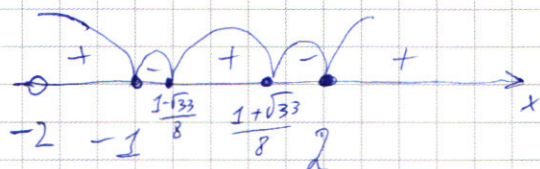
$$D = 1 + 32 = 33$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$-2 < \frac{1 - \sqrt{33}}{8} \quad \text{т.к.} \quad 2 < \frac{1 - 6}{8} < \frac{1 - \sqrt{33}}{8}$$

$$4\left(x - \frac{1 - \sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right)(x - 2) \geq 0$$

Метод интервалов:

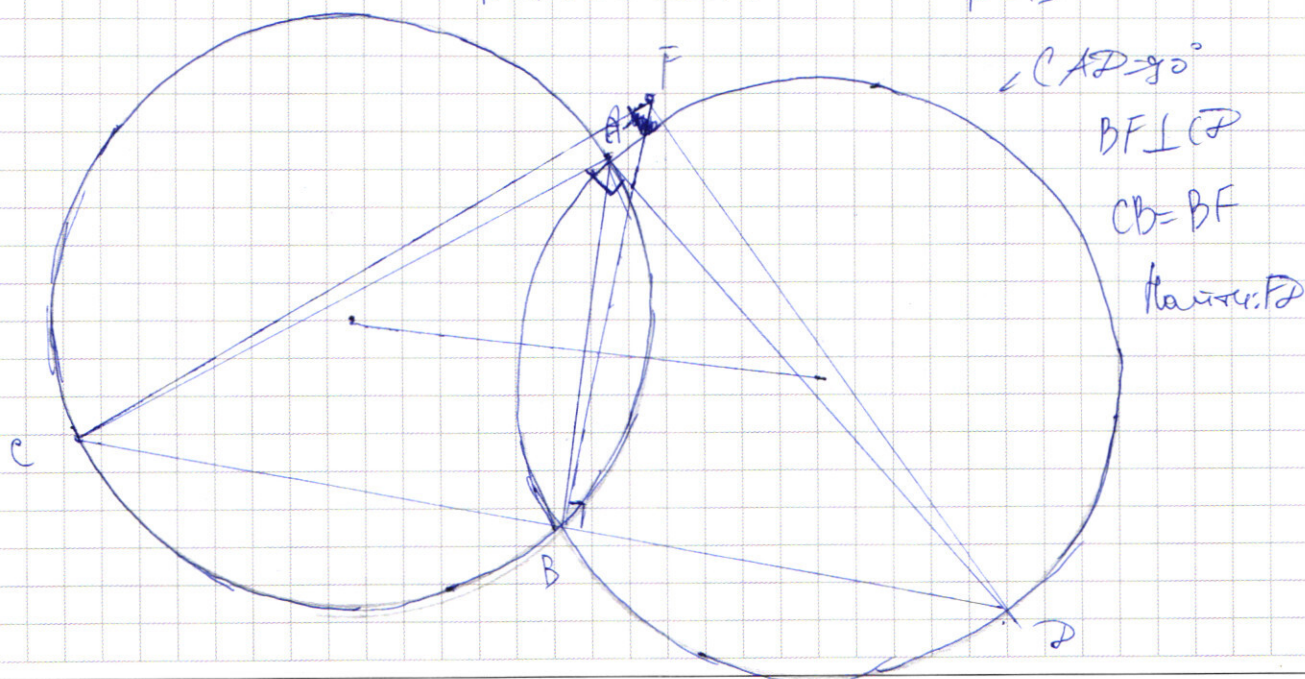


$$x \in (-2; -1] \cup \left[\frac{1 - \sqrt{33}}{8}; \frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$$

Объединяя с пунктом 1:

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1 - \sqrt{33}}{8}; \frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$$

Примечание: в точку обозначается /6
точка 2 и с полукругом включены, $R = 13$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а) Т.к. окружности одинаковые, дуги $\widehat{AB}$ первой окружности равны дуге $\widehat{AB}$ второй окружности, т.к. у них общие хорды.

Тогда $\angle ACB = \angle BDA = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ \Rightarrow \angle CAB = 45^\circ$ и $\angle DAB = 45^\circ$

$\angle CFB = \angle BCF = \angle CFB = 45^\circ$

$\angle CAB = 45^\circ$

$\angle CFB = 45^\circ$

$\angle BCF = 45^\circ$

$\angle BCA = 45^\circ$

но это возможно, только если точки A и F совпадают $\Rightarrow A \equiv F$

Но тогда $\angle BCF$ — вписанный угол и $\angle BCF$ (по условию) равен 90°

Следовательно FD — диаметр окружности. $FD = 2R = 26$

б) Так A и F совпадают, то $S = 0$.

