# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна $S$. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма $S$ увеличится в 10 раз. А как изменится $S$, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2;-2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5;5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках $A$ и $B$. На первой окружности выбрана точка $C$, а на второй – точка $D$. Оказалось, что точка $B$ лежит на отрезке $CD$, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к $CD$, проходящем через точку $B$, выбрана точка $F$ так, что $BF = BD$ (точки $A$ и $F$ расположены по одну сторону от прямой $CD$). Найдите длину отрезка $CF$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника $ACF$.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

© МФТИ, 2020

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b_3 + b_6 + \dots b_{3000} =$

$= q^2 b_1 + q^5 b_1 + q^8 b_1 + \dots + q^{2999} b_1 =$

$= \frac{q^2 b_1 \cdot ((q^3)^{1000} - 1)}{q^3 - 1}$

$\times 39$
$39$
$351$
$117$
$1521$

$49 \frac{q^2 b_1 \cdot ((q^3)^{1000} - 1)}{q^3 - 1} = 9 \cdot \frac{b_1 \cdot (q^{3000} - 1)}{q - 1}$

$= \frac{44}{80} = \frac{11}{20}$

$49 \frac{q^2}{q^3 - 1} = 9 \cdot \frac{1}{q - 1}$

$81$

$40 \cdot 4 \cdot 9 =$
$= 40 \cdot 36 =$
$=$

$q^3 - 1 = (q-1)(q^2 + q + 1)$

$\times 36$
$40$
$1440$

$49 \frac{q^2}{(q-1)(q^2+q+1)} = \frac{9}{q-1}$

$1440 + 81 =$
$= 1521 =$
$= 39^2$

$49 q^2 = 9q^2 + 9q + 9$

$40q^2 - 9q - 9 = 0$

$D = 81 + 1440 = 1521 = 39^2$

$q_1 = \frac{9+39}{80} = \quad q_2 = \frac{9-39}{80} < 0$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$$

$$(x+6)\sqrt{x^3-4x+80}=\sqrt{2}(x^2+10x+24)$$

$$\begin{array}{r|l} x^2+10x+24 & x+6 \\ -\,x^2+6x & x+4 \\ \hline 4x+24 & \\ -\,4x+24 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$x^2+4x+3=0$

$D=4+48=$

$=52$

$x_1=\frac{-2+\sqrt{52}}{}$

$x_2=$

$$\sqrt{x^3-4x+80}=\sqrt{2}\cdot(x+4)$$

$$x^3-4x+80=2\cdot(x^2+8x+16)$$

$$x^3-4x+80=2x^2+16x+32$$

$$x^3-2x^2-20x+48=0$$

$x=4.$

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-20x+48 & x-4 \\ -\,x^3-4x^2 & x^2+2x-12 \\ \hline -2x^2-20x & \\ -\,2x^2-8x & \\ \hline -12x+48 & \\ -12x+48 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

~~$-64-\ldots+80+48=0$~~

$64-\frac{2}{3}2-80+48=0$

~~$x_1+x_2+x_3=+2$~~

~~$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$~~

$32-80=-48+48=0$

~~$(x-4)(x^2+2x+12)$~~

$x^2+2x-12=0$

$x_1=$ $x_2=$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

| | |
|---|---|
| 700 | 2 |
| 350 | 2 |
| 175 | 5 |
| 35 | 5 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

1) $700 = 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 1\cdot 1\cdot 1$

$\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2}\cdot$

$1680 + 840 = 2520$

$C_3^8\cdot C_1^5\cdot C_2^4\cdot C_2^2 = 8\cdot 7\cdot 5\cdot 6\cdot 1 =$

5

2) $700 = 4\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$

$C_4^8\cdot C_2^4\cdot C_1^2\cdot C_1^1 = \cancel{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 2}}$ $2\cdot 7\cdot 5\cdot$

