

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~1

При разложении на простые множители $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

=> при разложении 700 на произведение цифр:

$$1) 700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \text{ либо } 2) 700 = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

в 1) случае расставить цифры можно $\frac{7 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 1680$

в 2) случае расставить цифры можно $\frac{7 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5}{2!} = 840$

=> всего чисел удовлетворяющих условию $= 1680 + 840 = 2520$

Ответ: 2520

~2

Т.к. $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$ - члены геометрической прогрессии, то их можно представить как $d, qd, q^2d, \dots, q^{2999}d$.

По условию $b_1 + b_2 + \dots + b_{3000} = d + qd + q^2d + \dots + q^{2999}d =$

$$= \frac{d(q^{3000} - 1)}{q - 1} = S \text{ Так же по условию } b_1 + b_2 + 50b_3 + b_4 + b_5 + 50b_6 + \dots + 50b_{3000} = S + 49(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) = S + 49(q^2d + q^5d + \dots + q^{2999}d)$$

$$= S + 49 \cdot \frac{q^2d(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = 10S$$

$$\Rightarrow 49 \cdot \frac{q^2d(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = 9S \Rightarrow \frac{q^2d(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} \cdot \frac{49}{9} = S = \frac{d(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{q^2d(q^{3000} - 1)49}{(q^3 - 1)9} = \frac{d(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$\frac{49}{9} \cdot \frac{q^2}{q^3 - 1} = \frac{1}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

$$\frac{49}{9} \cdot \frac{q^2}{q^2 + q + 1} = 1, \Rightarrow 49q^2 = 9(q^2 + q + 1) \Rightarrow 40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$q = 0,6 \quad q = -0,75$$

не подходит, т.к. по условию все члены прогрессии > 0

$$\Rightarrow q = 0,6$$

По условию найдите как изменится сумма элементов, если все элементы на ~~этих~~ ^{этих} местах увеличить в 2 раза: т.е

$$\frac{b_1 + 2b_2 + b_3 + \dots + 2b_{3000}}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000}} = \frac{S + b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}}{S} = \frac{S + qd + q^3d + \dots + q^{2999}d}{S}$$

$$= \frac{S + qd + q^3d + q^5d + \dots + q^{2999}d}{S} = \frac{\frac{d(q^{3000} - 1)}{q - 1} + \frac{qd(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}}{\frac{d(q^{3000} - 1)}{q - 1}} =$$

$$= 1 + \frac{q}{q + 1} = 1 + \frac{0,6}{1,6} = 1 + 0,375 = 1,375$$

Ответ: увеличится в 1,375 раза.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24 \quad \sim 3$$

$$(x + 6)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x + 6)(x + 4) \cdot \sqrt{2}$$

$$x = -6$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2} \cdot (x + 4),$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2(x^2 + 8x + 16),$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32,$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & 20 & 48 \\ 4 & 1 & 2 & 12 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0,$$

$$(x - 4)(x^2 + 2x - 12) = 0, \Rightarrow x = 4$$

$$x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$x_1 = \sqrt{13} - 1 \quad x_2 = -\sqrt{13} - 1$$

Проверка:

