МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2; -2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5; 5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

© МФТИ, 2020

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1. Так как цифры чисел$_{\text{их}}$ могут быть только от 0 до 9, найдём кол-во способов разложить число 700 на множители (простые цифры, то есть 2, 3, 5 и 7): $700 = 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ одна из цифр восьмизначного числа должна быть 7, так как $7 \cdot (\text{любое простое число}) > 9 \Rightarrow$ уже не будет цифрой$_x$. Аналогично, в числе должны присутствовать обе 5, ведь $5 \cdot (\text{любое простое число}) > 9$.

Однако в числе также должны содержаться либо две 2, либо одна 4, а все остальные цифры могут быть исключительно 1. Так, получается что наши восьмизначные числа можно разделить на две группы:

(1) Содержащие цифры 7, 5, 5, 2, 2, 1, 1, 1

(2) Содержащие цифры 7, 5, 5, 4, 1, 1, 1, 1

В группе (1) N_1 чисел. $N_1 = (8) \cdot \left(\frac{7 \cdot 6}{2!}\right) \cdot \left(\frac{5 \cdot 4}{2!}\right)$, где 8 – число возможных позиций цифры 7, $\frac{7 \cdot 6}{2!}$ – число позиций двух цифр 5, а $\frac{5 \cdot 4}{2!}$ – двух цифр 2; все оставшиеся позиции занимаются цифрами 1.

$N_1 = 1680$.

В группе (2) N_2 чисел. Аналогично подсчёту N_1 можно подсчитать и N_2: $N_2 = (8) \cdot \left(\frac{7 \cdot 6}{2!}\right) \cdot 5 = \frac{N_1}{2} = 840$.

Общее число подходящих под условие восьмизначных чисел $N = N_1 + N_2 = 2520$.

Ответ: $N = 2520$.

Задание 2.

$$\begin{cases} S = b_1 + b_1\cdot q + b_1\cdot q^2 + \ldots + b_1\cdot q^{2999}, \text{ где } b_1 \text{ – первый член прогрессии, а } q \text{ – знаменатель прогрессии.} \\ 10S = b_1 + b_1\cdot q + b_1 q^2 + \ldots + b_1\cdot q^{2999} + 49 b_1 q^2 + 49 b_1 q^5 + \ldots + 49 b_1 q^{2999} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 9S = 49 b_1 (q^2 + q^5 + q^8 + \ldots + q^{2999}) = 49 b_1 q^2 (1 + q^3 + q^6 + \ldots + q^{2997}) \\ S = b_1 (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{2999}) = b_1\cdot(1 + q^3 + q^6 + \ldots + q^{2997})\cdot(1 + q + q^2) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\frac{9S}{S} = \frac{49 b_1 q^2}{b_1(1+q+q^2)} \Rightarrow 40q^2 - 9q - 9 = 0;\ D = 1521 = 39^2$$

$$q = \frac{9 \pm 39}{80} = -\frac{3}{8};\ \frac{3}{5}, \text{ но } -\frac{3}{8} \text{ не подходит,}$$

$q = \frac{3}{5}$ $\Leftarrow$ так как все члены прогрессии положит.

Теперь, если увеличить $b_2, b_4 \ldots b_{3000}$ в два раза, сумма прогрессии станет равна M: $M = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{2999} + b_1 q + b_1 q^3 + \ldots + b_1 q^{2999} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} M - S = b_1 q\cdot(1 + q^2 + q^4 + \ldots + q^{2998}) \\ S = b_1\cdot(1 + q + q^2 + \ldots + q^{2999}) = b_1\cdot(1 + q^2 + q^4 + q^6 + \ldots + q^{2998})\cdot(1+q) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\frac{M-S}{S} = \frac{b_1 q}{b_1(1+q)} \Rightarrow M + M\cdot q = S + S\cdot q + S\cdot q \Rightarrow M = S\cdot\frac{1+2q}{1+q} = S\cdot\frac{2{,}2}{1{,}6} = \underline{S\cdot\frac{11}{8}}.$$

Ответ: S увеличится в $\frac{11}{8}$ раз.