$\cdot 6\cdot 2\cdot 1 =$

$5\cdot 8 = 40$

$3^2 = 9$

5

1111 4557

$\frac{5\cdot 2^6}{2}$ 13 5

№2

$$S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$$

3

2 4 8 $\cancel{16}$

$b_1 \quad q b_1 \quad q^2 b_1$

$b_1 + b_2 + \ldots b_{3000} =$

$\cancel{b\ 9}$

$\cancel{5\ 15\ 45}$

$\frac{5 \cdot 5}{b_1 + b_2 + \ldots + b_{3000} +}$

$+ 49(b_3 + b_6 + b_9 + \ldots + b_{3000}) = 105$

$49(b_3 + \ldots b_{3000}) = 95$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$b_1 \quad \frac{11}{20} b_1 \quad \left(\frac{11}{20}\right)^2 b_1 \ldots$

$\cancel{S = b_1 \left(\frac{11}{20}\right)^n}$

$$S = \frac{b_1\left(\left(\frac{11}{20}\right)^{3000} - 1\right)}{\frac{11}{20} - 1} = \frac{b_1\left(1 - \left(\frac{11}{20}\right)^{3000}\right)}{\frac{9}{20}}$$

$$S_1 = b_2 + b_4 + \ldots + b_{3000} = \frac{\frac{11}{20} b_1\left(\left(\frac{11}{20}\right)^{3000} - 1\right)}{\left(\frac{11}{20}\right)^2 - 1}$$

$$\frac{S}{S_1} = \frac{\frac{b_1\left(\left(\frac{11}{20}\right)^{3000} - 1\right)}{\frac{11}{20} - 1}}{\frac{\frac{11}{20} b_1\left(\left(\frac{11}{20}\right)^{3000} - 1\right)}{\left(\frac{11}{20}\right)^2 - 1}} = \frac{\frac{1}{-\frac{9}{20}}}{\frac{\frac{11}{20}}{\left(\frac{11}{20}\right)^2 - 1}} = \frac{-\frac{20}{9}}{\frac{11}{20\left(\left(\frac{11}{20}\right)^2 - 1\right)}} = \frac{20 \cdot 20\left(1 - \frac{121}{400}\right)}{9 \cdot 11} = \frac{279}{9 \cdot 11} = \frac{31}{11}$$

$$S_1 = \frac{11}{31} S$$

$$S + S_1 = \frac{42}{31} S$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-1+\sqrt{19} > 16$

$\frac{-1+\sqrt{19}}{4}$ 20

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geq 0$

$2x^4+x^2-4x-3x^2(x-2)+4\geq 0 \ (x\geq 2)$

$2x^4+x^2-4x-3x^3+6x^2+4\geq 0$

$(2x^2+x-2)$

$x_1=0{,}5$

$x_2=5$

$2x^4+x^2-4x-3x^2(x-2)+4\geq 0$ $D=1+2\cdot 2\cdot 4\cdot 5=107$

$2x^4-x^3-2x^3+x^2+6x^2-3x-x+4\geq 0$

$x^3(2x-1)-x^2(2x-1)+3x(2x-1)-x+4\geq 0$

$(2x-1)(x^3-x^2+3x)-x+4\geq 0$

$\cancel{2x^4+x^2}$

$64-16+12$

$(x-1)(2x^3+5x^2-4)\geq 0$

$(x-1)(x+2)(2x^2+x-2)\geq 0$

$x\leq 2$

$2x^4+x^2-4x+3x^3-6x^2+4\geq 0$

$(x-1)($

$2x^2(x^2-3)$

$2x^3+5x^2-4 \,|\, x+2$; $2x^2+x-2$

$2x^3+4x^2$

$x^2-4$

$x^2+2x$

$-2x-4$

$\cancel{2x^4+x^2-4x+3x^3-6x^2} \,|\, x-1$; $2x^3$

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4 \,|\, x-1$; $2x^3+5x^2-4$

$2x^4-2x^3$

$5x^3-5x^2$

$5x^3-5x^2$

$-4x$

$2x^3+5x^2-4 \,|\, x-2$; $2x^2+9x$

$2x^3-4x^2$

$9x^2-4$

$9x^2-18x$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___ (Нумеровать только чистовики)