При $x = -6$ $x^3 - 4x + 80 = -216 + 24 + 80 < 0 \Rightarrow$ корень не подходит

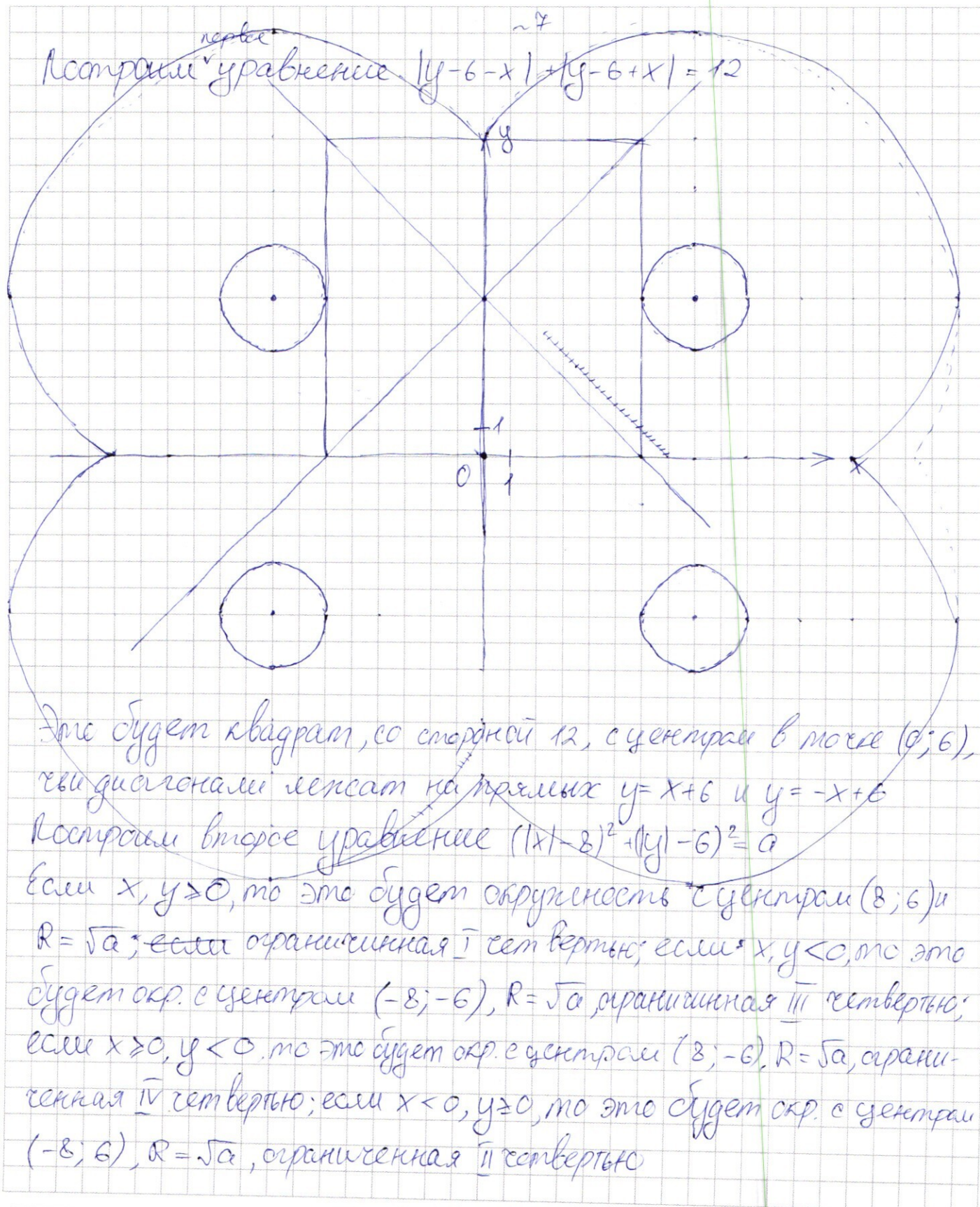
При $x = 4$ $\left(\frac{4}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{64 - 16 + 80} = (4 + 6)(4 + 4) \Rightarrow$ подходит

При $x = \sqrt{13} - 1$ $\left(\frac{\sqrt{13}-1}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{(\sqrt{13}-1)^3 - 4(\sqrt{13}-1) + 80} = (\sqrt{13}+5)(\sqrt{13}+3) \Rightarrow$ подходит

При $x = -\sqrt{13} - 1$ $\left(\frac{-\sqrt{13}-1}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{(-\sqrt{13}-1)^3 + 4(\sqrt{13}+1) + 80} \neq (5-\sqrt{13})(3-\sqrt{13}) \Rightarrow$ не подходит

Ответ: $x = \{4; \sqrt{13} - 1\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Если $R < 2$, то никакая из окружностей не пересекает квадрат $\Rightarrow$ верней нет.