Задание 3. $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$

$$\frac{x+6}{\sqrt{2}}\sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4) \quad x \text{ равное } (-6) \text{ не подходит}$$

можно возводить в квадрат $\Leftarrow 0 < \sqrt{\frac{x^3}{2} - 2x + 40} = x + 4 \Rightarrow x > -4$

$\Downarrow$

$$\frac{x^3}{2} - 2x + 40 = x^2 + 8x + 16$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 3 (продолжение).

$x^3-2x^2-20x+48=0$

$(x-4)(x^2+2x-12)=0 \Rightarrow$ 1) $x=4$

2) $x^2+2x-12=0$; $D=52$

$x=\frac{\pm\sqrt{52}-2}{2}=\pm\sqrt{13}-1$

но $-\sqrt{13}-1<-4$, значит не подходит

Ответ: $x=\sqrt{13}-1$; 4.

Задание 4.

Разберём два случая: (1) $x\geq 2$
(2) $x<2$

(1): $f(x)=2x^4+x^2-4x-3x^3+6x^2+4=2x^4-3x^3+7x^2-4x+4$

Заметим, что $f(2)=32$, значит 2 подходит

Докажем что $f(x)$ монотонно возрастает с ув-ем x:

$f'(x)=8x^3-9x^2+14x-4$

$f''(x)=24x^2-18x+14$

$f'''(x)=48x-18$ ⟵ третья производная $f(x)$ – монотонно возрастающая функция

$f''(x)$ тоже монотонно возр.

$f'(x)$ тоже монотонно возр.

$f(x)$ тоже монотонно возр.

подходят все числа на отрезке $[2;\infty)$.

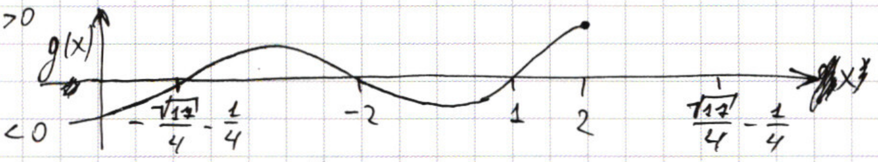
Задание 4 (продолжение).

(2): $g(x) = 2x^4+3x^3-5x^2-4x+4 \geq 0$

$g(x) = (x-1)(2x^3+5x^2-4) \geq 0$

$g(x) = (x-1)(x+2)(2x^2+x-2) \geq 0$

$g(x) = (x-1)(x+2)\left(x+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}\right)\left(x+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}\right)2 \geq 0$