$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$

$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$

~~$2 \cdot 81 - 3 \cdot 27 + 7 \cdot 9 - 12 + 4 \geq 0$~~

$2 \cdot 16 - 3 \cdot 8 + 7 \cdot 4 - 8 + 4 \geq 0$

$3x^3 \geq 2x^4$

$3x \geq 2x$

$x \leq \frac{3}{2}$

$x^2 + y^2 = R$

$\frac{3^4}{2^3} - \frac{3^4}{2^3} + 7 \cdot \frac{3^2}{2^2} - 4 \cdot 6 + 4 \geq 0$

$4 + 4 \cdot 7 = 4 \cdot 8 =$
$= 32$

$25 + 25 \cdot 7 = 25 \cdot 8 =$
$= 200$

$3x^3 \geq 2x^4$

$x \leq \frac{3}{2}$

$x \geq 0$

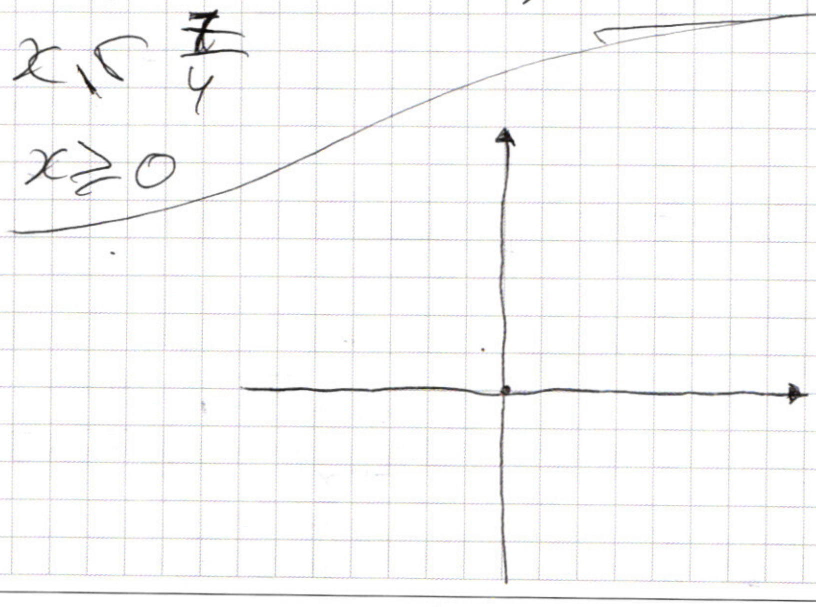
$7x^2 \leq 4x$

$4 \geq 7x$

$x \leq \frac{7}{4}$

$x \geq 0$

$x \geq 2$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12 \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$$

$x^2-16|x|+64+y^2-12|y|+36=a$

1) $y-6\geq 0,\ x\geq 0$

1) ~~$y-6\geq x,\ x\geq 0$~~

$y-6-x+y-6+x=12$

$2y-12=12$

$2y=24$

$y=12$

2) $y-6\geq x,\ x\leq 0$

$y\geq 0$

$y\leq 12$

3) $a\leq 0,\ b\leq 0$

$y-6-x+y-6+x=-12$

$2y-12=-12$

$x\leq 6$ и $y=0$

$x\geq -6$

4) $a\leq 0,\ b\geq 0$

$-y+6+x+y-6+x=12$

$x=6$

1) $\underbrace{y-6-x}_{a}\geq 0,\ \underbrace{y-6+x}_{b}\geq 0$

$2y-12=12$

$y=12,\ x\leq 6,\ x\geq -6$

2) $a\geq 0,\ b\leq 0$

$y-6-x-y+6-x=12$

$-2x=12$

$x=-6,\ y\geq 0,\ \leq 12$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1) $(|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a$

