

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{3000}$ где $b_n = b_1 q^{n-1}$ где $b_1 > 0$ $q > 0$

$$S = b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

после трансформации разделим прогрессию на 3 части

$$S_1 = b_1 + b_4 + b_7 + \dots + b_{2998} = b_1 \cdot \frac{(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1} = b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1}$$

$$S_2 = b_2 + b_5 + \dots + b_{2999} = b_2 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} = b_1 q \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1}$$

$$S_3 = 50(b_3 + b_6 + \dots + b_{2997} + b_{3000}) = 50b_3 \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} = 50b_1 q^2 \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1}$$

из условия имеем

$$S_1 + S_2 + S_3 = 105 \quad \text{после подстановки значений и упрощения имеем}$$

$$10b_1 \frac{10}{q-1} = \frac{1}{q^3-1} + \frac{q}{q^3-1} + \frac{50q^2}{q^3-1} = \frac{50q^2 + q + 1}{(q-1)(q^2+q+1)}$$

$$10q^2 + 10q + 10 = 50q^2 + q + 1$$

$$40q^2 - 9q - 9 = 0 \quad \text{минус не будем брать, т.к. } q > 0$$

$$q = \frac{9 + \sqrt{9^2 + 4 \cdot 40 \cdot 9}}{80} = \frac{9 + \sqrt{9(9 + 160)}}{80} = \frac{9 + 3 \cdot 13}{80} = \frac{48}{80} = \frac{3}{5}$$

если трансформируем по второму методу, разделим сумму на 2 части

$$S_4 = b_1 + b_3 + \dots + b_{2999} = b_1 \frac{(q^2)^{1500} - 1}{q^2 - 1} = b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1}$$

$$S_5 = 2(v_2 + v_4 + v_6 + \dots + v_{3000}) = 2 \cdot v_2 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1} = 2v_2 q \frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1}$$

$$S_4 + S_5 = v_1 (q^{3000} - 1) \left(\frac{1}{q^2 - 1} + \frac{1}{q} \right) = \frac{v_1 (q^{3000} - 1) (2q + 1)}{(q - 1)(q + 1)} =$$

$$= 5 \cdot \frac{2q + 1}{q + 1} = 5 \cdot \frac{\frac{6}{5} + 1}{\frac{3}{5} + 1} = 5 \cdot \frac{11}{8}$$

ответ. увеличится в $\frac{11}{8}$ раза

I. Имеем что $700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$

Если произведение цифр равно 700, то цифры должны быть либо 1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7 либо 1, 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7. Иного варианта нету, так как простые множители 700 таковы, что только одно произведение (2×2) даёт однозначное число.

Теперь рассчитаем количество.

I случай 1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7

Количество будет $A_1 = \underbrace{C_8^2}_{2 \text{ двойки}} \cdot \underbrace{C_6^2}_{2 \text{ пятёрки}} \cdot \underbrace{C_4^1}_{\substack{\text{3 единицы} \\ \text{одна семёрка}}} \cdot C_3^3 = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680$

II случай 1, 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7

$$A_2 = \underbrace{C_8^2}_{2 \times 5} \cdot \underbrace{C_6^1}_{2 \times 7} \cdot \underbrace{C_5^1}_{1 \times 4} \cdot \underbrace{C_4^4}_{4 \times 1} = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 6 \cdot 5 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 840$$

В сумме $A = A_1 + A_2 = 2520$

ответ. 2520

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $\frac{x+6}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3-4x+80} = x^2+10x+24 = (x+6)(x+4)$

имеем решение $x = -6$ но он не принадлежит области допустимых значений
при $x \neq -6$

$$\sqrt{x^3-4x+80} = \sqrt{2}(x+4)$$

$$x^3-4x+80 = 2x^2+32+16x$$

$$x^3-2x^2-20x+48=0 \quad \text{заметим что}$$

$$x^3-2x^2-20x+48=0$$

заметим что $x=4$ есть решение

разделим уравнение на $x-4$

данного уравнения и
он принадлежит О.Д.З.