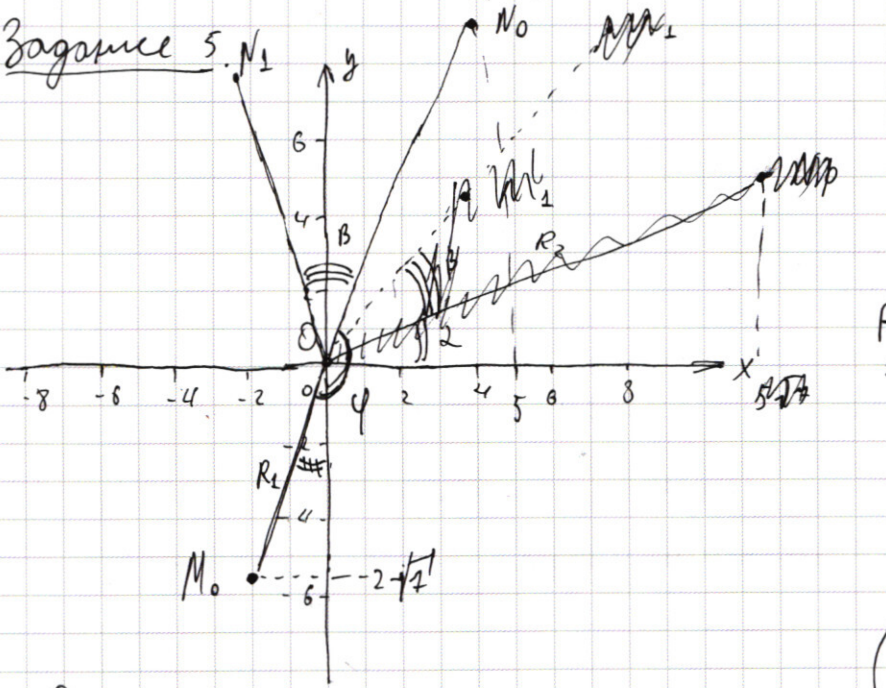
$\Downarrow$

$g(x) \geq 0$ при $x \in \{1\} \cup \left[-\frac{\sqrt{17}+1}{4}; -2\right]$

$F(x) \geq 0$ при $x \in [2; \infty)$

Ответ: $x \in \left[-\frac{\sqrt{17}+1}{4}; -2\right] \cup \{1\} \cup [2; \infty)$

Задание 5.

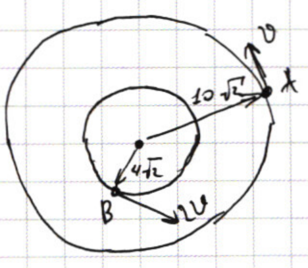


R_1 – расстояние от водомерки до центра координат:

$R_1 = \sqrt{2^2+(2\sqrt{7})^2} = 4\sqrt{2}$

R_2 – расстояние от жука-плавунца до центра координат:

$R_2 = \sqrt{5^2+(5\sqrt{7})^2} = 10\sqrt{2}$



v – скорость жука

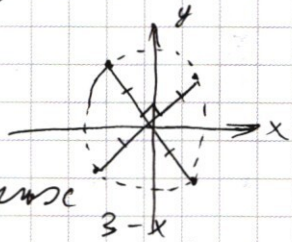
Длина окружности, описываемой водомеркой $l_1 = 2\pi R_1$, а жуком – $L_2 = 2\pi R_2 \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{2}{5}$, а так как водомерка в два раза быстрее, на один круг сделанный жуком за время $\frac{L_2}{v}$, водомерка сделает X, проходя каждый за $\frac{L_1}{2v}$. Видно, что $\frac{L_2}{v} = \frac{5L_1}{2v} \Rightarrow X = 5 \Rightarrow$ водомерка с жуком

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 5 (продолжение).

Будут друг от друга на минимальном расстоянии 4 раза, а так как ситуация повторяется, значит все 4 положения выстраиваются в такой „крест“.

Найдя одно положение из этих, → мы легко определим координаты остальных



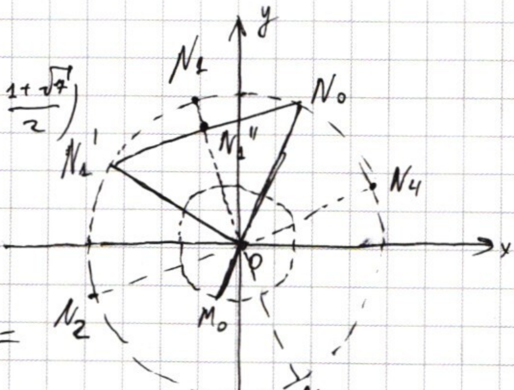
Расстояние между водомеркой и жуком минимально, когда угол φ (см. стр. 4) равен 0.

Обозначим скорость изменения этого угла за ω_φ, а угловые скорости водомерки и жука – $\omega_в$ и $\omega_ж$ соответственно. Как мы уже знаем $\omega_в = 5\omega_ж$, а φ – угол между ними уменьшается с разностью их угловых скоростей $\Rightarrow \omega_\varphi = \omega_в - \omega_ж = 4\omega_ж$

К моменту их первой встречи, жук пройдёт β, а водомерка – $180+\beta$, т.к. начальный $\varphi = 180° \Rightarrow 5\beta = 180+\beta \Rightarrow$
$\Rightarrow \beta = 45° \Rightarrow \angle N_0ON_1 = \beta = 45°$, $ON_0 = ON_1 = 10\sqrt{2}$

~~ур-е прямой ON_0: $y = \sqrt{7}x$~~

$N_0(5; 5\sqrt{7})$; $N_1'(-5\sqrt{7}; 5) \Rightarrow N_1'' = \left(5\frac{1-\sqrt{7}}{2}; 5\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$



