МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1;2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2;-4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16, \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$4900 = 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$

$7 \cdot 2 = 14$ - не цифра, $2 \cdot 5 = 10$ - не цифра

$7 \cdot 5 = 35$ - не цифра $\Rightarrow$ в числе 6 цифр это 7, 7, 2, 2, 5, 5 и еще 2 единицы (они на произведение не влияют)

Кол-во способов расставить 8 цифр (без нулей) на 8 мест - $8!$, если какая-то цифра повторяется 2 раза в наборе, то кол-во способов растоновки надо поделить на 2 (это кол-во способов перестановки 2-ух чисел). У нас повторяются 4 ~~числа~~ цифры (каждая по 2 раза) $\Rightarrow \frac{8!}{2^4}$ - кол-во 8-мизначных чисел $\frac{8!}{2^4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4}{2^4} = 120 \cdot 21 = 2520$

Ответ: 2520 чисел

№2

Пусть знаменатель геом. прогр. $q_0 \Rightarrow S_0 = \frac{b_1(1-q_0^n)}{1-q}$, $n = 3000$ по усл.

$b_3, b_6, \dots, b_{3000}$ - тоже геометрич-ая прогр-сия, но с знаменателем $q_1 = q_0^3$ (т.к. $b_3 = b_1 q^2$, $b_6 = b_1 q^5 \Rightarrow \frac{b_6}{b_1} = q^3$) Если мы каждое из этих чисел увеличим в 40 раз, то можно представить, что одну такую прогрессию мы оставим в первоначально и добавим к первонач-ой прогрессии 39 сумм прогрессии ($b_3, b_6, \dots, b_{3000}$) $S_1 = \frac{b_3(1-q_1^m)}{1-q_1}$, $m = \frac{3000}{3} = 1000 \Rightarrow$

$S_1 = \frac{b_1 q^2(1-q^{3000})}{1-q^3} \Rightarrow 5S_0 = S_0 + 39S_1 \Rightarrow 39S = 4S$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q}=S_0\\ &39\frac{b_1q^2(1-q^{3000})}{1-q^3}=4S_0\end{aligned}\right\}\Rightarrow S_0(1-q)=\frac{4}{39}\frac{(1-q^3)}{q^2}S_0\Rightarrow 39q^2-39q^3=4-4q^3$$

$35q^3-39q^2+4=0 \Leftrightarrow (q-1)(35q^2-4q-4)=0 \Leftrightarrow (q-1)(7q+2)(5q-2)=0$

По усл $q>0$ (т.к. все члены положительны) и $q\neq 1$ (т.к. это геометр. прогр-ия) $\Rightarrow q=\frac{2}{5}$

$b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$ – тоже геометр-ая прогр-ия, где $q_2=q^2$ $\left(\frac{b_4}{b_2}=\frac{b_1q^3}{b_1q}=q^2\right)$

$S_2=\frac{b_2(1-q_2^{l})}{1-q_2}$, $l=\frac{3000}{2}=1500 \Rightarrow S_2=\frac{b_1q(1-q^{3000})}{1-q^2}$

Если каждое из чисел $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$ увеличили в 3 раза, то $kS_0=S_0+2S_2$ (рассуждение о $2S_2$ аналогично $39S_1$, см. начало задания) (пусть k – число, во сколько раз изменилось S)

$$\left.\begin{aligned}&2\cdot\frac{b_1q(1-q^{3000})}{1-q^2}=(k-1)S_0\\ &\frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q}=S_0\end{aligned}\right\}\Rightarrow (k-1)\frac{1-q^2}{2q}S_0=(1-q)S_0\Rightarrow k=\frac{2q}{1+q}+1$$

$k=\frac{2\cdot\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}}+1=1\frac{4}{7} \Rightarrow S$ увеличилась в $1\frac{4}{7}$ раза

Ответ: увеличилось в $1\frac{4}{7}$ раза

№4

$4x^4+(x+2)^2-5x^2|x+2|\geq 0 \Leftrightarrow (4x^2-|x+2|)(x^2-|x+2|)\geq 0$

При $x\geq -2$: $(4x^2-x-2)(x^2-x-2)\geq 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)(x-2)(x+1)\geq 0$