Ответ: а) 26; б) 0

✓

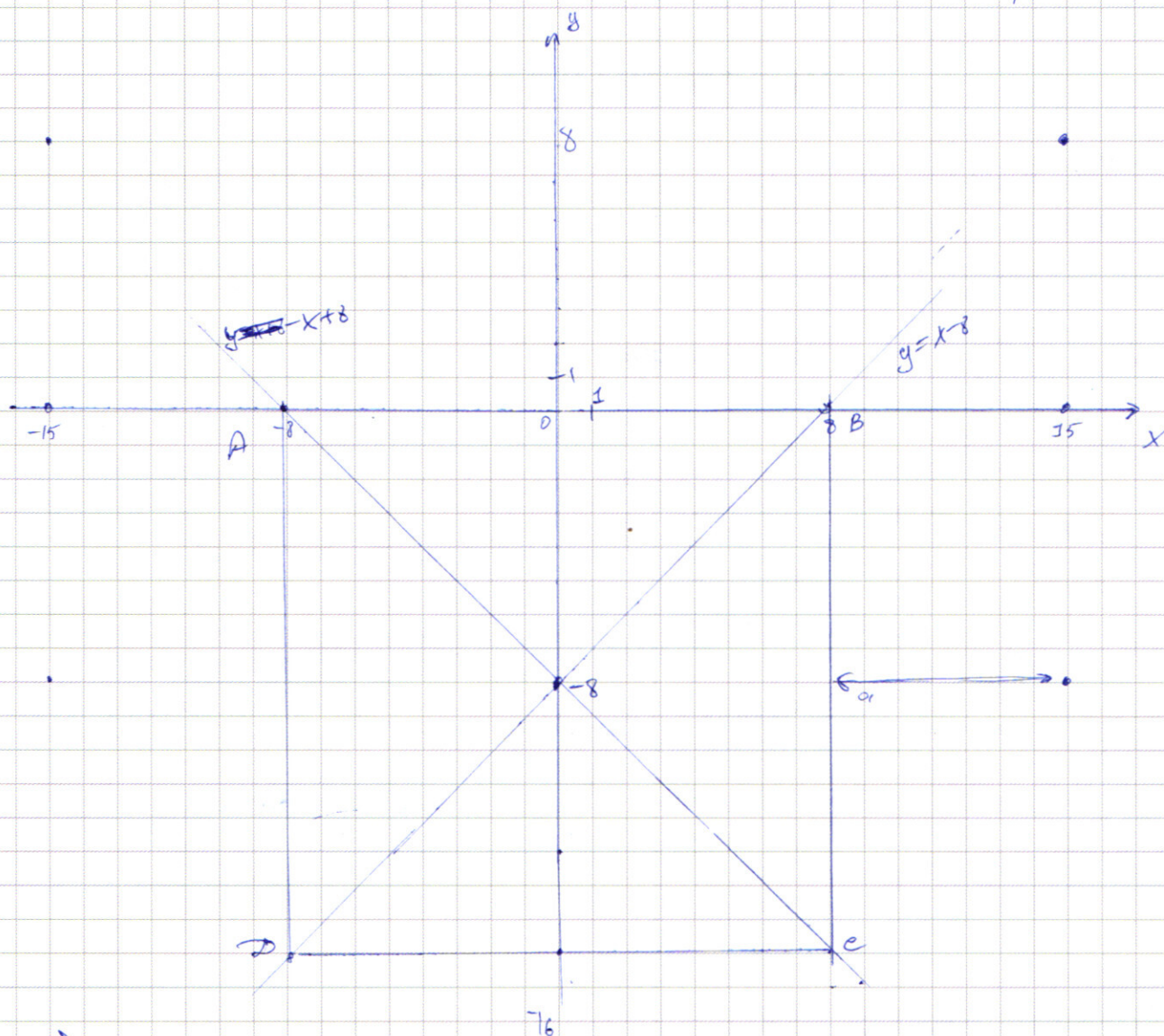
$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (x-15)^2 + (y-8)^2 = 9 \end{cases}$$

$|y+x+8| + |y-x+8| = 16$ — геометрическое место точек от которых расстояние по оси OX до прямой $y = -x-8$ и $y = x-8$ в сумме даёт 16.

