

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

I цифра - целые положительные числа $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ разложим их произведение на ⁸ множителей
 не превосходящие 10. Это можно сделать 2-мя
 способами

$$1) 4900 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$$

$$2) 4900 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$$

Заметим, что числа ^{множества} получившиеся из 1-го набора
 цифр не пересекаются со множеством чисел
 из 2-го набора $\Rightarrow$ общее число ~~способов~~ - сумма
 способов из обоих наборов.

II Посчитаем число уникальных чисел, которые
 можно составить из набора 1.

1 шаг: сделаем все элементы уникальными $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ у нас будет $P_8 = 8!$ перестановок.

Теперь заметим, что для каждой перестановки
 существует по $P_2 \cdot P_2 \cdot P_2 \cdot P_2 = 16$ перестановок,
 которые дают то же число (теперь цифры не уникальны)

$$\text{Итого } \frac{8!}{16} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{16} = \frac{360 \cdot 7}{16} = \frac{2520}{16} = 157.5$$

$$\text{Для 2-го набора Аналогично } \frac{P_3 \cdot P_2 \cdot P_2 \cdot P_1}{2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}{32} = \frac{24}{32} = 0.75$$

$$= 30 \cdot 56 = 1680 \text{ чисел, А суммарно } \frac{2520}{16} + \frac{24}{32} = 157.5 + 0.75 = 158.25$$

Ответ 4200 чисел

или

По с-ту геом. прогрессии

$$S = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

, где q - знаменатель прогрессии
 n - число эл-тов $n=3000$

Если увеличить каждый член в 40 раз то

S будет считаться, как старая сумма - сумма всех элементов с $n \div 3$ до изменения + сумма после изменения

Заметим, что числа $b_3, b_6, b_9, \dots, b_{3000}$ образуют прогрессию с тем же член $b_1 q^2$, знамен q^3 , кол-во $\frac{3000}{3} = 1000$

$$\text{тогда их сумма } S_3 = \frac{(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1} \cdot q^2 b_1 = \frac{q^{3000} - 1}{(q - 1)(q^2 + q + 1)} \cdot b_1 q^2 =$$

$$= S \frac{q^2}{(q^2 + q + 1)}$$

, Если каждый эл-т увеличить в 40 раз, то и сумма увеличится в 40 раз, итого

$$5S (\text{итог. сумма}) = S - S_3 + 40S_3$$

$$5S = 39S_3 = 39 \cdot \frac{q^2}{q^2 + q + 1} S$$

$$4q^2 + 4q + 4 = 39q^2$$

$$35q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$D_1 = 4 + 4 \cdot 35 = 144$$

$$q = \frac{2 \pm 12}{35}$$

все члены прогрессии положительны $\Rightarrow$
 $\Rightarrow q > 0 \Rightarrow \boxed{q = \frac{14}{35}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Теперь для случая с увеличением каждого
второго в 3 раза!

$$S_n = S - S_2 + 3S_2, \text{ где } S_n - \text{итоговая (искомая) сумма}$$

S_2 - сумма пер. эл-тов
на четных местах

$$S_n = S + 2S_2$$

$$S_2 = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^0 - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{1+1} S \rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n = S \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{1+1} \right) = \left(1 + 2 \cdot \frac{\frac{14}{35}}{\frac{14+35}{35}} \right) = \left(1 + \frac{4}{7} \right) =$$

$$= \frac{11}{7} \Rightarrow \text{Ответ увеличится в } \frac{11}{7} \text{ раз}$$

н4

Преобразуем левую часть: $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 =$

$$= 4x^4 + (x+2)^2 - 5x^2|x+2|, \text{ Заметим } (x+2)^2 = |x+2|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{заменит переменные } \begin{matrix} a = x^2 \\ b = |x+2| \end{matrix} \quad \left| \begin{matrix} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{matrix} \right.$$

$$\Rightarrow 4a^2 + b^2 - 5ab = (2a+b)^2 - ab$$

Заметим $2a-b \geq a$ - всегда
 $2a-b \geq b$ - 2 условия

если оба выполнены или оба не выполнены
это есть $a \geq b \Rightarrow \begin{matrix} 2a-b \geq a \\ 2a-b \geq b \end{matrix} \Rightarrow (2a-b)^2 \geq ab \Rightarrow$

$\Rightarrow (2a-b)^2 - ab \geq 0$ это и $\Rightarrow$ неравенство (исходное)
врно!