$\begin{cases}x\geq -2\\ x\in(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right]\cup[2;+\infty)\end{cases} \Rightarrow x\in[-2;-1]\cup\left[\frac{1+\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right]\cup[2;+\infty)$

При $x<-2$: $\underbrace{(4x^2+x+2)}_{D=1-32<0\Rightarrow 4x^2+x+2>0}\underbrace{(x^2+x+2)}_{D=1-8<0\Rightarrow x^2+x+2>0}\geq 0 \Rightarrow \begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x<-2\end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;-2)$

Ответ: $x\in(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1+\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right]\cup[2;+\infty)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$|y+x+8|+|y-x+8|=16$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\le y+8,\ -x\le y+8 \\ y+8+x+y+8-x=16\end{cases}\\ \begin{cases} y+8\ge -x,\ y+8\le x \\ y+8+x-y-8+x=16\end{cases}\\ \begin{cases} y+8\le -x,\ y+8\ge x \\ -y-8-x+y+8-x=16\end{cases}\\ \begin{cases} y+8\le -x,\ y+8\le x \\ -y-8-x-y-8+x=16\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{l}\begin{cases} y=0 \\ x\in[-8;8]\end{cases}\\ \begin{cases} x=8 \\ y\in[-16;0]\end{cases}\\ \begin{cases} x=-8 \\ y\in[-16;0]\end{cases}\\ \begin{cases} y=-16 \\ x\in\varnothing\end{cases}\end{array}$$

$(|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=\pm 8 \\ |y|=8\pm\sqrt{a-49}\end{cases}\\ \begin{cases} y=0 \\ |x|=15\pm\sqrt{a-64}\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow$$ ~~Если $x=\pm 8$, то $|y|$~~ ~~$0\le 8\pm\sqrt{a-49}$~~

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=\pm 8 \\ \left[\begin{array}{l} 0\le 8+\sqrt{a-49}\le 16 \\ 0\le 8-\sqrt{a-49}\le 16\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases} y=0 \\ \left[\begin{array}{l} 0\le 15+\sqrt{a-64}\le 8 \\ 0\le 15-\sqrt{a-64}\le 8\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=\pm 8 \\ \left[\begin{array}{l} -8\le\sqrt{a-49}\le 8 \\ -8\le\sqrt{a-49}\le 8\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases} y=0 \\ \left[\begin{array}{l} -15\le\sqrt{a-64}\le -7 \\ 7\le\sqrt{a-64}\le 15\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=\pm 8 \\ 0\le\sqrt{a-49}\le 8\end{cases}\\ \begin{cases} y=0 \\ 7\le\sqrt{a-64}\le 15\end{cases}\end{array}\right.$$

Если $a<49$, то вся система имеет 0 решений ($\sqrt{a-49}<0$ и $a-64<0$, чего быть не должно из-за корня)

Если $a\in[49;64)\Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ 0\le\sqrt{a-64}\le 7\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing$

$\begin{cases} x=\pm 8 \\ 0\le\sqrt{a-49}\le 8\end{cases}$ – если есть корень y_0, то у первоначальной системы будет +2 корня $(8;y_0)(-8;y_0)$

$|y|=8\pm\sqrt{a-49}$ – должен иметь 1 корень, иначе в системе будет более 2 корней $\Rightarrow$ ~~$|y|=0$~~ $\Rightarrow 8+\sqrt{a-49}=y_1$, $8-\sqrt{a-49}=y_2$ и $y_1=y_2$

$8+\sqrt{a-49}=8-\sqrt{a-49}\Rightarrow\sqrt{a-49}=0$, $\Rightarrow |y|=8$, а $y\in[-16;0]\Rightarrow$

$y=-8$. При $a=49$ 2 решения $((8;-8)(-8;-8))$

Если $a \geq 64$, то $\begin{cases} y=0 \\ \left[\begin{array}{l} |x| = 15+\sqrt{a-64} \\ |x| = 15-\sqrt{a-64} \end{array}\right. \end{cases}$, а $|x| \leq 8$ при $y=0$, $\Rightarrow$ а $15+\sqrt{a-64} > 15$