3) $(|x|-8)^2+36=a$

$x^2-16|x|+100=a$

$(|x|-8)^2+36=a$

$x^2-16|x|+100=a$

$x^2-16|x|+100=a$

$D=16^2-4(100-a)=0$

$256+400-a=0$

$a=656$

$4-2=2$

$4+2=6$

$x_1=\frac{16+\sqrt{D}}{2}$

$x_2=\frac{16-\sqrt{D}}{2}$

$\frac{16-\sqrt{D}}{2}<0$

$16-\sqrt{D}<0$

$-\sqrt{D}<-16$

$\sqrt{D}>16$

$\cancel{16^2+400-4a\geq 256}$

$400>4a$

$a<100$

$-160+4a\geq 0$

$4a\geq 160$

$a\geq 40$

$a\geq 100$

$16+\sqrt{D}\geq 0$

$\sqrt{D}\geq -16$

$D\geq 0$

$D\geq 0$

$D>16^2$

$656-4a\geq 0$

$-4a\geq -656$

$a\geq$

$656-4a\geq 0$

$656-4a<256$

$a<100$

$y^2-12|y|+36=a$

$y^2-12|y|+40-a=0$

$4(40-a)$

$D\geq 0$

$D>12^2$

$\sqrt{D}>12$

$y_1=\frac{12-\sqrt{D}}{2}$

$\frac{12+\sqrt{D}}{2}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$700 = 2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot7 = 4\cdot5\cdot5\cdot7$

$\overline{abcdefgh}$ — 8-е число.

$a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot f\cdot g\cdot h = 700$,

т.к. $a, b, c, \dots h$ — цифры, то $a, b, c, \dots h \leq 9$.

Тогда есть 2 варианта: когда число составлено из цифр — 1,1,1,2,2,5,5,7 или когда число составлено из цифр — 1,1,1,1,4,5,5,7. ~~Каждую цифру можно брать 1 раз всегда~~.

1) Вариантов расставить 3 единицы: $C_3^8$, расставить 2 двойки ~~$C$~~ после

Тогда кол-во чисел в 1 случае:

$C_3^8\cdot C_2^5\cdot C_2^3\cdot C_1^1 = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}\cdot\frac{5\cdot4}{2}\cdot\frac{3\cdot2}{2}\cdot1 =$

$= 8\cdot7\cdot5\cdot2\cdot3\cdot1 = 8\cdot7\cdot6\cdot5 = 1680$

(сначала выбираем 3 числа которые будут равны 1, потом из оставшихся 5 чисел выбираем 2 числа которые будут равны двойке, потом из 3 ост. — 2 числа которые равны 5 и оставшееся 1 число это 7).

№1 (продолжение)

Во 2 случае:

~~$C_4^8 \cdot C_2^4 \cdot C_2^2$~~ $C_4^8 \cdot C_1^4 \cdot C_2^3 \cdot C_1^1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot$

$\cdot 4 \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot 1 = 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot$

$\cdot 3 = 840$

Всего чисел, удовл. условию: $1680 + 840 =$

$= 2520$

Ответ: 2520.

№2.

$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{3000} = S$

$S = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$.

$b_2 = q b_1$

$b_3 = q^2 b_1$

$b_4 = q^3 b_1$

$\vdots$

$b_{3000} = q^{2999} b_1$

$b_3 + b_6 + \ldots + b_{3000} = S_1$

$b_6 = b_3 \cdot q^3$

$b_9 = b_3 \cdot q^6$

$b_{12} = b_3 \cdot q^9$

$\vdots$

$S_1 = \frac{b_3((q^3)^{1000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{b_1 \cdot q^2 \cdot (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$

По условию:

$S + 49 S_1 = 10 S$

$49 S_1 = 9 S$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолжение)

$$49 \cdot \frac{b_1 \cdot q^2 (q^{3000}-1)}{q^3-1} = 9 \cdot \frac{b_1 \cdot (q^{3000}-1)}{q-1}$$

$$49 \cdot \frac{q^2}{(q-1)(q^2+q+1)} = 9 \cdot \frac{1}{q-1}$$

$$49 \cdot q^2 = 9 \cdot (q^2+q+1)$$

$$40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$D = 81 + 40 \cdot 9 \cdot 4 = 1521 = 39^2$$

$$q_1 = \frac{9+39}{80} = \cancel{\frac{44}{80}} = \cancel{\frac{11}{20}} \quad \frac{48}{80} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$q_2 = \frac{9-39}{80} < 0$, а по усл. — $b_1 \geq 0$ (не подходит)