Если $R = 2$, то окружности выше оси x касаются стороне квадрата, а нижние окружности не касаются $\Rightarrow$ всего 2 корня и этот случай подходит $\Rightarrow \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$

При $R \in (2; 2\sqrt{5})$, то в двух где верхние окружности пересекают квадрат в двух точках, а две нижние не будут его пересекать. Если $R \in [2\sqrt{5}; 10)$ верхние окружности будут пересекать квадрат в двух точках, а нижние по одной, но они будут совпадать с точками пересечения верхних окр. $\Rightarrow$ во всех этих случаях будет 4 корня и он не подходит

Если $R = 10$, то верхние окружности пересекут квадрат в 2 точках, а нижние в 1 а именно но она будет совпадать с одной из точек верхних окр $\Rightarrow$ всего корней 2 и случай подходит $\Rightarrow \sqrt{a} = 10 \Rightarrow a = 100$

При $R > 10$ ни одна окружность не пересечет квадрат $\Rightarrow$ корней нет и случай не подходит.

Ответ: при $a = 4$ и 100 .

~ 5

Зная координаты точек M_0 и N_0 можно найти радиусы окр. по которым движутся водолерка и жук R_1 и R_2 соответственно. $R_1 = T \cdot k$ их общий центр в точке $(0; 0)$

$$R_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot 4 = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}, \quad R_2 = \sqrt{5^2 + 5^2} \cdot 7 = 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

Найдем отношение их круговых скоростей $\frac{\omega_1}{\omega_2}$

$$\omega = \frac{v}{R}, \text{ по условию } v_1 = 2v_2 \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2v_2}{R_1} \cdot \frac{R_2}{v_2} = \frac{2R_2}{R_1} = \frac{2 \cdot 10\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 5$$

$\Rightarrow$ за один пройденный круг жука, водолерка проходит 5 кругов.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

=> всего будет 5 случаев, когда водомерка и пук
будут на одной прямой проходящей через $(0;0)$, при этом
это они летят в одной четверти, а именно в этой
координатной системе расстояние между минимально.

Заметим, что M_0 и N_0 летят на прямой $y = \sqrt{7}x$

=> в начале каскалы были диаметрально противоположны
и между тем, чтобы водомерка достигла пуга, ей нужно
пройти половину круга, т.е. π . => скорость сближения

$$= \frac{\omega_1 - \omega_2}{\pi} = \frac{4\omega_2}{\pi} = \omega_1 - \omega_2 = 4\omega_2$$

=> водомерка достигла пуга за $\frac{\pi}{4\omega_2} = \frac{\pi \cdot t_2}{4 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{8}} = \frac{1}{8} t_2$

а за это время пук успел пройти $\omega_2 \cdot \frac{t_2}{8} = \frac{2\pi \cdot t_2}{t_2 \cdot 8} = \frac{\pi}{4}$

т.е. четверть окр. => на тот момент пук и водомерка
были на прямой $y = -\frac{x}{\sqrt{7}}$. $x^2 + y^2 = R_2^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{x^2}{7} = 200 \Rightarrow \frac{x^2}{7} = 25 \Rightarrow x^2 = 175 \Rightarrow x = -5\sqrt{7} \quad y = 5$$