$\Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ |x| = 15-\sqrt{a-64} \end{cases}$

Чтобы вся система имела ровно 2 решения, то

либо $\begin{cases} x=\pm 8 \\ |y| = 8 \pm \sqrt{a-49} \end{cases}$ имеет 2 решения (она имеет либо 0, либо 2, ~~либо 4~~ либо больше)

либо $\begin{cases} y=0 \\ |x| = 15-\sqrt{a-64} \end{cases}$ имеет 2 решения

I сл.: $\begin{cases} y=0 \\ |x| = 15-\sqrt{a-64} \end{cases}$ – 2 корня, $\begin{cases} x=\pm 8 \\ |y| = 8 \pm \sqrt{a-49} \end{cases}$ – $\varnothing$ $\Rightarrow$

~~$\left[\sqrt{a-49} < 8 \right.$ $\left[\begin{array}{l} 8+\sqrt{a-49} < 0 \text{ (автоматически } 8-\sqrt{a-49} < 0) \\ 8-\sqrt{a-49} > 16 \text{ (автоматически } 8+\sqrt{a-49} > 16) \end{array}\right.$~~

~~$\left[\sqrt{a-49} < -8 \right.$~~ $\left\{ \right.$ если $\sqrt{a-49}$ будет > 8, то $\begin{cases} 8+\sqrt{a-49} > 16 \\ 8-\sqrt{a-49} < 0 \end{cases} \Rightarrow$ ущ $\varnothing$

$\Rightarrow \sqrt{a-49} > 8 \Rightarrow \underline{a > 113}$

$\begin{cases} y=0 \\ |x| = 15-\sqrt{a-64} \end{cases} \Rightarrow |x| \neq 0$, иначе будет 1 решение $(\Rightarrow \sqrt{a-64} \neq 15)$ и

~~$0 \leq$~~ $\sqrt{a-64} < 15 \Rightarrow \begin{cases} a \in [113; 289) \\ a > 113 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (113; 289)$

II сл. $\begin{cases} y=0 \\ |x| = 15-\sqrt{a-64} \end{cases}$ – $\varnothing$ $\Rightarrow$ а $\left[\begin{array}{l} \sqrt{a-64} < 7 \\ \sqrt{a-64} > 15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \in [64; 113) \\ a \in (289; +\infty) \end{array}\right. \Rightarrow$

$a \in [64; 113) \cup (289; +\infty)$

$\begin{cases} x=\pm 8 \\ |y| = 8 \pm \sqrt{a-49} \end{cases}$ – 2 решения $\Rightarrow |y| = 8 \pm \sqrt{a-49}$ – 1 решение (~~см.~~ $\Rightarrow$ $a = 49$ (см. стр. 3) – но $a \geq 64$ – пр-ие $\Rightarrow$ $a \in \varnothing$

Если $y=0$, $x=\pm 8$, то $a=113$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ |x| = 15-\sqrt{113-64} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pm 8 \\ |y| = 8 \pm \sqrt{113-49} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ |x| = 8 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pm 8 \\ |y| = 0 \end{cases} \end{array}\right.$ – всего 2 решения $(-8;0)(8;0)$

Ответ: $a \in \{49\} \cup [113; 289)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

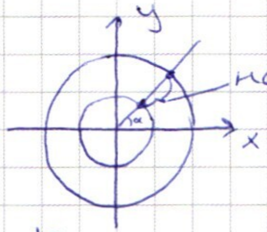
Найдем радиусы со карася и ~~карпа~~ пескаря. $R_к = \sqrt{1+(2\sqrt{2})^2} = 3$

$R_п = \sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2} = 6$. Пусть $v_п$ - скорость пескаря. $\Rightarrow v_к = 2,5 v_п$.

За время Δt пескарь пройдет угол $\frac{v_п \Delta t}{R_п}$, а карась

$\frac{v_к \Delta t}{R_к}$ (в радианах)

Если точки лежат на минимальном расстоянии, то они лежат на прямой, пересекающей общий центр окружностей.



наименьшее расстояние $\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha_к = \sin\alpha_п \\ \cos\alpha_к = \cos\alpha_п \end{cases}$ - угловые меры равны.