$b_2 \geq 0$

$\vdots$

$b_{3000} \geq 0$

$$S_2 = b_2 + b_4 + \ldots + b_{3000}$$

$$b_4 = q^2 \cdot b_2$$

$$b_6 = q^4 \cdot b_2$$

$\vdots$

$$S_2 = \frac{b_2 \cdot ((q^2)^{1500} - 1)}{q^2-1} = \frac{q b_1 \cdot (q^{3000}-1)}{q^2-1}$$

Найдем $\frac{S_2}{S}$:

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№2 (продолжение)

$$\frac{\frac{q b_1 (q^{3000}-1)}{q^2-1}}{\frac{b_1 (q^{3000}-1)}{q-1}} = \frac{q\cdot(q-1)}{q^2-1} = \frac{q}{q+1} = \frac{0{,}6}{1{,}6} =$$

$$= \frac{\frac{3}{5}}{\frac{8}{5}} = \frac{3}{8}$$

Тогда $S_1 = \frac{3}{8} S$

$S + S_1 = \frac{11}{8} S$

Ответ: увеличится в $\frac{11}{8}$ раз.

№3.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80} = x^2+10x+24$$

$$(x+6)\sqrt{x^3-4x+80} = (x+6)(x+4)\cdot\sqrt{2}$$

При $x=-6$ равенство выполняется.

$$\sqrt{x^3-4x+80} = (x+4)\cdot\sqrt{2}$$

$$x^3-4x+80 = (x^2+8x+16)\cdot 2$$

$$x^3-4x+80 = 2x^2+16x+32$$

$$x^3-2x^2-20x+48=0$$

Заметим, что при $x=4$ рав-во выполняется:

$64-32-80+48=0$

Тогда: $(x^3-2x^2-20x+48) = (x-4)(x^2+2x-12)$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

$x^2+2x-12=0$

$D=4+4\cdot 12=52$

$x_1=\frac{-2+2\sqrt{13}}{2}=\sqrt{13}-1$

$x_2=\frac{-2-2\sqrt{13}}{2}=-\sqrt{13}-1$

$x^3-2x^2-20x+48=0$ имеет 3 корня: $-4$, $\sqrt{13}-1$, $-\sqrt{13}-1$. Больше корней это уравнение не имеет, т.к. максимальная степень равна 3, а корней не более, ~~чем~~ чем макс. степень.

Ответ: $x=4$, $-6$, $\sqrt{13}-1$, $-\sqrt{13}-1$.

№4.

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geq 0$

Если $x-2\geq 0$, то:

$2x^4-3x^3+7x^2-4x+4\geq 0$

Заметим, что это неравенство верно для всех $x\geq 2$.

$2x^4\geq 0$

$2x^4\geq 3x^3$

$2x\geq 3$ (если $x\leq 0$, то нер-во верно.)

$x\geq\frac{3}{2}$, т.е. при $x\geq\frac{3}{2}$: $(2x^4-3x^3)\geq 0$.

№4 (продолжение)

$7x^2 \geq 0$

$7x^2 \geq 4x$ (при $x<0$ нер-во выполняется)

$x \geq \frac{4}{7}$, при таких $x$: $(7x^2-4x)\geq 0$

~~А т.к. x~~

А т.к. $x \geq 2$, то

$(2x^4-3x^3)+(7x^2-4x)+4 \geq 0$

Сумма з положительных чисел положительна.

Если $x-2<0$.