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-20x+48 & x-4 \\ \underline{x^3-4x^2} & x^2+2x-12 \\ 2x^2-20x & \\ \underline{2x^2-8x} & \\ -12x+48 & \\ \underline{-12x+48} & \\ 0 & \end{array}$$

$$(x-4)(x^2+2x-12)=0$$

$x=4$ уже нашли

$$x^2+2x-12=0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+48}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = -1 \pm \sqrt{13}$$

$$\text{корень } 2 < -1 + \sqrt{13} < 3$$

удовлетворяет О.Д.З.

$$\text{корень } -4 > -1 - \sqrt{13} > -5$$

не удовлетворяет О.Д.З. (2-ое уравн. в нём)

имеем 2 корня $x=4$ $x = -1 + \sqrt{13}$

ответ. $4 ; -1 + \sqrt{13}$

$$4. \quad 2x^4 + x^2 - 4x + 4 - 3x^2|x-2| \geq 0$$

$$2x^4 + (x-2)^2 \geq 3x^2|x-2|$$

при $x \leq 2$ получается

$$2x^4 + (x-2)^2 \geq 3x^2(2-x)$$

5. из данных имеем что радиусы окружностей

$$r_m = \sqrt{(5)^2 + (5\sqrt{2})^2} = 10\sqrt{2}$$

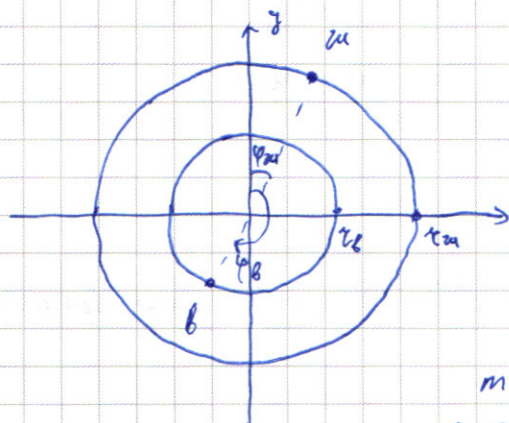
$$r_b = \sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2}$$

пусть скорость звука v
водомерки $2v$

$$\omega_{\text{звук}} = \omega = \frac{v}{10\sqrt{2}}$$

где ω это угловая скорость
звук

$$\omega_{\text{вод}} = \frac{2v}{4\sqrt{2}} = \frac{v}{2\sqrt{2}} = 5\omega$$



φ_m и φ_b это угол
звук и водомерки от оси Ox

$$\varphi_m = \varphi_0 + \omega t \quad \text{где } \varphi_0 = \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

так как из данных видно что при
 $t=0$ угол звук-полюсок-водомерка
равен π , то можно написать

$$\varphi_b = \varphi_0 + \pi + 5\omega t$$

расстояние будет минимальной если $\varphi_b - \varphi_m = 2\pi k$; где $k \in \mathbb{Z}$

$$\pi + 4\omega t = 2\pi k \quad \omega t = \frac{2\pi k - \pi}{4}$$

при этих значениях ωt $\varphi_m = \varphi_0 + \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4}$ $\varphi_b = \varphi_m + 2\pi k$

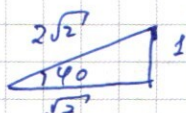
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при малой разности расстояний

$$x_m = r_m \sin \varphi_m = r_m \left(\sin \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi k}{2} \right) + \cos \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{\pi k}{2} \right) \right)$$

$$y_m = r_m \cos \varphi_m = r_m \left(\cos \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi k}{2} \right) - \sin \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{\pi k}{2} \right) \right)$$

$$x_0 = \frac{x_m}{2.5} \quad y_0 = \frac{y_m}{2.5}$$



$$\sin \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \varphi_0 \cos \frac{\pi}{4} - \cos \varphi_0 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \varphi_0 \cos \frac{\pi}{4} + \sin \varphi_0 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}$$

$$x_m = \frac{10\sqrt{2}}{4} \left((1 - \sqrt{2}) \cos \frac{\pi k}{2} + (1 + \sqrt{2}) \sin \frac{\pi k}{2} \right)$$

$$y_m = \frac{10\sqrt{2}}{4} \left((1 + \sqrt{2}) \cos \frac{\pi k}{2} - (1 - \sqrt{2}) \sin \frac{\pi k}{2} \right)$$

