

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в папку.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

Решение 1) Цифры 2, 2, 5, 5, 7 и ~~единица~~ 3 единицы

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 2 \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

2) 4, 5, 5, 7 и 4 единицы

$$\frac{8!}{1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} = 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 12 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 30 \cdot 42 = 2460$$

Ответ: 2460.

№2

$$S = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}, \text{ т.к. все члены } > 0 \Rightarrow q > 0.$$

$$10S = \cancel{S} + 49(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) = S + 49(b_3 + b_3 q^3 + b_3 q^6 + \dots + b_3 q^{2997}) = S + 49 \frac{b_3(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1} = S + \frac{49 \cdot b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

$$\frac{49 \cdot b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{(q^3 - 1)(q^2 + q + 1)} = 9S = \frac{9 b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$\frac{49 q^2}{q^2 + q + 1} = 9$$

$$49q^2 = 9q^2 + 9q + 1$$

$$40q^2 - 9q - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{9 - \sqrt{241}}{80} \\ q = \frac{9 + \sqrt{241}}{80} \end{cases} \Rightarrow q = \frac{9 + \sqrt{241}}{80}$$

Jumlah omben = X , maka

$$S + (b_2 + \dots + b_{3000}) = XS$$

$$(b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) = (X-1)S$$

$$(b_2 + b_2 q^2 + b_2 q^4 + \dots + b_2 q^{2998}) = (X-1)S$$

$$\frac{b_2 (q^{2998} - 1)}{q^2 - 1} = (X-1)S$$

$$\frac{b_1 q (q^{3000} - 1)}{(q-1)(q+1)} = \frac{(X-1) b_1 (q^{3000} - 1)}{q-1}$$

$$\frac{q}{q+1} = X-1$$

$$\frac{q+1}{q} = \frac{1}{X-1}$$

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{X-1}$$

$$\frac{1}{X-1} = 1 + \frac{80}{9 + \sqrt{241}} = \frac{89 + \sqrt{241}}{9 + \sqrt{241}}$$

$$X-1 = \frac{89 + \sqrt{241}}{9 + \sqrt{241}}$$

$$X = \frac{98 + \sqrt{241}}{9 + \sqrt{241}}$$

$$\text{Jumlah: } \frac{98 + \sqrt{241}}{9 + \sqrt{241}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 4

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2|x-2| \geq 0$$

Пусть $x^2 = a$, $|x-2| = t$.

$$2a^2 - 3at + t^2 \geq 0$$

$$(t - 3/2 a)^2 - 1/4 a^2 \geq 0$$

$$(t - 3/2 a - 1/2 a)(t - 3/2 a + 1/2 a) \geq 0$$

$$(t - 2a)(t - a) \geq 0$$

$$(|x-2| - 2x^2)(|x-2| - x^2) \geq 0$$

1) $|x-2| - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = x-2, 2 < 0 \\ 2x^2 = 2-x \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$

2) $|x-2| - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x-2, 2 < 0 \\ x^2 = 2-x \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

1) Пусть $x \geq 2$

$$\underbrace{(x-2-2x^2)}_{2 < 0} \underbrace{(x-2-x^2)}_{2 < 0} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{R} \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2; +\infty)$$

2) $x < 2$

$$(2-x-2x^2)(2-x-x^2) \geq 0$$

$$-2 \sqrt{\frac{-1-\sqrt{17}}{4}}$$

$$-2 \sqrt{\frac{-1-\sqrt{17}}{4}}$$

$$-2 \sqrt{\frac{-1-\sqrt{17}}{4}}$$

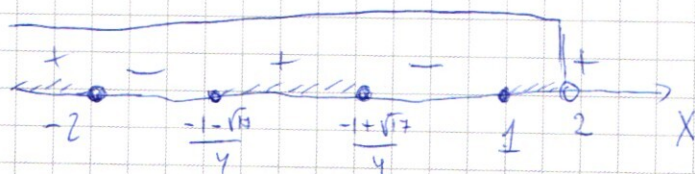
$$-2 \sqrt{\frac{-1-\sqrt{17}}{4}}$$

$$1 \sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{4}}$$

$$1 \sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{4}}$$

$$1 \sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{4}}$$

$$1 \sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{4}}$$



$$\Rightarrow x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [1; 2)$$

Объединив пункт 1 и 2 получаем: Ответ: $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [1; +\infty)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

$$1) x=6 \Rightarrow x^3 - 4x + 80 = 6^3 - 24 + 80 > 0 \Rightarrow x=6 - \text{решение}$$