$ON_1'' =$

$= \sqrt{5^2\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)^2 + 5^2\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)^2} =$

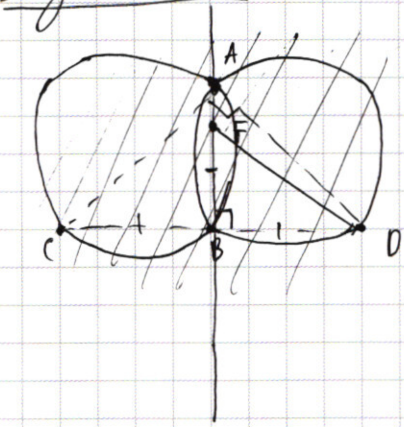
$= 5 \cdot 2 = 10$; а $ON_1 = 10\sqrt{2} \Rightarrow$

$N_1 = \sqrt{2} \cdot N_1'' = \left(5\frac{1-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}; 5\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)$.

$N_2 = \left(-5\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}; 5\frac{1-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)$; $N_3 = \left(5\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}; -5\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)$; $N_4 = \left(5\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}; 5\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}\right)$

Ответ: Координаты четырёх точек, в которых находится жук, когда расстояние между ним и водомеркой минимально: $N_1\left(5\frac{1-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}; 5\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)$; $N_2\left(-5\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}; 5\frac{1-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)$;
$N_3\left(5\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}; -5\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)$; $N_4\left(5\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}; 5\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}\right)$.

Задание 6



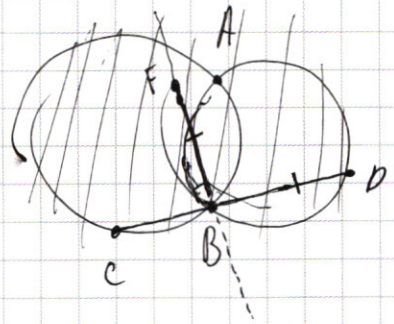
Заметим, что весь рисунок симметричен относительно прямой AB

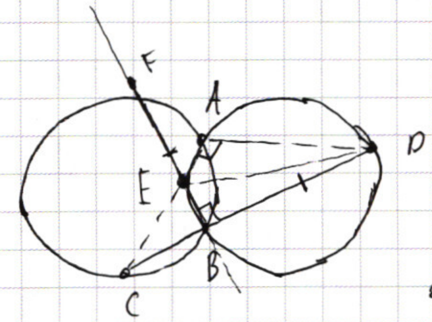
$CB = BD \Rightarrow AC = AD \Rightarrow \angle CAB = \angle BAD = \angle BCA = \angle BDA = 45^\circ$

Заметим также, что $\angle BPF = \angle BFD = 45^\circ$

$\Downarrow$

точка F – то же что и точка P





E – точка пересечения AC и BF

$\Downarrow$

E лежит на одной окружности с A, B и D, т.к. EABD – вписанный четырёхугольник, а A, B и D уже лежат на одной окружности

$ED = 10 \Leftarrow$ ED – диаметр той же окружности, так как $\angle DAE = 90^\circ$

~~Углы CAD и DAC = 45°~~

Задание 7.

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a & (2) \end{cases}$$

ур-е (2) задаёт на коорд плоскости 4 окружности радиуса $\sqrt{a}$ с центрами в точках $(8;6)$; $(-8;6)$; $(-8;-6)$ и $(8;-6)$

Разберём ур-е (1):