следующая встреча каскалов будет через $\frac{2\pi}{5}$

ответ: $(-5\sqrt{7}; 5)$

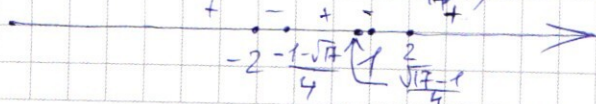
~ 4

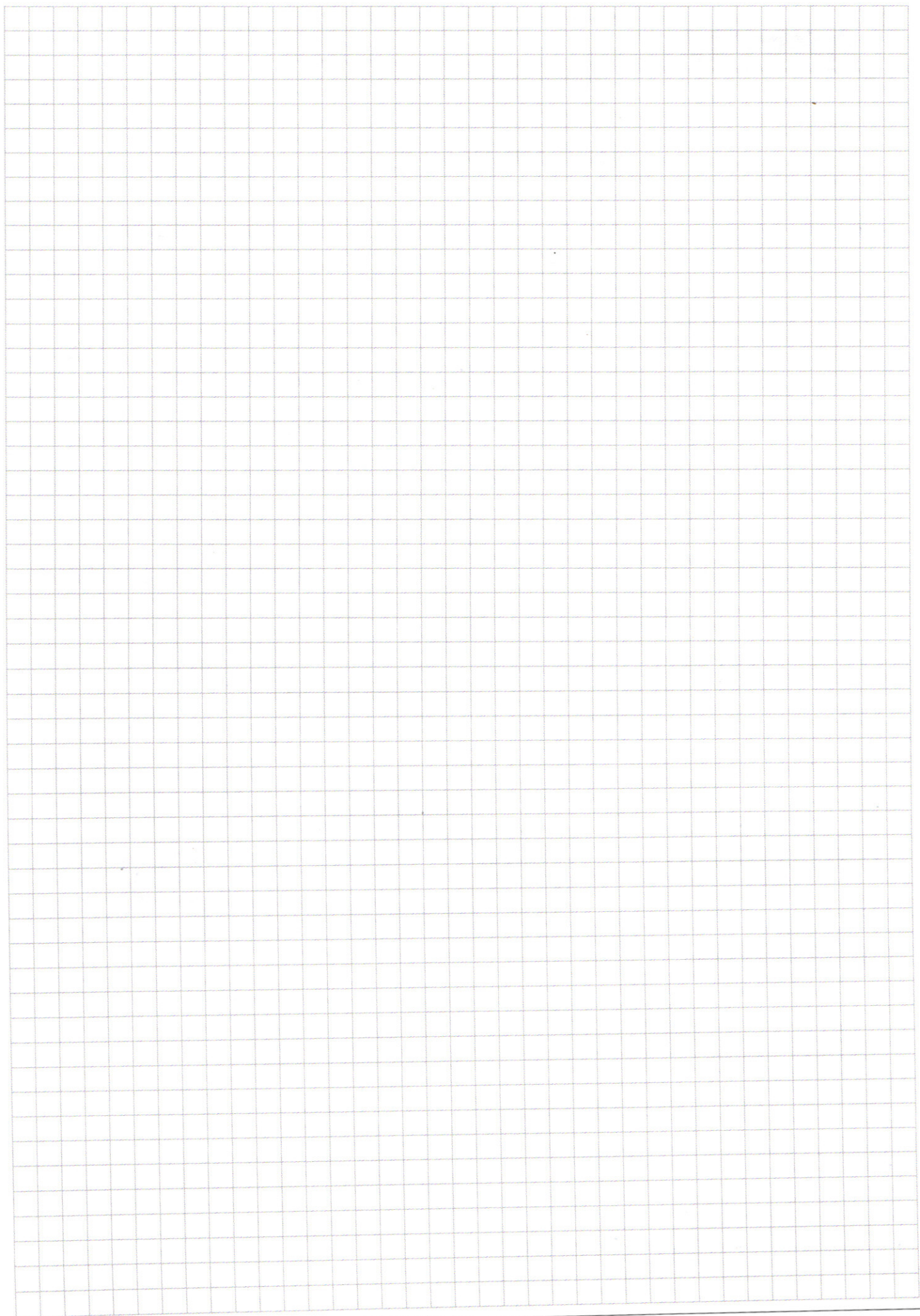
х > 2:

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0,$$

$$(x-1)(x+2)\left(x + \frac{1+\sqrt{7}}{4}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{7}}{4}\right) \geq 0$$