иначе $2a \leq b$ $a \leq b$
 $2a \leq 2b$ $a-b \leq 0$
 $2a-b \leq b$ $2a-b \leq a \Rightarrow (2a-b)^2 - ab < 0$

$\Rightarrow$ мы свели исходное неравенство
к $a \geq b$ или $x^2 \geq |x+2|$

I $x \geq -2 \Rightarrow |x+2| = x+2$ II $x < -2$

$x^2 \geq x+2$

$x^2 - x - 2 \geq 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$x \in \left[\frac{1-\sqrt{9}}{2}, \frac{1+\sqrt{9}}{2} \right]$

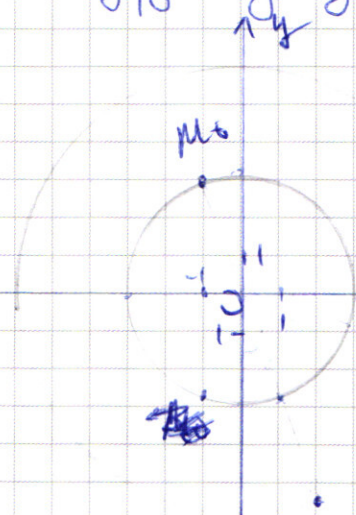
$x \in \left[\frac{1-3}{2}, \frac{1+3}{2} \right]$

$x \in [-1; 2] \quad (x \geq -2)$

$x \in [-2; -1] \cup [2; +\infty)$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus (-1; 2)$

Отметим $\mathbb{R} \setminus (-1; 2)$ (или $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$) - точки выписываем по порядку (зачеки само)



1) Найдем R:

$R^2 = x^2 + y^2$

$R_1 = \sqrt{(-1)^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3$

$R_2 = 6$

R_1 - радиус ок-ти караси

R_2 - пещеря

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть φ_1 и φ_2 - угол поворота до положения карася и пещеря соотв.

изначально $\varphi_1 = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ точки
 $\varphi_2 = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$

$M_0 (0;0)$ N_0 лежит на прямой $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$
т.е. точки M_0 и N_0 максимальны удалены
друг от друга.

Расстояние будет кратчайшим, если M, N -
текущие положения рыб будут лежать
на одной луге, исходящей из $(0;0)$

Теперь пусть ω_1 и ω_2 - угловые скорости
рыб (угол поворота в сг. времени)

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{v_1}{R_1} \\ \omega_2 = \frac{v_2}{R_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{R_2}{R_1} = 2.5 \cdot 2 = 5 \Rightarrow \omega_1 = 5\omega_2$$

↪ отношение скоростей рыб

Предположим мы нашли точку с крат. пути,
тогда следующее такое сближение будет
когда карась догонит обгонит на 1 круг (2π);

$$\omega_1 t = \omega_2 t + 2\pi, \quad \omega_2 t - \text{угол сдвига } 2\pi \text{ радиан} \rightarrow \Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{5-1} = \frac{\pi}{2}$$

Теперь найдем хотя бы одну точку касания;
нужно, чтобы касательная прошла Θ , а перпендикуляр $\Theta + \pi$

$$\omega_2 t = \Theta \Rightarrow \omega_1 t = 5\omega_2 t = \Theta \quad | \Rightarrow \quad \Theta = 5\Theta - \pi \Rightarrow \Theta = \frac{\pi}{4}$$