$$2) x \neq 6$$

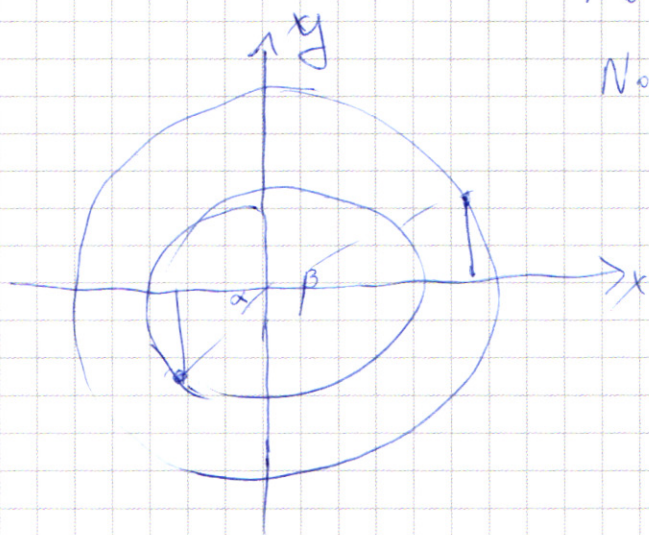
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ \frac{1}{2}(x^3 - 4x + 80) = (x+4)^2 \end{cases} (=)$$

$$\begin{cases} x > -4 \\ x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0 \end{cases}$$

15

$$M_0 = (-2; -2\sqrt{7})$$

$$N_0 = (5; 5\sqrt{7})$$



$$\rho(O; M_0) = \sqrt{4 + 28} = 2\sqrt{7}$$

$$\rho(O; N_0) = \sqrt{25 + 175} = 10\sqrt{2}$$

Значит

M_0, N_0, O лежат на одной прямой ℓ (т.к. $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \sqrt{7}$).
 При повороте ℓ на x° , α повернется на $10x^\circ$
 $180^\circ = 9x^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$ (через сколько градусов они в
 первый раз встретятся).

$360^\circ = 9x^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$ (через сколько градусов они
 будут встретиться после).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$100 = 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$

$$\underbrace{\underbrace{1}_3 \underbrace{1}_3} \underbrace{5}_5 \underbrace{2}_2 \underbrace{2}_2 \underbrace{5}_5 \underbrace{1}_3 \underbrace{7}_7 \Rightarrow \frac{9^3 \cdot 8!}{2! \cdot 2!} + \frac{9^4 \cdot 8!}{2!} - \frac{9^2 \cdot 8!}{2!}$$

$\begin{matrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 1 \end{matrix}$

4.
8
2, 2.
-4

1) 2, 2

2)	4
----	---

3) - 2, 2, 4

5 2 2 5 7

1) 4

A.

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!}$$

1) 2,2 1248

5, 5, 4, 2, 7

$$2) \quad b_1 + b_1 q + \dots + b_1 q^{2999} = b_1 \frac{(q^{3000} - 1)}{q - 1} = S$$

$$b, b, q, b, q^2, \dots, b, q^5, \dots, b, q^8$$

$$\text{#2 } b_3 + b_6 + \dots + b_{3000} = \frac{b_3 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{b_3 (q^3 - 1)}{q^3 - 1} = 105$$

$$\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1} = \frac{5q^2(q-1)}{q^3-1} = \frac{5q^3-5q}{q^3-1} = 1$$

$$4q(q^3 - 1) = 5q^3 - 5q \Rightarrow 4q^3 - 5q + 1 = 0 \Rightarrow q = 1 +$$

$$(q-1)(q^2+q+1)=0$$

$$\begin{array}{r} 9q^3 + q - 10 \overline{) 9q^4 - 1} \\ \underline{9q^4 - 9q^2} \\ 9q^2 + q - 1 \end{array}$$

在 2 处

$$(4q^2 + 4q - 1) = 0$$

$$\begin{array}{r} q^5 - 9q^2 \\ \hline 9q^2 + 9q + 9 \\ \hline -9q^2 - 9q \\ \hline 9q \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4q^3 - 5q + 1 \quad \bigg| \quad q - 7 \\ \underline{4q^2 - 4q} \\ -q + 1 \end{array}$$

$$5 = 4 + 4 - 3$$

$$g = \frac{b_3(0.9000 - 1)}{q^3 - 1}$$

$$q = \frac{-2 \pm \sqrt{4}}{2}$$

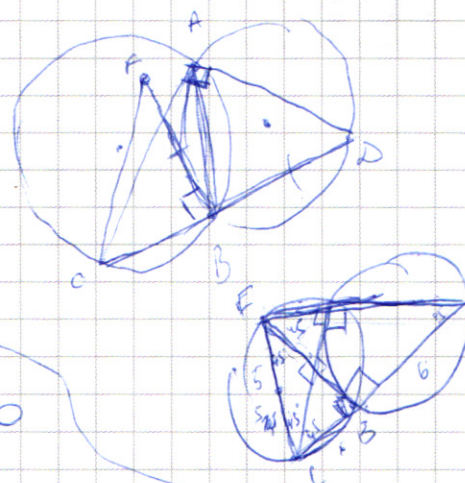
$$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2}$$