есть 4 варианта случая

I. $k = 0$

$$x_m = 2.5\sqrt{2} (1 - \sqrt{2})$$

$$I. \quad \frac{\pi k}{2} = 2\pi m \quad x_m = 2.5\sqrt{2} (1 - \sqrt{2}) \quad (2.5(\sqrt{2} - \sqrt{14}); 2.5(\sqrt{2} + \sqrt{14}))$$

где m любое число $y_m = 2.5\sqrt{2} (1 + \sqrt{2})$

$$II. \quad \frac{\pi k}{2} = 2\pi m + \frac{\pi}{2} \quad x_m = 2.5\sqrt{2} (1 + \sqrt{2}) \quad (2.5(\sqrt{2} + \sqrt{14}); 2.5(\sqrt{14} - \sqrt{2}))$$

$$y_m = 2.5\sqrt{2} (\sqrt{2} - 1)$$

$$III. \quad \frac{\pi k}{2} = 2\pi m + \pi \quad x_m = 2.5\sqrt{2} (\sqrt{2} - 1) \quad (2.5(\sqrt{14} - \sqrt{2}); -2.5(\sqrt{2} + \sqrt{14}))$$

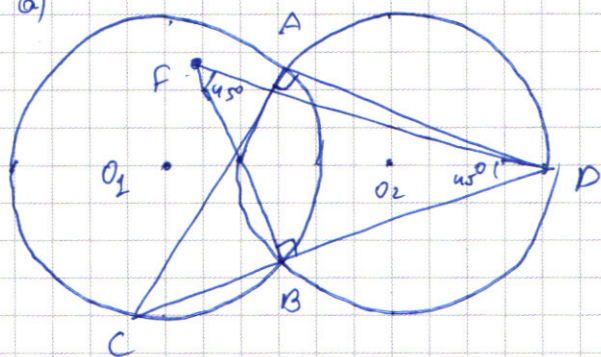
$$y_m = -2.5\sqrt{2} (1 + \sqrt{2})$$

$$IV. \quad \frac{\pi k}{2} = 2\pi m + \frac{3\pi}{2} \quad x_m = -2.5\sqrt{2} (1 + \sqrt{2}) \quad (-2.5(\sqrt{2} + \sqrt{14}); 2.5(\sqrt{2} - \sqrt{14}))$$

$$y_m = 2.5\sqrt{2} (1 - \sqrt{2})$$

ответ. $(2,5(\sqrt{2}-\sqrt{14}); 2,5(\sqrt{2}+\sqrt{14}))$
 $(2,5(\sqrt{2}+\sqrt{14}); -2,5(\sqrt{2}-\sqrt{14}))$
 $(-2,5(\sqrt{2}-\sqrt{14}); -2,5(\sqrt{2}+\sqrt{14}))$
 $(-2,5(\sqrt{2}+\sqrt{14}); 2,5(\sqrt{2}-\sqrt{14}))$

г. а)



угол $\angle ACP = \alpha$

$\angle AOB = 2\alpha = \angle AOB$

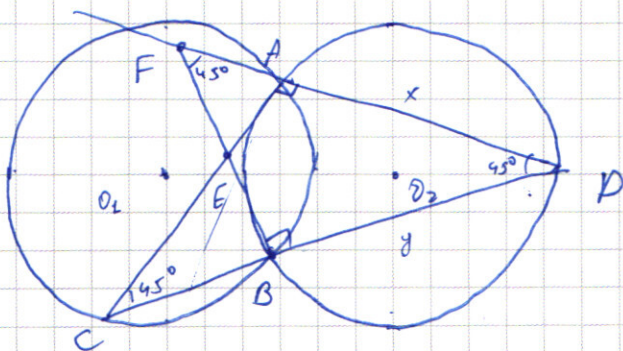
$\angle APC = \frac{\angle AOB}{2} = \alpha$