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

Если $y - x \geq 6$ и $y + x \geq 6 \Rightarrow y \geq 6 + x;\ y \geq 6 - x$

$\Downarrow$

$y \geq 6 + |x|$

$\Downarrow$

$y - 6 - x + y - 6 + x = 12$

$\Downarrow$

$\underline{y = 12}$ при $x \in [-6; 6]$

Если $y - x \geq 6$ и $y + x < 6 \Rightarrow y \geq 6 + x;\ y < 6 - x$

$\Downarrow$

$6 - x > 6 + x \Rightarrow x < 0$

$\Downarrow$

$y - 6 - x - y + 6 - x = 12$

$\Downarrow$

$\underline{x = -6}$ для любых y

Если $y - x < 6$ и $y + x \geq 6 \Rightarrow y < 6 + x;\ y \geq 6 - x$

$\Downarrow$

$6 + x > 6 - x \Rightarrow x > 0$

$\Downarrow$

$-y + 6 + x + y - 6 + x = 12$

$\Downarrow$

$\underline{x = 6}$ для любых y

Если $y - x < 6$ и $y + x < 6 \Rightarrow y < 6 + x;\ y < 6 - x$

$\Downarrow$

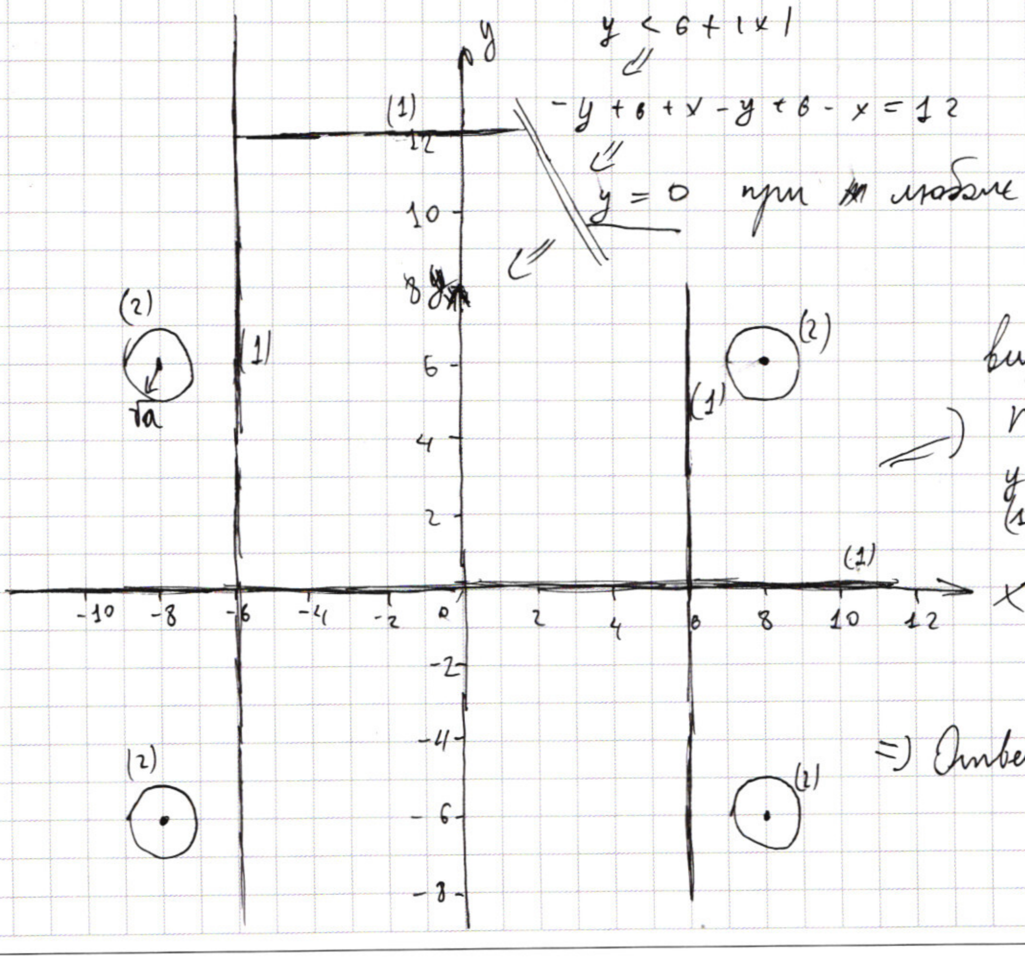
$y < 6 + |x|$

$\Downarrow$

$-y + 6 + x - y + 6 - x = 12$

$\Downarrow$

$\underline{y = 0}$ при любых x



видно, что при $\sqrt{a} = 2$ у областей (1) и (2) 2 пересечения

$\Downarrow$

$\underline{a = 4}$

$\Rightarrow$ Ответ: $a = 4$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$32-24-20+8+4$ $\quad 2^4\cdot 5$ $\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$ $\quad 2x^2+x-2$ $\quad D=17$ $\quad -2$