$2x^4+x^2-4x+3x^3-6x^2+4 \geq 0$

$2x^4+x^2-4x+3x^3-6x^2+4=(x-1)\cdot$

$\cdot(2x^3+5x^2-4)$

Также: $2x^3+5x^2-4=(x+2)(2x^2+x-2)$

$2x^2+x-2=0$

$D=1+4\cdot2\cdot2=17$

$x_1=\frac{\sqrt{17}-1}{4} > -2$ $(\sqrt{17}-1<8)$ $\quad \sqrt{17}-1<4$

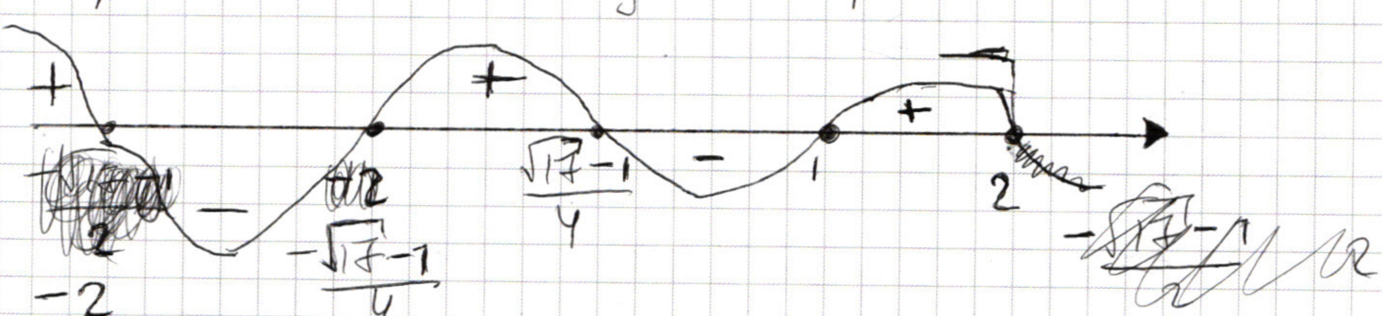
$x_2=\frac{-\sqrt{17}-1}{4} > -2$ $\quad \sqrt{17}<5$

$17<25$

$2x^4+x^2-4x+3x^3-6x^2+4=$

$=(x-1)(x+2)\cdot\left(x-\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)\left(2x+\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right)$

Применим метод интервалов:



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение)

$\cancel{-\left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right) < -2}$

$\cancel{-\sqrt{17}-1 < -4}$

$\cancel{-\sqrt{17} < -3}$

$x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-\sqrt{17}-1}{4}; \frac{\sqrt{17}-1}{4}\right] \cup$
$\cup [1; 2]$

Объединяя с 1 случаем получаем ответ:
$x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-\sqrt{17}-1}{4}; \frac{\sqrt{17}-1}{4}\right] \cup [1; +\infty)$.

№7.

Рассмотрим 4 случая:

1) $a \geq 0,\ b \geq 0$ $(a = y-6-x,\ b = y-6+x)$

$y-6-x+y-6+x=12$

$2y = 24$

$y = 12,\ x \geq -6,\ x \leq 6$

2) $a \geq 0,\ b \leq 0$

$\cancel{y-6-x+y}$

$y-6-x-y+6-x=12$

$x=-6,\ y \geq 0,\ y \leq 12$

3) $a \leq 0,\ b \geq 0$

$-y+6+x+y-6+x=12,\ x=6,\ y \geq 0,\ y \leq 12$

4) $a \leq 0,\ b \leq 0$

$y-6-x+y-6+x=-12$

$2y-12=-12$

$y=0,\ x \geq -6,$
$x \leq 6.$

В 1 случае: $y=12, x\geq -6, x\leq 6$

$(|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a$

$(|x|-8)^2+36=a.$

$x^2-16|x|+100=a$

В 4 случае: $y=0,\ -6\leq x\leq 6$

$(|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a$

$x^2-16|x|+100=a.$

Таким образом, если пара чисел $(12;x)$ яв-ся решением системы, то и пара $(0;x)$ — яв-ся решением. Поэтому $x^2-16|x|+100-a=0$ имеет 1 корень.

~~$x_1=$~~ Рассмотрим такой многочлен: $x^2-16x+100-a$. Его корни:

$x_1=\frac{16+\sqrt{D}}{2}$, где $D=256-4(100-a)$.

$x_2=\frac{16-\sqrt{D}}{2}$

Чтобы корень был 1, необходимо чтобы либо 1) $D=0$, либо 2) $x_2<-6$ ~~т.к. в каком случае не~~ и $x_1\leq 6$, либо 3) $x_2\geq -6$, а $x_1>6$.