в $\triangle ACD$ $2\alpha + 90^\circ = 180^\circ$

$\alpha = 45^\circ \Rightarrow AC = AD$

и в правильном рисунке

F будет на AD



угол $AC = AD = x$

$BD = FB = y$

$CB = BE = x\sqrt{2} - y$

$CE = CB\sqrt{2} = 2x - \sqrt{2}y$

$AF = AE = y\sqrt{2} - x$

$FE = \sqrt{2}AE = 2y - \sqrt{2}x$

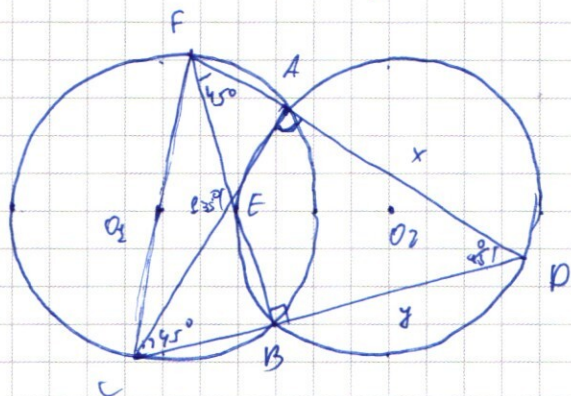
$\angle CEF = 135^\circ$

$AE \cdot CE = AE \cdot EB \cdot \sqrt{2} = FE \cdot EB$

отсюда следует что
F находится на окружности
с центром O1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

или при вычитании если правильно рисунок будет



из свойства струн и касательной

$$AD \cdot FD = BD \cdot CD$$

$$\angle AOB = 2\angle ADB = 90^\circ$$

$$AB = 5\sqrt{2}$$

$$AB^2 = 50 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 45^\circ = x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy$$

$$50 = x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy$$

$$CF^2 = FE^2 + CE^2 - 2FE \cdot CE \cdot \cos 135^\circ =$$

$$= (2y - \sqrt{2}x)^2 + (2x - \sqrt{2}y)^2 + \sqrt{2}(2y - \sqrt{2}x)(2x - \sqrt{2}y) =$$

$$= 4y^2 + 2x^2 - 4\sqrt{2}xy + 4x^2 + 2y^2 - 4\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}xy \cdot \sqrt{2}(4xy - 2\sqrt{2}y^2 - 2\sqrt{2}x^2 + 2xy) =$$

$$= 6x^2 + 6y^2 - 8\sqrt{2}xy + \sqrt{2}(6xy - 2\sqrt{2}y^2 - 2\sqrt{2}x^2) =$$

$$= 6x^2 + 6y^2 - 8\sqrt{2}xy + 6\sqrt{2}xy - 4y^2 - 4x^2 = 2x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{2}xy =$$

$$= 2(x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy) = 100$$

$$CF = 10 \Rightarrow C, O_1, F \text{ на одной прямой}$$

$$d) \text{ или } BC = 6 = x\sqrt{2} - y \quad y = x\sqrt{2} - 6$$

$$x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy = 50 = x^2 + (x\sqrt{2}-6)^2 - \sqrt{2}x(x\sqrt{2}-6) = x^2 + 2x^2 + 36 - 12\sqrt{2}x -$$

$$- 2x^2 + 6\sqrt{2}x = x^2 - 6\sqrt{2}x + 36 = 50$$

$$x^2 - 6\sqrt{2}x - 14 = 0$$

$$x = \frac{6\sqrt{2} + \sqrt{72 + 4 \cdot 14}}{2} = \frac{6\sqrt{2} + \sqrt{128}}{2} = \frac{6\sqrt{2} + 8\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} + \sqrt{32} = 7\sqrt{2}$$

$$\frac{AF \cdot AC}{2} = \frac{(y\sqrt{2}-x)x}{2} = \frac{xy\sqrt{2}-x^2}{2} = \frac{x}{2} (\sqrt{2}(x\sqrt{2}-6) - x) =$$

$$= \frac{x}{2} (2x - 6\sqrt{2} - x) = \frac{x}{2} (x - 6\sqrt{2}) = \frac{7\sqrt{2}}{2} (7\sqrt{2} - 6\sqrt{2}) = \frac{7}{2}$$