Тогда найдем новые координаты:

$$\varphi_2 = -\arccos\left(\frac{2}{3}\right) \text{ или } \Rightarrow \cos(\varphi_2) = \frac{2}{3} \quad \sin \varphi_2 = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos(\Theta + \varphi_2) = \cos \Theta \cos \varphi_2 - \sin \Theta \sin \varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3} \right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{10}}{3}$$

$$\sin(\Theta + \varphi_2) = \sin \Theta \cos \varphi_2 + \cos \Theta \sin \varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3} \right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{10}}{3}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2} + 4$$

$$y = \sqrt{2} - 4$$

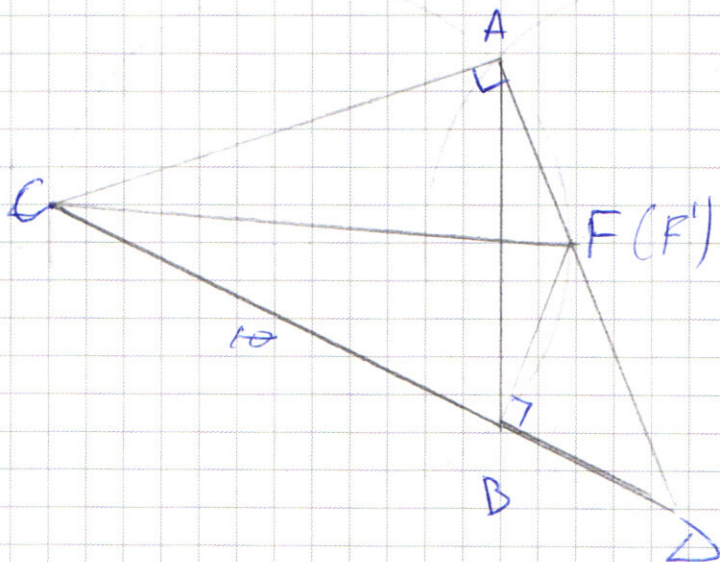
теперь нужно получить все

координаты $\Rightarrow$ нужно $(\Theta + \varphi_2) + \frac{\pi k}{2} \Rightarrow$

Ответ:

$\Rightarrow$ получаем точки $(\sqrt{2} - 4, \sqrt{2} - 4); (\sqrt{2} - 4, -\sqrt{2} - 4);$
 $(-\sqrt{2} - 4, -\sqrt{2} + 4); (4 - \sqrt{2}, \sqrt{2} + 4)$

и 6



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) В силу симметрии дуга AB касается
ок-ты радиус дуги AB второй ок-ты $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ на дугу AB опираются углы $\angle ACB$ и $\angle ADB$
 $\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB$ $\triangle ACD$ прямоугольный $\Rightarrow \angle C + \angle D =$
 $90^\circ \Rightarrow$ зная $\angle C = \angle D \Rightarrow \angle C = \angle D = 45^\circ \Rightarrow AC = AD$

2) Пусть F' - пересечение ок-ты с $AD \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle BF'D = 180^\circ - \angle AF'B$ как смежных 180° ;
 $AF'B$ опирается на ^{дугу} $AB \Rightarrow \angle AF'B = \angle AB$ (по хорде)
 $= 135^\circ \Rightarrow \angle BF'D = 45^\circ \rightarrow \triangle BF'D$ $\angle B = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ$
 $= 90^\circ$; $BF = BD \Rightarrow F$ совпадает с F'

$\angle ACF$ с $\angle AFD$ прямой $\Rightarrow$ опирается на диаметр $\Rightarrow$
 $\Rightarrow CF = R = 26$

Ответ: 26

По м. Пифагора: $BF = \sqrt{26^2 - 10^2} = BD = 24$

$FD = \sqrt{2} \cdot BD \Rightarrow AF = AD - FD$

$AD = AC = \frac{CD}{\sqrt{2}}$

$$S = \frac{AC \cdot AF}{2} = \frac{AC(AC - FD)}{2} = \frac{AC \cdot \frac{CD}{\sqrt{2}} \left(\frac{CD}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}BD \right)}{2}$$