1) $256-400+4a=0$

$4a=144$

$a=36.$

$x=\frac{16}{2}=8$, но $x\geq -6$ и $x\leq 6$.

Не подходит.

2) $x_1\leq 6$, но $x_1\geq 8$, т.к. $\sqrt{D}\geq 0$.

~~2) $x_2<-6$~~

~~$\frac{16-\sqrt{D}}{2}<-6$~~

~~$16-\sqrt{D}<-12$~~

~~$28<\sqrt{D}$~~

~~$D>784$~~

~~$256-400+4a\geq 484$~~

~~$a\geq 157$~~

~~такие $x_1\leq 6$~~

3) $\frac{16-\sqrt{D}}{2}\geq -6$

$16-\sqrt{D}\geq -12$

$\sqrt{D}\leq 28$

$\frac{16+\sqrt{D}}{2}>6$

$16+\sqrt{D}>12$

$\sqrt{D}>-4$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 (продолжение)

$\cancel{\frac{16+\sqrt{D}}{2} \le 6}$

$\cancel{16+\sqrt{D} \le 12}$

$\cancel{\sqrt{D} \le -4}$, ~~что невозможно.~~

3) $D \le 784$

$4a - 144 \le 784$

$a \le 232$, $a \ge 36$

(здесь должен быть текст со значком [1] см. след. страницу)

~~Поэтому в случаях 1 и 4 нет $a$, при которых многочлен $x^2 - 16|x| + 100 - a$ имеет корни, удовл. условию: $-6 \le x \le 6$.~~

Тогда рассмотрим случаи 2 и 3:

(2) $x = -6$, $y \ge 0$, $y \le 12$

$(|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a$

$4 + (|y|-6)^2 = a$

$y^2 - 12|y| + 40 - a = 0$

(3) $x = 6$, $0 \le y \le 12$

$(|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a$

$y^2 - 12|y| + 40 - a = 0$

Таким образом, если пара чисел $(y; -6)$ яв-ся решением системы, то и пара чисел $(y; 6)$ — тоже решение системы.

Аналогично случаям 1 и 4:

1) $D = 0$,

$144 - 4(40-a) = 0$

$144 - 160 + 4a = 0$

2) $y_2 \le 0$, $y_1 \le 12$

$\frac{12-\sqrt{D}}{2} \le 0$

№7 (продолжение)

$a = 4,$

$y = 6,$

удовл. усл.

3) $y_1 \geq 12$, $y_2 \geq 0$, $y_2 \leq 12$

$12 + \sqrt{D} \geq 24$

$\sqrt{D} \geq 12$

$4a - 16 \geq 144$

$4a \geq 160$

$a \geq 40$

$y_2 \leq 0$

$\frac{12 - \sqrt{D}}{2} \geq 0$

$12 - \sqrt{D} \leq 0$

$\sqrt{D} \geq 12$

$D \geq 144$

$144 - 440 + 4a \geq 144$

$a \geq 40$, также:

$\frac{12 + \sqrt{D}}{2} \geq 0$ (очевидно)

и

$\frac{12 + \sqrt{D}}{2} \leq 12$

$12 + \sqrt{D} \leq 24$

$\sqrt{D} \leq 12,$

но $\sqrt{D} \geq 12.$

~~В случаях 2 и 3 только $a = 4$ подходит.~~
~~Ответ: $a = 4$.~~

$12 - \sqrt{D} \geq 0$

$12 \geq \sqrt{D},$

$\sqrt{D} \geq 12, (y_1 \geq 12)$ не подходит.

Поэтому в случаях 2 и 4 подходит только $a = 4.$

[1] 3) также $x_2 \leq 6.$

$\frac{16 - \sqrt{D}}{2} \leq 6,$

$16 - \sqrt{D} \leq 12,$

$\sqrt{D} \geq 4,$

$D \geq 16,$

$4a - 144 \geq 16$

$4a \geq 160$

$a \geq 40.$

Поэтому в случаях 1 и 4 $a \in [40; 232]$

Ответ: 4 и $[40; 232]$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)