ответ. а) 10

б) 7

$$4. \quad 2x^4 + x^2 - 4x + 4 - 3x^2/(x-2) \geq 0$$

при $x \leq 2$ $|x-2| = 2-x$ упрощая получаем

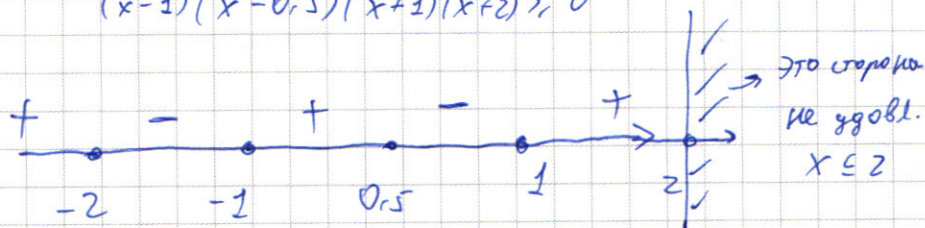
$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2 + x - 2) \geq 0$$

$$2(x-1)(x+2)(x+1)(x-\frac{1}{2}) \geq 0$$

$$(x-1)(x-0,5)(x+1)(x+2) \geq 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $x \geq 2$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 4 - 3x^3 + 6x^2 \geq 0$$

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$f(x) \geq 0 \text{ при } x \geq 2$$

при $x=2$ $f(2) \geq 0$, поэтому

если при $x \geq 2$ $f'(x) \geq 0$,
то $f(x) \geq 0$
при $x \geq 2$

$$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 14x - 4$$

при $x=2$ $f'(x) \geq 0$, поэтому

если при $x \geq 2$ $f''(x) \geq 0$, то
 $f'(x) \geq 0$ при $x \geq 2$

$$f''(x) = 24x^2 - 18x + 14$$

при $x=2$ $f''(2) \geq 0$, поэтому если

$$f'''(x) = 48x - 36 \geq 0 \text{ при } x \geq 2$$

при $x \geq 2$ $f'''(x) \geq 0$, то
 $f''(x) \geq 0$ при $x \geq 2$

значит при $x \geq 2$ $x \in [2; +\infty)$ будет решением

объединив получаем

ответ. $x \in (-\infty; -2] \cup [-1; 0,5] \cup [1; +\infty)$

7. Сначала решим 1-ое уравн. $|(y-x)-6| + |(y+x)-6| = 12$

I. при $\begin{cases} y-x \geq 6 \\ y+x \geq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq x+6 \\ y \geq -x+6 \end{cases}$

$$y-x-6+y+x-6=12 \quad y=12$$

II. при $\begin{cases} y+x \geq 6 \\ y-x \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -x+6 \\ y \leq x+6 \end{cases}$

$$y+x-6+6-y+x=12 \quad x=6$$

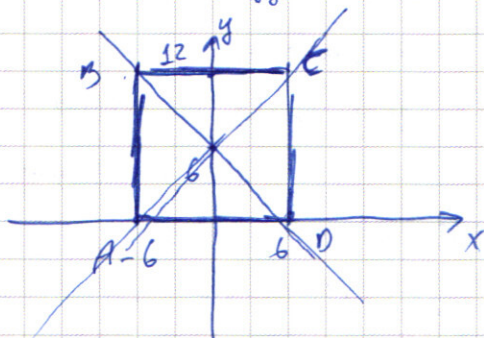
$$\text{III. при } \begin{cases} y+x \leq 6 \\ y-x \geq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq -x+6 \\ y \geq x+6 \end{cases}$$

$$y-x-6+6-y-x=12 \quad \underline{\underline{x=-6}}$$

$$\text{IV. при } \begin{cases} y+x \leq 6 \\ y-x \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq -x+6 \\ y \leq x+6 \end{cases}$$

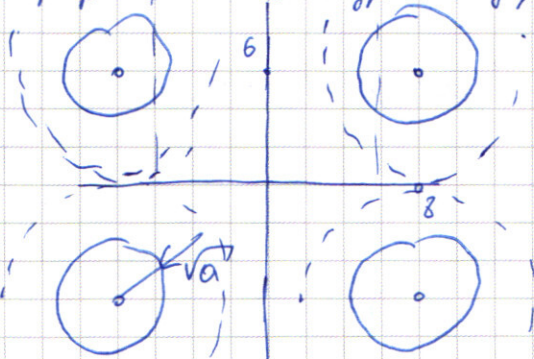
$$6-x-y+6-y+x=12 \quad \underline{\underline{y=0}}$$