$b_1+b_1q+b_1q^2+b_1q^3+\ldots+b_1q^{2999}=S$

$49\cdot b_1(q^2+q^5+q^8+\ldots+q^{2999})=9S$

$S=b_1(1+q+q^2+q^3+q^4+\ldots+q^{2999})=b_1(1+q^3+q^6+\ldots+q^{2997})\cdot(1+q+q^2)$

$9S=49b_1(q^2+q^5+\ldots+q^{2999})=b_1\cdot(1+q^3+q^6+\ldots+q^{2997})\cdot q^2\cdot 49$

$2\cdot(-8)+3\cdot4-4$

$-16-4+20$

$64-32-80+48$

$112-11$

$\frac{49q^2}{1+q+q^2}=9$ $\quad 160\cdot 9$

$49q^2-9q^2+9q+9$

$40q^2-9q-9=0 \qquad D=81+1440=1521=39^2$

$-8/-8$

$\cancel{40^2=1600}$ $\quad q=\frac{9\pm39}{80}=-\frac{3}{8};\ \frac{3}{5}$

$\left(\frac{x}{\sqrt2}+3\sqrt2\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24=(x+6)(x+4)$

$(x-a)(x-b)(x+c)$

$x^3-4x+80=\cancel{(x-2)(x-4)}(x+10)$

$-a-b+c=-2$

$\frac{x+6}{\sqrt2}$ $\quad (x^2-ax-b)(x-c)$

$ab-bc-ac=-20$

$x^3-cx^2-ax^2-bx+acx+\frac{bc}{80}$ $\quad abc=48$

$2^4\cdot 3$

$bc=80$

$b=\frac{80}{c}$ $\quad ac-b=4 \Rightarrow -c^2-b=4$

$-c-a=0 \Rightarrow a=-c$

$-c^2-\frac{80}{c}=4$

c^3

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$2x^4 + y^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0$

$2\cdot 3^4 - 3\cdot 3^3 + 7\cdot 3^2 - 4\cdot 3 + 4 \geq 0$

$\cancel{3^4} + 63 - 12 + 4 \geq 0$

81

$EP = 10$

$x \geq 2 \Rightarrow 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$

$(2x - \quad)(x - \quad)(x + \quad)(x + \quad)$

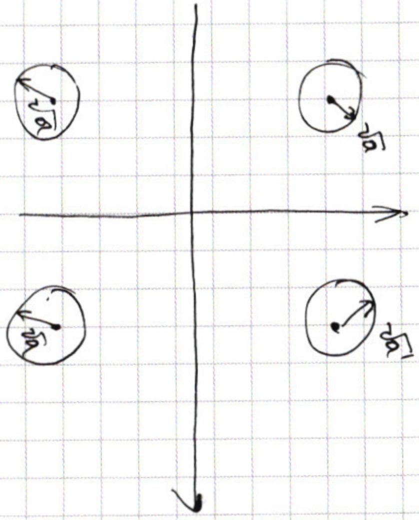
$\cancel{2\cdot 2^4 - 3\cdot 2^3 + 7\cdot 2^2 - 4\cdot 2 + 4}$

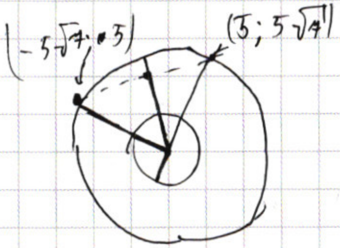
$\cancel{32 - 24 + 28 - 8 + 4}$

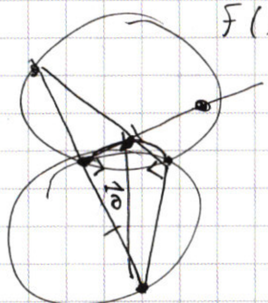
$f(x)' = 8x^3 - 9x^2 + 14x - 4$

$f(x)'' = 24x^2 - 18x + 14$

$f(x)''' = 48x - 18 \Rightarrow$ монотонно ~~возр~~







☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)