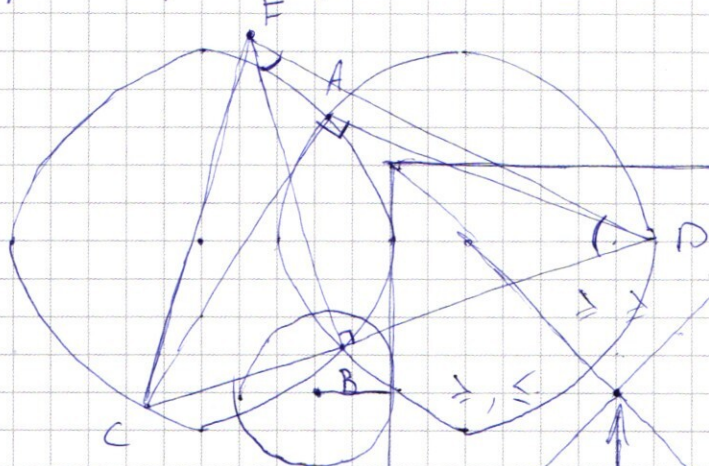
☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$49d + qd + q^4d +$$

$$qd + q^3d + q^5d + \dots + q^{2999}d$$



$$BF = BD$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$BF = BD$$

$$FD \perp CD$$

$$CF = ?$$

$$R = 5 = R_1 = R_2$$

$$\leq, \geq$$

$$y = 6 + x$$

$$y = -x + 6$$

$$\geq, \geq$$

$$y - 6 - x + y - 6 + x = 12$$

$$2y - 12 = 12,$$

$$y = 12$$

$$\leq, \leq$$

$$x + 6 - y - x + 6 - y = 12$$

$$2x - 12 = 0$$

$$6 - 6 - 6 \quad 6 - 6 + 6$$

$$y - x + 6 - y + y - 6 + x = 12$$

$$2x = 12$$

$$-6 \quad y - 6 - x - x + 6 - y = 12$$

$$-2x = 12$$

$$x, y \geq 0 \quad y = k$$

$$x, y < 0 \quad x^2 + k^2$$

$$(x + 8)^2 + (y + 6)^2 = a$$

$$x \geq 0 \quad y < 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 6)^2 = a$$

$$x < 0 \quad y \geq 0$$

$$(x + 8)^2 + (y - 6)^2 = a$$

$$400 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2! \cdot 2!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 8 \cdot 30 \cdot 7 = 8 \cdot 210 = 1680$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2!} = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 8 \cdot 7 \cdot 15 = 28 \cdot 30 = 840 + 1680 = 2520$$

$$\begin{array}{r} 1680 \\ + 840 \\ \hline 2520 \end{array}$$

$$C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^1 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 4$$

$$\begin{array}{r} \text{МОНОКО} \\ \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \\ \begin{array}{r} 210 \\ \times 8 \\ \hline 1680 \end{array} \end{array}$$

$$2(b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) = 2(qd + q^3d + q^5d + \dots + q^{2999}d)$$

$$b_2 + b_4 + b_{3000} = \frac{b_2(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{qd(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$$b_3 + b_6 + b_9 + \dots = \frac{b_3(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

$$\frac{49}{9} \cdot \frac{q^2d(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{d(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$\frac{49}{9} \cdot \frac{q^2}{q^3 - 1} = \frac{d}{q - 1}$$

$$\frac{49q^2}{9(q^3 - 1)} = \frac{1}{q - 1}$$

$$49q^2 = 9(q^3 - 1)$$

$$49q^2 = 9q^3 - 9$$

$$40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$D = 81 + 40 \cdot 9 \cdot 4 = 9(9 + 40 \cdot 4) = 9 \cdot 169$$

$$\sqrt{D} = 3 \cdot 13 = 39$$

$$q = \frac{9 \pm 39}{80} = \frac{48}{80} = 2 \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$\frac{qd(q^{300} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{q}{q + 1} \cdot \frac{d(q^{300} - 1)}{q - 1} = \frac{0.6}{1.6} \cdot 5 = \frac{6}{16} \cdot 5 = \frac{3}{8} \cdot 5 = 0.375 \cdot 5$$

$$0.375 \cdot 5 \Rightarrow \text{Answer: } 1.375$$

$$C_3^2 = \frac{3}{1} = 3$$

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$C_4^2 \cdot C_2^2$$

МОНО
МОНО
МОНО
МОНО
МОНО
МОНО

$$\frac{9 - 39}{40} = -\frac{30}{40} = -0.75$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a. b. c. . . $g = 700$