$\Rightarrow$ Время между встречами $= \left|\frac{v_к t}{R_к} - \frac{v_п t}{R_п}\right| = 2\pi$ (полный круг) в радианах

$\frac{2,5 v_п t}{3} - \frac{v_п t}{6} = 2\pi \Rightarrow \frac{2}{3} v_п t = 2\pi \Rightarrow t = \frac{3\pi}{v_п}$

За это время пескарь пройдет (в рад.) $\frac{v_п t}{R_п} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ — это четверть окружности $\Rightarrow$ есть ровно 4 точки, удовлетворяющие условию.

В нач. момент времени $\left.\begin{aligned} \sin\alpha_п &= -\frac{4\sqrt{2}}{6} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \cos\alpha_п &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}\right\}$ - 4 четверть

$\left.\begin{aligned} \sin\alpha_к &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \cos\alpha_к &= -\frac{1}{3} \end{aligned}\right\}$ - 2 четверть $\quad \left.\begin{aligned} \sin\alpha_п &= -\sin\alpha_к \\ \cos\alpha_п &= -\cos\alpha_к \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_п + \alpha_к = \pi \Rightarrow$

до I встречи пройдет $\frac{t}{2}$ (т.к. $\frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$), а пескарь пройдет $\frac{v_п \cdot \frac{3\pi}{2v_п}}{6} = \frac{\pi}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Его $\sin(\alpha_n+45^\circ) = \sin\alpha_n \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos\alpha_n = -\frac{4\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{6} =$

$= -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}$, $\cos(\alpha_n+45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{4\sqrt{2}}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{2}{3}$

$\sin(\alpha+90^\circ) = \cos\alpha$, $\cos(\alpha+90^\circ) = -\sin\alpha \Rightarrow$

если одна из точек $(\cos(\alpha_n+45^\circ)\cdot 6; \sin(\alpha_n+45^\circ)\cdot 6) =$

$= (4+\sqrt{2}; \sqrt{2}-4) \Rightarrow$ след $(4-\sqrt{2}; 4+\sqrt{2})$, след $(-4-\sqrt{2}; 4-\sqrt{2})$,

след $(\sqrt{2}-4; -4-\sqrt{2})$

Ответ: $(4+\sqrt{2}; \sqrt{2}-4)$, $(4-\sqrt{2}; 4+\sqrt{2})$, $(-4-\sqrt{2}; 4-\sqrt{2})$,

$(\sqrt{2}-4; -4-\sqrt{2})$

№3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40$$

$$(x+10)\sqrt{x^3-64x+200} = (x+10)(x-4)\cdot 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases}(x+10)^2(x-4)\geq 0\\ (x+10)^2((x^3-64x+200)-8(x-4)^2)=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\in\{-10\}\cup[4;+\infty)\\ (x+10)^2(x^3-64x+200-8x^2+64x-128)=0\end{cases}$$

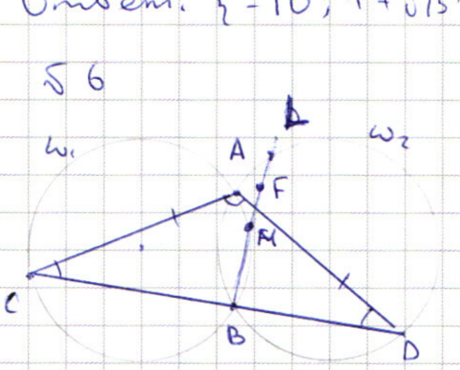
$$(x+10)^2(x^3-8x^2+72)=0$$

$$(x+10)^2(x-6)(x^2-2x-12)=0 \Leftrightarrow (x+10)^2(x-6)(x-(1-\sqrt{13}))(x-(1+\sqrt{13}))=0$$

$$\begin{cases}x\in\{-10; 6; 1-\sqrt{13}; 1+\sqrt{13}\}\\ x\in\{-10\}\cup[4;+\infty)\end{cases} \Rightarrow x\in\{-10; 1+\sqrt{13}; 6\}$$