$= 119$

Ответ: 119

№7

где $y = x$ $|y + x + 8| + |y + x + 8| = 16$

I $\begin{cases} y \geq x - 8 \\ y \geq -x - 8 \end{cases} \Rightarrow y = 0$

II $\begin{cases} y \geq x - 8 \\ y \leq -x - 8 \end{cases} \Rightarrow x = -8$

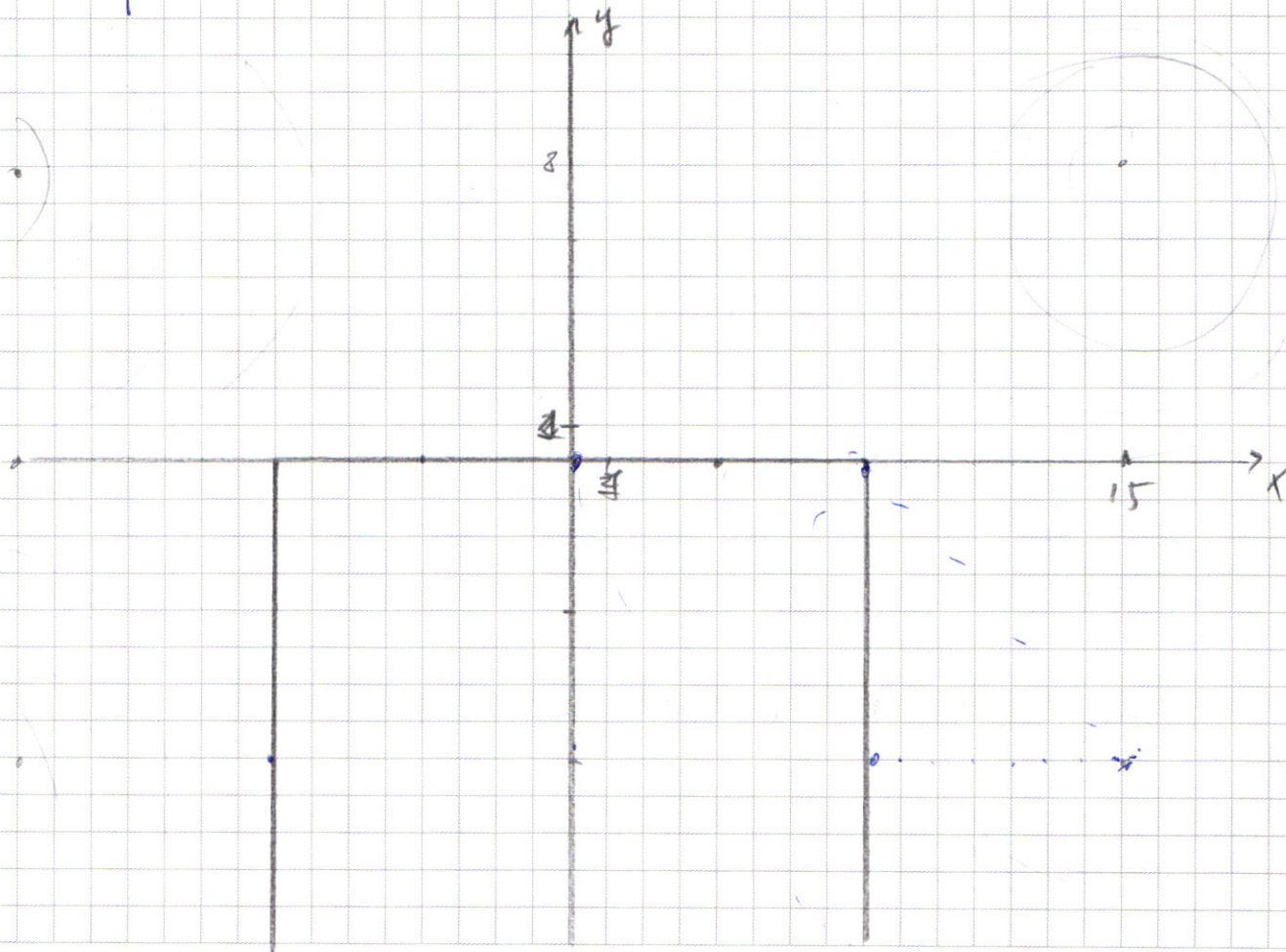
III $\Rightarrow x = +8$

IV $\Rightarrow y = -16$

- квадрат
со стороной 8/6
центров в $(0, -8)$

II $(|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = 9$ - часть ок-ты

$(x - 15)^2 + (y - 8)^2 = 9$ из 4-х сегментов симм.
отраженная по Ox и Oy



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ок-ты с меняющимися $\dot{z} = a^2$

2 корня

1) укажут окты касаются квадрата

$$a = 49$$

2) все окты имеют корни $(0,0)$; + корень $(0,18)$

$$a = 15^2 + 8^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$$

Ответ: 49, 225

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\frac{1}{\sqrt{8}} (x+10) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4)$$

$x = -10$ не подходит т.к. $x^3 - 64x + 200 < 0$, $x = -10$

$$\Rightarrow \sqrt{x^3 - 64x + 200} = \sqrt{8} (x-4) \quad \text{так как } x \geq 4$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 \leq 0$$

$x = 6$ подходит $\Rightarrow$ среди делителей св. числа
даже факл. как мы-то

$$(x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0$$

$$x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$\Delta_1 = 1 - 1/2 = 1/2$$

$$X = 1 \pm \sqrt{13}$$