графически это будет



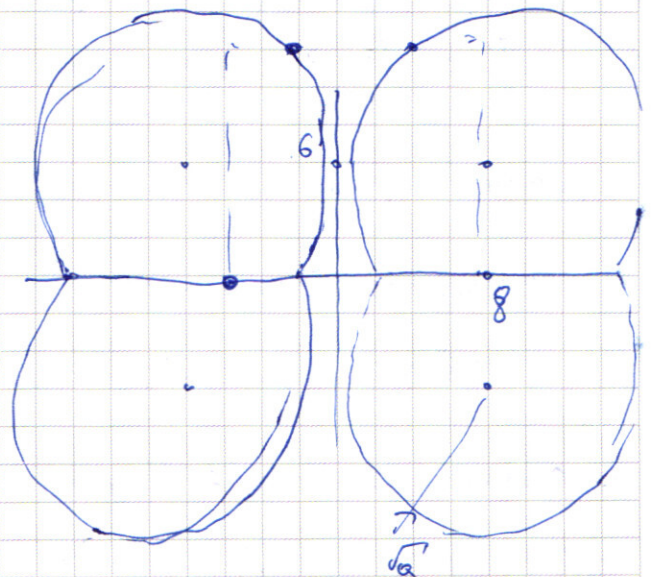
квадрат ABCD

графически 2-ое уравн будет



при $a \leq 36$

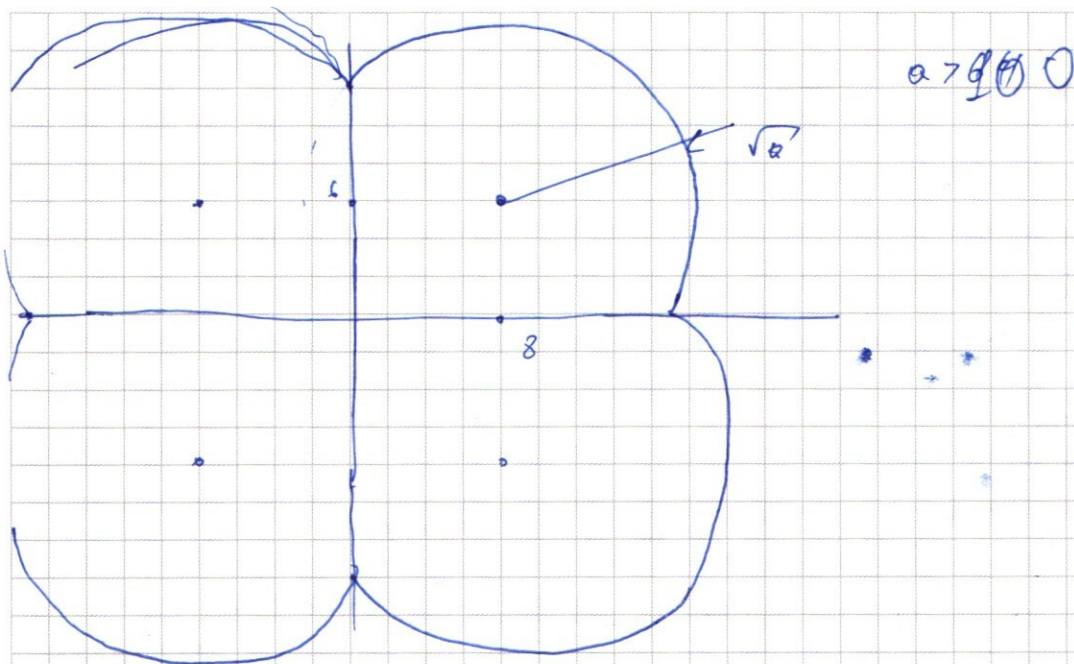
(при $a=36$ график разделяющей линии)