Ответ: $\{-10; 1+\sqrt{13}; 6\}$

№6



ω одинаковы, т.к. на дуги, отсекаемые хордами одинаковыми, равны $\Rightarrow$ дуга ω_1 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB}$ (хорда AB) ω_2 $\Rightarrow \angle ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = \angle ADC =$ $= 45^\circ$ (т.к $\angle CAD = 90^\circ$))

Пусть $\omega_1 \cap BF$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1122
1212
1221
2121
2211

$\frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = S$ $\quad n=3000$

$m=1000$

$b_6 = b_3 q^3 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1000} b_{3k} = \frac{b_3(1-q^{3m})}{1-q^3} = \frac{bq^2(1-q^{3m})}{1-q^3}$

$\frac{b_1(1-q^n)}{1-q} + 39\frac{b_1 q^2(1-q^{3m})}{1-q^3} = 5S \Rightarrow 39\frac{b_1 q^2(1-q^{3m})}{1-q^3} = 4S$

$\frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q} = S \quad 39\frac{b_1 q^2(1-q^{3000})}{1-q^3} = 4S \Rightarrow S(1-q) = \frac{4}{39}S\frac{1-q^3}{q^2}$

$39q^2 - 39q^3 = 4 - 4q^3 \Rightarrow \cancel{39q^3+q^2-4q+4}$ $\cancel{(3q^2+2q+4)(q-1)=0}$

$\cancel{\frac{D}{4} = 4+12=16}$

$\cancel{(3q-2)(q+2)(q-1)=0}$

~~По усл $q\neq 1, q>0 \Rightarrow q=\frac{2}{3}$~~

$\sum_{k=1}^{1500} b_{2k} = \frac{b_2(1-q^{2\cdot1500})}{1-q^2} = \frac{b_1 q(1-q^{3000})}{1-q^2} \Rightarrow$

Пусть $2\cdot\frac{b_1 q(1-q^{3000})}{1-q^2} = nS \Rightarrow$

$\cancel{b_1(}$

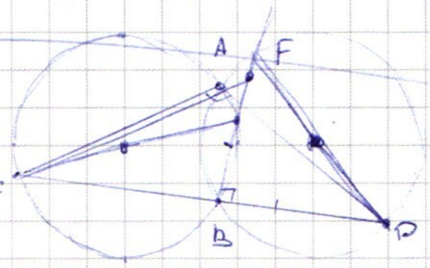
$35q^3-39q^2+0q+4 \mid q-1$
$35q^3-35q^2$
$-4q^2+4q$

$(q-1)(35q^2-4q-4)=0 \Leftrightarrow 35q^3-39q^2+4=0 \Leftrightarrow \cancel{(35q-4)(q-1)=0}$

$(q-1)(5q-2)(7q+2)=0$

По усл. $q\neq 1, q>0 \Rightarrow$

$q=\frac{2}{5}$



$b_1(1-q^{3000}) = \frac{nS}{2q}(1-q^2) = S(1-q) \Leftrightarrow n(1+q) = 2q$

$n = \frac{2q}{1+q} = \frac{\frac{4}{5}}{1+\frac{2}{5}} = \frac{4}{7}$

$S_2 = S + \frac{4}{7}S = 1\frac{4}{7}S$

Ответ: увеличится в $1\frac{4}{7}$ S

$\frac{x+\cancel{18}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40$

$x^2+6x-40=(x+10)(x-4)$

$\begin{cases} \frac{x+10}{2\sqrt{2}} \cdot \cancel{x^2}\ (x+10)(x-4) \geq 0 \Rightarrow 0 \geq 0 \\ \cancel{x^3-64x+200 \geq 0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [4;+\infty) \cap \{-10\} \\ \end{cases}$