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 12 = 30 \cdot 82 = 2460$$



$$q > 0$$

$$S + \frac{49 \cdot 63 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = 10S$$

$$S + \frac{62 (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{7}{9} \times S$$

$$\frac{49 \cdot 63 \cdot q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1 (q^2 + 1)} = 9S = \frac{9 \cdot 62 (q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$\frac{62 (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = (x - 1) \cdot \frac{62 (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$$81 + 160 = 241$$

$$49q^2 = 9q^2 + 9q + 1$$

$$40q^2 - 9q - 1 = 0$$

$$q = \frac{9 \pm \sqrt{241}}{80} \Rightarrow \frac{9 + \sqrt{241}}{80}$$

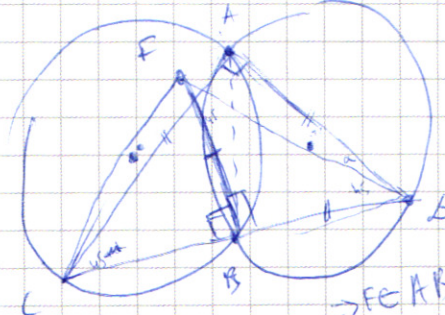
$$\frac{1}{x-1} = 1 + \frac{20}{9 + \sqrt{241}} = \frac{29 + \sqrt{241}}{9 + \sqrt{241}}$$

$$x - 1 = \frac{9 + \sqrt{241}}{29 + \sqrt{241}}$$

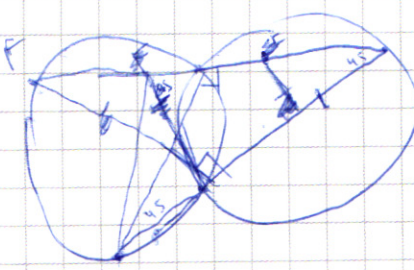
$$x = \frac{58 + 2\sqrt{241}}{69 + \sqrt{241}}$$

$$\frac{q}{q+1} = x - 1$$

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{x-1}$$



$\rightarrow FE \perp AB$
 $FE \perp AB$
 $FB \perp CD$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{q^2 + q^{3000} - 1}{q^5 - 1} = q^5$$

$$\frac{4963 (9^{3000} - 1)}{9^3 - 1} = 95$$

$$\frac{99 \cancel{9} 9^2 (9^{3000} - 1)}{9^{3000} - 1} = 99 = 9 \cdot 9 \cancel{9} (9^{3000} - 1)$$

$$\frac{4q \cdot q^2}{q^3 + (q-1)(q^2+q+1)} = \frac{3}{1q-1}$$

$$49q^2 = 9q^2 + 9q + 1$$

$$409^2 - 42 \cdot 99 - 1 = 0$$

$$b_1 q^2 \quad b_1 q^5 \quad b_1 q \quad \frac{q^4(q+1)}{q^2+q+1}$$

$$\Delta = 81 + 160 = 241$$

$$q = \frac{9 \pm \sqrt{241}}{80} \Rightarrow \frac{9 + \sqrt{241}}{80}$$

$$\frac{89 + \sqrt{241}}{9 + \sqrt{241}} = \frac{1}{x-1}$$

$$x-1 = \frac{9 + \sqrt{241}}{89 + \sqrt{241}} \Rightarrow x = \frac{98 + 2\sqrt{241}}{89 + \sqrt{241}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (x-6) \sqrt{\quad} = (x-6)(x+4)$$

$$\frac{1}{2} (\quad) = (x+y)^2 \quad | \cdot 2$$

$$3x^2 - 4x - 20 = 0$$

$$S + \frac{b_2(q^{2000}-1)}{q^2-1} = S$$

$$\frac{b_1 q (q^{5000} - 1)}{(q - 1)(q + 1)} = (x - 1) S = b_1 \frac{(q^{5000} - 1)}{q - 1}$$

$$\frac{9}{4+1} = 8(x-1)$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{1}{x-1}$$