$(x-15)^2 + (y-8)^2 = 9$ — 4 окружности радиуса 3 с центрами в точках $(15; 8); (15; -8); (-15; 8); (-15; -8)$

Построим это в одной системе координат:

Квадрат $ABCD$ - и его симметричные относительно оси y точки, график расчерчен по оси x к графикам $y = -x + 8$ и $y = x + 8$ рис. 16



Заметим, что график симметричен относительно оси y .
 Если было 2 касания необходимо, чтобы только с
 а) 1 стороны было касание, тогда по симметрии ось будет и
 с другой (кроме случая когда касание на оси oy).

а) тут возможен либо случай касаний ординатной стороны,
 либо прохождение окружности через вершину

1 случай: от окр. $(x-15)^2 + (y+8)^2 = a$ $\sqrt{a} = 7 \Rightarrow a = 49$

2 случай от окр. $(x-15)^2 + (y-8)^2 = a$ $a = 24^2 + 23^2 = 1105$

Квадрат во 2-ой окружности будет находиться полностью
 внутри
 будет больше пересечений
 т.е. окр. $(x-15)^2 + (y-8)^2 = a$ касается квадрата 4 раз. Ответ: $a = 1105$; $a = 49$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\frac{x\sqrt{2}}{4} + \frac{10\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4)$$

$$\frac{\sqrt{2}(x+10)}{4} \sqrt{x^3 - 64x + 200} - (x-4)(x+10) = 0$$

$$(x+10) \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^3 - 64x + 200} - (x-4) \right) = 0$$

$$x = -10: \sqrt{(x^3 - 64x + 200) \cdot 2} = 4x - 16$$

~~XXXX~~

$$x \geq 4$$

$$(x^3 - 64x + 200) \cdot 2 = 16(x^2 - 8x + 16)$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$64 - 8 \cdot 16 + 72 = 136$$

$$125 - 8 \cdot 25 + 72 = 216 - 368 + 72$$

$$288 - 288 = 0$$

$$1 - 8 \cdot 0 + 72$$

$$6 \cdot 1 - 2 - 12 = 0$$

$$x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$1 + 12 = 13$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$



$$4x^4 + x^2 + 4x - 5 +$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2/x + 2/x + 4 \geq 0$$

$$x \geq 2$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4 - 5 \cdot 8 + 4 + 41 \quad \frac{4}{4} = 1$$

$$4 + 5 - 3 - 4 + 4$$

$$64 - 40 - 36 + 8 + 4$$

$$2 \quad -16$$

$$64 - 40 - 36 - 8 + 4$$

$$4 - 5 - 9 + 4 + 4$$

$$-1 \quad 4 \quad -9 \quad 0 \quad 4 \quad 0$$

$$4x^3 - 9x^2 + 4 = 0$$

$$2 \quad 4 - 9 \quad 0 \quad 4$$

$$4 - 1 - 2 = 0$$

$$4x^2 - x - 2 = 0$$

$$1 + 32 = 33$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4 - 5 + 11 - 4 + 4$$

$$+64 - 40 + 44 - 8 + 4$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 4 \overline{) 112} \\ \underline{112} \\ 0 \end{array}$$

$$1024 - 320 + 176 - 64 + 4 = 0$$

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4$$

$$\pm 2, \pm 4$$

$$\pm \frac{1}{2}$$

$$\pm \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$$

$$4 \cdot 16 - 5 \cdot 8 + 44 - 8 + 4$$

$$4 \cdot 256 - 320 + 176 - 64 + 4 = 0$$

$$\frac{4 \cdot 1}{16} - \frac{5}{8} + \frac{11}{4} - \frac{2}{1} + \frac{4}{1} = \frac{4 - 10 + 44 + 32}{16} =$$

$$16x^3 + 15x^2 + 22x + 4 = 0$$

$$-328 + 600 - \frac{16}{16} + \frac{15}{4} - \frac{22}{2} + 4 = 0$$

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (x-15)^2 + (y-8)^2 = 9 \end{cases}$$

x, y

$$|y+x+8|$$

$$|y-x|$$

$$y = -x$$

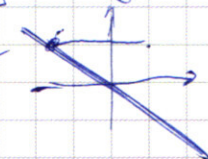


$$y = -x - 8$$

$$y+x$$

$$|y+3x|$$

$$y+x$$



$$x$$

$$|y+x+8| + |y-x+8| = 16$$

$$4 + 4x + x^2 + 10x^2 + 5x^3 + 4x^4$$

$$4x^4 + 5x^3$$

$$2(x+2)^2 + 20x^2 + 10x^3 + 4x^4 = 2,5x^2$$

$$5x^4 + 10x^3 + x^2$$

$$|x-1| + |x+1| = 16$$

$$|x-15| + |x+1| = 16$$

$$|x-15| + |x+1| = 16$$

$$|y|=8$$

$$y = \pm 8$$

$$x = \pm 15$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4900 = 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \quad \text{---} \quad \text{N1}$$

7.7.55 (2.2)

1.1.1.1. 4

4.3.