$(\cancel{x}\ 4)$

$(x^3-64x+200)(x+10)^2=(x+10)^2(x-4)^2 \cdot 8$

$(x^3-64x+200-8x^2+64x-128)(x+10)^2=0$

27 − 9 − 108 + 184

$\cancel{(x^3-x^2-56x+184)(x+10)^2}=0$

64 − 16 − 224 + 184

$(x^3-8x^2+72)(x+10)^2=0$

64 − 128 + 72

$x^3-8x^2-0x+72 \,|\, (x-4)$

$x^3-4x^2 \qquad x^2-4x-16$

$-4x^2-0x$

$-4x^2+16x$

$-16x+72$

$-16x+64$

$4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4 \geq 0$

$(x+2)^2$

4 + 1 − 4 + 5 − 10 + 4

$x \geq -2 \Rightarrow \quad 4x^4+x^2+4x-5x^3-10x^2+4 \geq 0$

$4x^4-5x^3-9x^2-4x+4 \geq 0$

$\underbrace{4x^4}_{\geq 0}+\underbrace{(x+2)^2}_{\geq 0}-\underbrace{5x^2|x+2|}_{\leq 0}\ \cancel{+4x} \geq 0 \Rightarrow \quad 4x^4+(x+2)^2 \geq 5x^2|x+2|$

$4x^4+(x+2)^2-5x^2|x+2| \geq 0$

$\cancel{x^2(4-5|x+2|)+(x+2)^2 \geq 0}$

$4x^4+(x+2)^2 \geq 5x^2|x+2|$

$4a^2+b^2 \geq 5a|b| \qquad a \geq 0 \qquad a=x^2$

$4a^2-5a|b|+b^2 \geq 0 \qquad b=x+2$

$(4a-|b|)(a-|b|) \geq 0$

$(4x^2-|x+2|)(x^2-|x+2|) \geq 0$

$x \geq -2 \Rightarrow (4x^2-x-2)(x^2-x-2) \geq 0 \Leftrightarrow (x-\frac{1+\sqrt{33}}{8})(x-\frac{1-\sqrt{33}}{8}) \cdot$

$(x-2)(x+1) \geq 0$

$x \in (-\infty;-1] \cup [\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}] \cup [2;+\infty)$

$[-2;-1] \ldots$

$x \leq -2 \quad \underbrace{(4x^2+x+2)}_{>0}\underbrace{(x^2+x+2)}_{>0} \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

36 · 8 = 288

$x^3-8x^2+72 \qquad 64-128+72 \qquad 512-$

8 · 9 $\qquad$ 216 − 288 + 72 $\qquad D=4+48=\frac{52}{4}=13$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

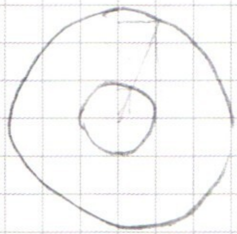
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При решении задачи будем использовать углы.

Для начала надо узнать во сколько раз окружности рыб отличаются от единичной ω. ~~Если ω единичная,~~ ~~то по осн. тригонометр. тожд-ву~~ $x^2+y^2=R$

$R_к=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$, $R_п=\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}=6$



Пусть $v_п$ - скорость пескаря => $v_к=2,5v_п$.

За время Δt пескарь поворачивает на угол

$\frac{v_п \Delta t}{R_п}$, а карась $\frac{v_к \Delta t}{R_к}$ ~~Разность поворота углов~~

Карась за Δt проходит угол на $\frac{v_к\Delta t}{R_к}-\frac{v_п\Delta t}{R_п}=\frac{2,5v_п\Delta t}{3}-\frac{v_п\Delta t}{6}=$

$=\frac{4v_п\Delta t}{6}=\frac{2}{3}v_п\Delta t$ рад. => после встречи карась вновь встретит пескаря $\frac{2}{3}v_п\Delta t=2\pi$ $t=\frac{3\pi}{v_п}$. За это время пескар пройдет угол $\frac{v_п\cdot\frac{3\pi}{v_п}}{6}=\frac{\pi}{2}$ - 3~~-и~~ ~~1/3~~ 3/4 ~~единицы~~ длины окружности.

И так будет происходить каждый раз после встречи => ровно 4 точки на окружности удовлетворяют условию.