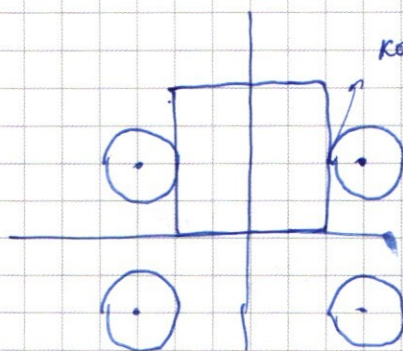
при $36 < a \leq 64$

(при $a=64$ касаются
окружности касаются
к Oy)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ровно 2 решения будут при этих случаях
при $a \leq 36$



$$\sqrt{a} = 8 - 6 = 2$$

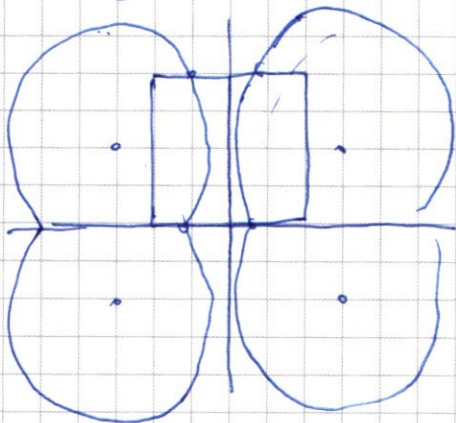
$$a = 4$$

при

при $36 < a \leq 64$

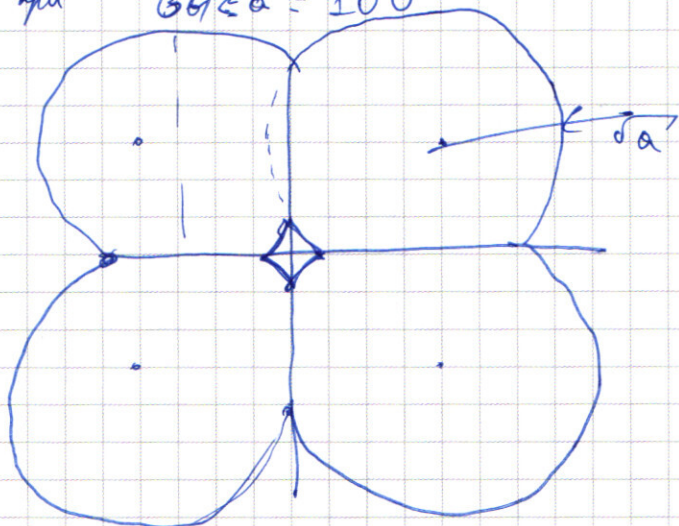
нет решений

(всегда 4 пересечения)