12

5.4

$$C_8^2 = 8 \cdot 7 = 56$$

$4! - 4!$

$$\frac{8!}{2^4} = \frac{8!}{16} =$$

2: 77; 2:55 2:22 2:11

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{16}$$

2:77 2:55 2:47 2:55

125

64

360

1

$$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{4!}{1!} \cdot \frac{4!}{1!} = 24^2 = 576$$

4.



$\times 210$
 210
 210
 210
 210

$$\begin{array}{r} 310 \\ \times 2590 \\ \hline \end{array}$$

2520

$$b_1, b_2, \dots, b_{3000}$$

$$N_2$$

$$S_1 q - S = b_1 (q^{3000} - 1)$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{\ln(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

157

$$S_1 = \frac{5}{8} = 0.625$$

$$\begin{array}{r} 210 \\ + 8 \\ \hline 218 \end{array}$$

$$\frac{S_{18} - S_{17}}{a} = b_{18} + \frac{1000}{2520}$$

$$\sum_1 = b_1 + b_2 q + b_3 q^2 + b_4 q^3 + \dots + b_n q^{2038}$$

$$S_1 = \int_2 = b_1 + b_1 q + 40 b_1 q^2 + b_1 q^3 + b_1 q^4 + 40 b_1 q^5 = 40 b_1 (q^2 + q^5 + q^8 + \dots + q^{2899}) +$$

$$+ \cancel{51 q^1 + q + q} \quad \text{a}$$

$$q^2 (q^{3000} - 1) = \frac{q^{3002} - q^2}{q^3 - 1} \quad 2 - 1993$$

$$S_2 - S_1 = 4S_1 = 39b_1 \left(q^2 + q^5 + q^8 + \dots + q^{299} \right) = 39b_1 \left(\frac{q^{300} - 1}{q^3 - 1} \right)$$

$$\int_3 = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + b_1 q^{2019} = b_1 + b_1 q^2 + b_1 q^4 + b_1 q^{2018} + b_1 q + b_1 q^3 + b_1 q^5 + \dots$$

$$S_3 = b_1 + 3b_1q + b_2q^2 + 3b_1q^3 + \dots + 3b_1q^{2999} = b_1 \frac{(q^{2 \cdot 1500} - 1)}{q^2 - 1} + 3b_1q^2$$

$$+ 3b_1q \frac{(q^{2 \cdot 1500} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{b_1(q^{3000} - 1 + 3q^{3001} - 3)}{q^2 - 1} = b_1 \frac{(q^{3000}(1+3q) - (1+3q))}{q^2 - 1} =$$

$$= b_1 \frac{(q^{3000} - 1)(1+3q)}{q^2 - 1}$$

$$S_1 = \frac{b_1(q^{3000} - 1)(q+1)}{q^2 - 1}$$

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{1+3q}{q+1} = \frac{1+7,5}{3,5} = \frac{8,5}{3,5} = \frac{85}{35} = \frac{17}{7}$$

$$S_2 = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + 40b_1q^{2999}$$

$$4S_1 = \frac{39b_1(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$$\frac{S_1}{b_1} = \frac{(q^{3000} - 1) \cdot 39}{(q^2 - 1) \cdot 4} = \frac{(q^{3000} - 1)(q+1)}{q^2 - 1}$$

$$\frac{39}{4(q-1)(q^2+q+1)} = \frac{(q+1)}{(q-1)(q+1)}$$

$$39q^2 + 4q + 4 = 39$$

$$4q^2 + 4q - 35 = 0$$

$$16 + 16 \cdot 35 = 2$$

$$4 + 140 = 144 = 12^2$$

$$-4 \pm 24 = 8$$

$$q = \frac{-2 \pm 12}{4} = 2,5$$

$$\frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$x^3 - 64x + 200 = x^2 + 6x - 40$$

$$x^2 - 125 - 64x + 200 = 325 - 320 = 5$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