Первоначальный угол поворота пескаря: $\arccos\left(\frac{2}{6}\right)=\arccos\frac{1}{3}$ ($\cos\alpha>0$, $\sin\alpha<0$ => 4 четверть)

карася $-\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ ($\cos\beta<0$, $\cos\beta>0$ => 2 четверть)

$\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
$\cos\beta=-\frac{1}{3}$, $\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ => $\alpha+\beta=\pi$ =>

$|a+b|+|a-b|=16 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b-a+b=16 \\ -a-b+a-b=16 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} b=8 \\ b=-8 \end{array} \Rightarrow x=\pm 8$

$|y+8-x|+|y+8+x|=16 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=8 \\ y\in(0;+\infty) \end{array}\right.$ $\quad 0 \geqslant -15+\sqrt{\ } \geqslant -8$

$\left\{\begin{array}{l} y+8>x \\ (y+8)-x-(y+8)-x=16 \end{array}\right.$ $\quad \left\{\begin{array}{l} x=8 \\ y\in(-\infty;-16) \end{array}\right.$ $\quad 15 \geqslant$

$\left\{\begin{array}{l} x=-8 \\ y>-16 \end{array}\right.$ $\quad \left\{\begin{array}{l} y+8<x \\ x-(y+8)+(y+8)+x=16 \end{array}\right.$ $\quad \left\{\begin{array}{l} x=8 \\ y<0 \end{array}\right.$

$0 \geqslant -8+\sqrt{a-49} \geqslant -16$

$|y+16|+|y|=16$

$0 \geqslant -15+\sqrt{a-64} \geqslant -8$

$|a+b|+|a-b|=16 \Rightarrow$

$a+b+a-b=16$	$(a\geqslant b, a\geqslant -b)$	$a=8$
$a+b-a+b=16$	$(a\geqslant -b, a<b)$	$b=8$
$-a-b+a-b=16$	$(a<-b, a\geqslant b)$	$b=-8$
$-a-b-a+b=16$	$(a<-b, a<b)$	$a=-8$

I $a=8$, $b\in[-8;8]$ $\quad 8\geqslant|b|$ $\quad b\leq 8$ $\quad b\geqslant -8$

II $b=8$, $a\in[-8;8]$ $\quad 8\geqslant|a|$ $\quad a\geqslant -8$ $\quad a<8$ $\quad y\in[-16;0]$

III. $b=-8$ $a\in[-8;8]$ $\quad a<8$ $\quad a\geqslant -8$ $\quad y\in[-16;0]$

IV $a=-8$ $b\in[-8;8]$ $\quad b>8$ $\quad b\leq -8$

$x=\pm 8 \Rightarrow (|y|-8)^2=a-49$ $\quad y=\pm(8\pm\sqrt{a-49})$

$y=\pm 8 \Rightarrow (|x|+15)^2=a$ $\quad x=\pm(15\pm\sqrt{a})$

если у нас появляется 1 возможное значение x или y, то у нас появ-ся сразу 2 решения ($(x_0;8)$ и $(x_0;-8)$, например)

$8+\sqrt{a-49}$ $\quad -8\leq x$ $\quad -8\leq x$

$-8+\sqrt{\ }$ $\quad \sqrt{\ }$ $\quad 8+\sqrt{\ }$ $\quad 16$

Если $a<0$, то 0 решений

Если $a\in[0;49)$: $x=\pm 8$, $(|y|\pm 8)^2=a-49<0 \Rightarrow y\in\varnothing$

$y=\pm 8$ $\quad |x|=15+\sqrt{a}>15$, а по I ур-ию всегда $|x|\leq 8$

$a=49 \Rightarrow x=\pm 8$, $y=8+\sqrt{a+49}$ ~~>8~~ $\Rightarrow$ не подходит $\quad \cap \quad \cup$

$y=\pm 8$ — 4 решения не подходят

$a>49 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=8+\sqrt{a+49}>8 \\ y=-8-\sqrt{a+49}<-8 \end{array}\right.$, но $y\in[-8;8]$ — пр-ие $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y\neq 8+\sqrt{a+49} \\ y\neq -8-\sqrt{a+49} \end{array}\right.$

$y=8-\sqrt{a+49}$ $\quad$ если $8-\sqrt{a+49}\neq -8+\sqrt{a-49}$, то всего будет 4 решения $\Rightarrow$

$y=-8+\sqrt{a-49}$ $\quad 8-\sqrt{a-49}=-8+\sqrt{a+49} \Rightarrow 8=\sqrt{a+49} \Rightarrow a=15$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)