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{13 \cdot 10^2 \cdot \cancel{10^3} (10^{3000} - 1)}{(10 - 1)(10^2 + 10 + 1)} \cdot \frac{1 + \frac{1}{10} = \frac{1}{10} - 1}{\cancel{10^3} (10^{3000} - 1)}$$

$$2^3 - 2^3 = 40 + 48 > 0$$

$$2^{27} - 18 - 60 + 48 < 0$$

$$80 = 2 \cdot 5 \cdot 2^3 = 2^6 \cdot 5$$

$g = 43$
 ~~$16 + 10 = 26$~~
 $2 + 23$
 $48 + 60$

$$1 + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

$$\begin{array}{r} -7 \\ \hline -128 \end{array} + 28 + 80 \quad \begin{array}{r} +6 \\ \hline -64 + 24 + 80 = 0 \end{array}$$

$$x($$

1) $x = -6$
2) $x = -6$

$$\sqrt{-2x^2 - 16x - 32} \quad \boxed{x+4}$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 - 16x - 32 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$x^2(x-2) - 4p(5x-12) + 32 = 0$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 |x-2| + 4 > 0$$

$$(2-x)(2+x) + 2x(x^2-2) - 3x^2 |x-2| > 0$$

$$2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2 |x-2| > 0$$

$$x^2 \sqrt{x-2}$$

$$t = |x-2| \quad x^4 \sqrt{x^2-4x+4}$$

$$2x^4 + t^2 - 3x^2 t > 0$$

$$2a^2 - 3at + t^2 > 0$$

$$(t - \frac{3}{2}a)^2 - \frac{1}{4}a^2 > 0$$

$$(t - \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}a)(t - \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a) = \frac{1}{4}(t-2a)(t-a) > 0$$

$$(|x-2| - 2x^2)(|x-2| - x^2) > 0$$

$$1) |x-2| - 2x^2 > 0 \Rightarrow 2x^2 = |x-2| \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = x-2 \Rightarrow 2x^2 - x + 2 = 0 \\ 2x^2 = 2-x \Rightarrow 2x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$2) |x-2| - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = |x-2| \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1-2 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0 \\ x^2 = 2-x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$3) |x-2| - 2x^2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} |x-2| - x^2 > 0 \\ |x-2| - x^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1) x > 2 \\ 2) x < 2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} |x-2| - 2x^2 < 0 \\ |x-2| - x^2 < 0 \end{cases}$$

$$-2 < \frac{-1-\sqrt{17}}{4} < \frac{-1+\sqrt{17}}{4} < 1$$

$$-2 < \frac{-1-\sqrt{17}}{4} < \frac{-1+\sqrt{17}}{4} < 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten solutions on grid paper for a physics problem involving vector addition and trigonometry.

Diagram 1 (Top Left): A geometric construction showing two circles of radius 5. A point A is on the intersection. A line segment AB is drawn, and a perpendicular is dropped from A to the horizontal line CD. The angle between the horizontal and AB is 45°.

Diagram 2 (Top Right): A right-angled triangle with legs 1 and 1, and hypotenuse $\sqrt{2}$. The angle between the horizontal and the hypotenuse is 45°.

Diagram 3 (Middle Left): A vector diagram in the complex plane. Vectors are represented as points on a circle of radius 5. The angle between two vectors is α . The resultant vector is shown.