700 | 2

$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

350 | 2.5

ушифры: $700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1^3$

70 | 2

$700 = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1^4$

35 | 5

7 | 7

1 | 1

360 | 5

$C_8^2 \cdot C_8^2 \cdot C_8^1 = 49 \cdot 2^7$

$372 = \frac{8!}{6!2!} \cdot \frac{8!}{6!2!} \cdot \frac{8!}{7!} = 28 \cdot 28 \cdot 8 = 6252$

$8 \cdot 8 \cdot 28 = 64 \cdot 28 = 1792$

$\begin{array}{r} \times 64 \\ 28 \\ \hline 512 \\ + 28 \\ \hline 1792 \end{array}$

160

- 72

$108 = 518044$

ответ: 8044

$b_1 + b_2 + \dots + b_{3000} = 5$

$b_1 + b_2 + 50b_3 + b_4 + b_5 + 50b_6 + \dots + 50b_{3000} = 10S$

$d + qd + q^2d + q^3d + \dots + q^{2999}d = \frac{d(q^{3000} - 1)}{q - 1}$

$10S = S + 49(q^2d + q^5d + \dots + q^{2999}d)$

$49(q^2d + q^5d + \dots + q^{2999}d) = 9S$

$7^2(q^2d + q^5d + \dots + q^{2999}d) = 9S$

$7^2 \cdot \frac{q^2d(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = 9S$

49

$R_1 = \sqrt{4 + 4 \cdot 7} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$

$R_2 = \sqrt{25 + 25 \cdot 7} = 5\sqrt{1 + 7} = 10\sqrt{2}$

$\omega = \frac{U}{R} \quad \omega_1 = \frac{2U}{R_1} \quad \omega_2 = \frac{2U}{R_2}$

$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2U \cdot R_2}{R_1 \cdot U} = \frac{2R_2}{R_1} = \frac{2 \cdot 10}{4} = \frac{10}{2} = 5$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

$$(x+6)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(x+6)(x+4),$$

$$x = -6$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(x+4)$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2(x^2 + 8x + 16)$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0,$$

$$(x-4)(x^2 + 2x - 12) = 0,$$

$$(x-4)(x+1+\sqrt{13})(x+1-\sqrt{13}) = 0 \quad D = 4 + 48 = 52 \quad \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

проверите!!!

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = -1 \pm \sqrt{13}$$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^2 | x-2 | + 4 \geq 0$$

$$x \geq 2$$

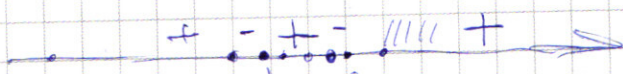
$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^2 - 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0,$$

$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) - \sqrt{13} \cdot 13 - 3 \cdot 13 = -216$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2 + x - 2) \geq 0 \quad D = 1 + 16 = 17 \quad \sqrt{17} = 4.123$$

$$(x-1)(x+2)\left(x + \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right) \geq 0 \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$



$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0,$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$x \leq 2$$

$$-3-1$$

$$27-$$

$$3^3 = 9$$

$$1 > \sqrt{13} - 1 >$$

$$\sqrt{9} - 1 > 2$$

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 2 & 3 & -5 & -4 & 4 & 36 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 3 & & \\ -2 & 2 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{4 + 48} \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$-\sqrt{13} \cdot 13 - 3 \cdot 13 = -216$$

$$D = 1 + 16 = 17 \quad \sqrt{17} = 4.123$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{17}-1}{4} > \frac{\sqrt{16}-1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 2 & 3 & -5 & -4 & 4 & 36 \\ 2 & 2 & 1 & 9 & 16 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 2 & 3 & -5 & -4 & 4 & \\ 2 & 2 & 1 & 9 & 16 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 2 & 3 & -5 & -4 & 4 & \\ 2 & 2 & 1 & 9 & 16 & \end{array}$$