$$1 - \sqrt{13} \notin \mathcal{O}_K$$

$$1 + \sqrt{13} \in \mathcal{O}_K \quad 1 + \sqrt{13} = 4 \in \mathcal{O}_K$$

$$\mathcal{O}_K = \{G, 1 + \sqrt{13}\}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[illegible]

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\sqrt{2}}{4} (x+10) \sqrt{x^3 - 64x - 1200} = \frac{(x+10)(x-4)}{x^2 + 4}$$

$-1000 + 640 + 1200$

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

$-100 + 640$
 100
 4
 $16 - 24$

$\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$8(x^2 - 64)$
 -4
 $-64 + 128$
 $64 = 264$

$(x-4)^2 = 64$
 $2x^2 - 8x + 16 = 8$
 $2x^2 - 8x + 8 = 0$
 $x^2 - 4x + 4 = 0$
 $(x-2)^2 = 0$
 $x = 2$

$x(x-8)(x+8) = 1200 + 4 = 1204$
 $8(x^2 - 4)^2$
 $125 - 80$
 $8 \cdot 9096$

$$64 - 128 + 200 \quad x^3 - 64x - 1200 = (x^2 - 8x + 16) \cdot 8$$

$$x^3 - 8x^2 + 128x - 1200 = 0$$

$8^3 - 64 \cdot 8$
 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x(x^2 - 64) + 200$
 $200 = 56 + 9$
 $36 + 9 = 45$

$x^3 = 8(x^2 + 9)$
 $81 = 81$
 1000
 9^3
 125
 4
 64
 $8 \cdot 109$
 $8 \cdot 25$
 $8 \cdot 18^2 \cdot 2$
 $8 \cdot 10$
 80
 8

$8 \cdot 109$
 25
 34
 $8 \cdot 25$
 3^3
 109
 872
 $8 + 1$
 9
 9^3
 $9 \cdot 8$

729
 10
 1000
 9^3
 125
 4
 64
 $8 \cdot 109$
 $8 \cdot 25$
 $8 \cdot 18^2 \cdot 2$
 $8 \cdot 10$
 80
 8

$8 \cdot 109$
 25
 34
 $8 \cdot 25$
 3^3
 109
 872
 $8 + 1$
 9
 9^3
 $9 \cdot 8$

$8 \cdot 109$
 25
 34
 $8 \cdot 25$
 3^3
 109
 872
 $8 + 1$
 9
 9^3
 $9 \cdot 8$