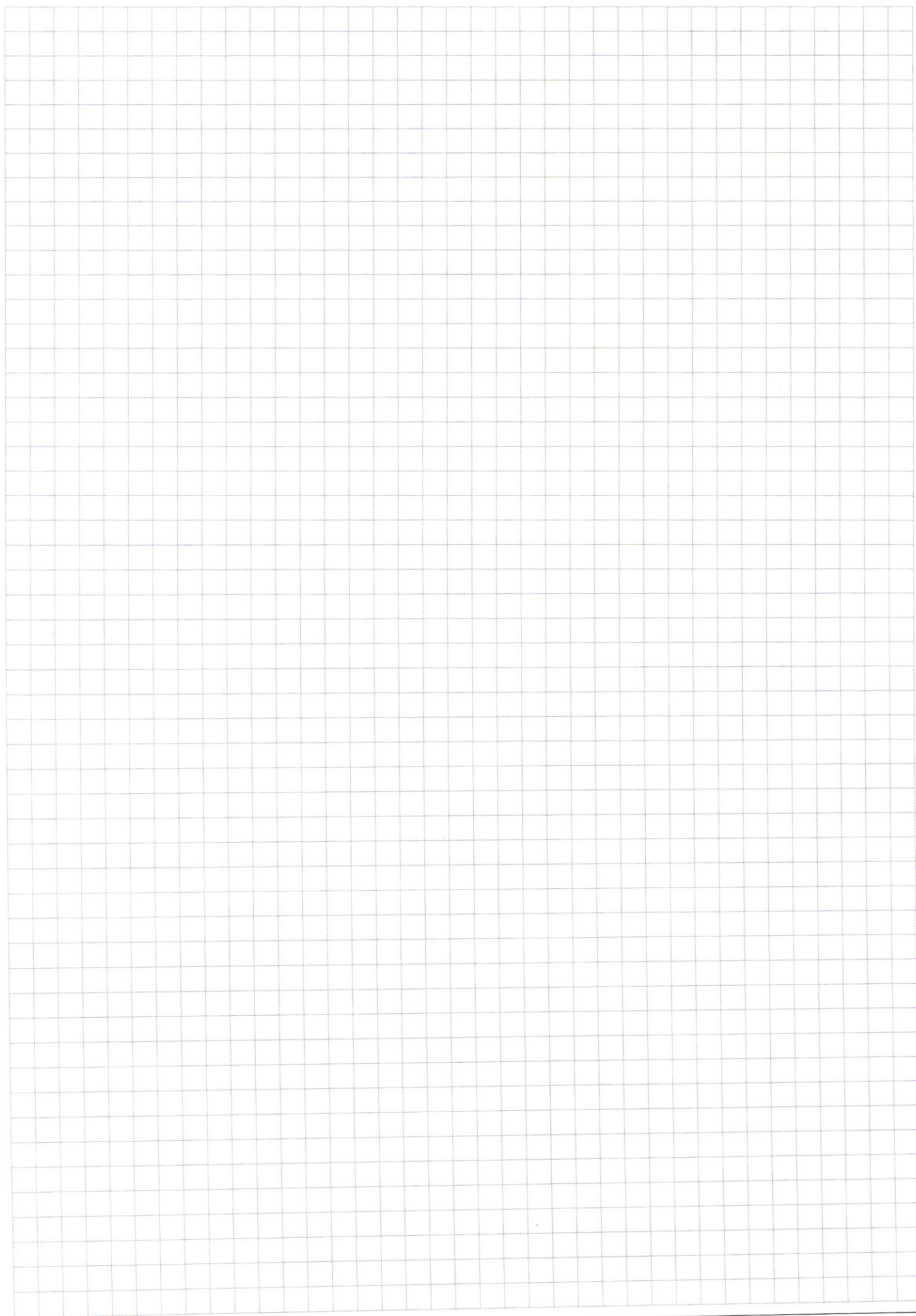
Diagram 4 (Middle Right): A vector diagram showing the addition of two vectors. The resultant vector is shown, and the angle between the original vectors is α .

Equations and Calculations:

- $\cos \alpha = \frac{4}{5}$
- $\sin \alpha = \frac{3}{5}$
- $\cos(\alpha + 45^\circ) = \cos \alpha \cos 45^\circ - \sin \alpha \sin 45^\circ$
- $\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{4}{5} - \frac{3}{5}) = \frac{\sqrt{2}}{10}$
- $\frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\alpha + 45^\circ < 90^\circ$
- $\sqrt{4 + 23} = 2\sqrt{2}$
- $\sqrt{25 + 45} = \sqrt{70} = 10\sqrt{2}$
- $2\pi \cdot 20 \rightarrow t$
- $2\pi \cdot 10\sqrt{2}$
- $20 + 40 \cdot 8 = 340$
- $20 + 40 \cdot 8 = 340$
- $2\pi \cdot \frac{\alpha}{360}$
- $\alpha = X$
- $2\sqrt{2} \alpha = X$
- $5\sqrt{2} \beta = X/2$
- $\frac{120}{9\pi} = 20$

Other Notes:

- $\frac{3}{4} V_0 = 2V_*$
- $t_B = 10 \text{ t. m.}$
- B, K, X_t
- Y_t
- $2\pi \cdot 20 \rightarrow t$
- $2\pi \cdot 10\sqrt{2}$
- $20 + 40 \cdot 8 = 340$
- $20 + 40 \cdot 8 = 340$
- $2\pi \cdot \frac{\alpha}{360}$
- $\alpha = X$
- $2\sqrt{2} \alpha = X$
- $5\sqrt{2} \beta = X/2$
- $\frac{120}{9\pi} = 20$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)