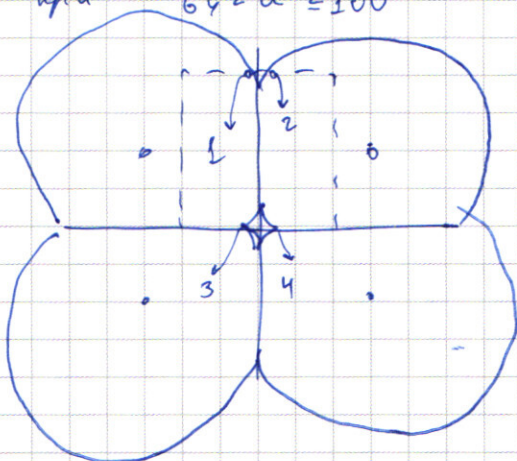
и я забыл одну ситуацию, сейчас допишу

при $64 \leq a \leq 100$



вернёмся к решению

при $64 \leq a \leq 100$

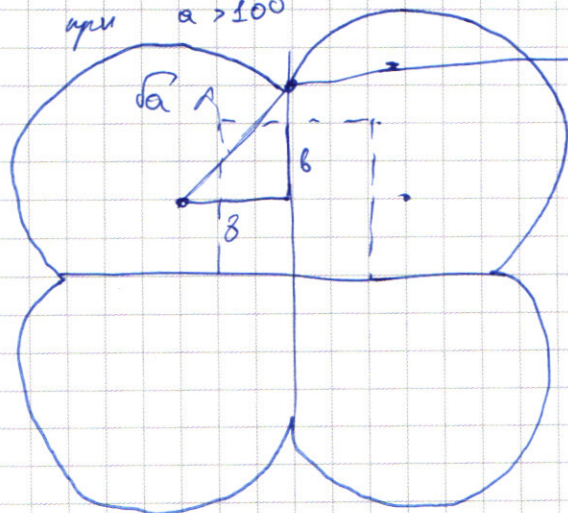


4 решения, не подходит

(при $a=100$ 2 пересекаются, 3 и 4 совпадают)
1 и 2 совпадают

$a=100$ решение

при $a > 100$



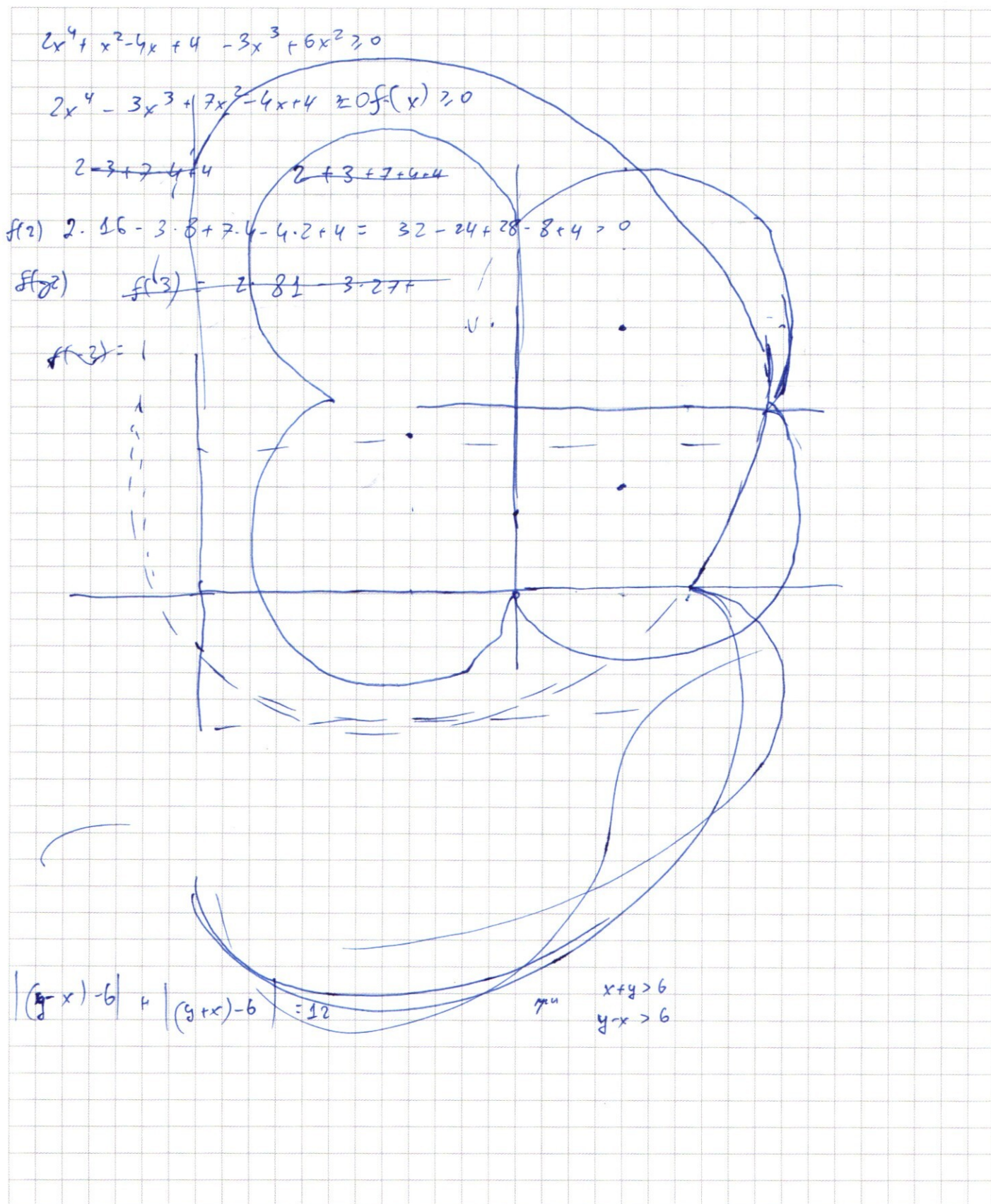
эта точка выше верхней стороны квадрата, т.к. $\sqrt{a} > 10$

нет пересечений, нет корней

ответ. $a = 4$

$a = 100$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$|(y-x)+6| + |(y+x)-6| = 12$$

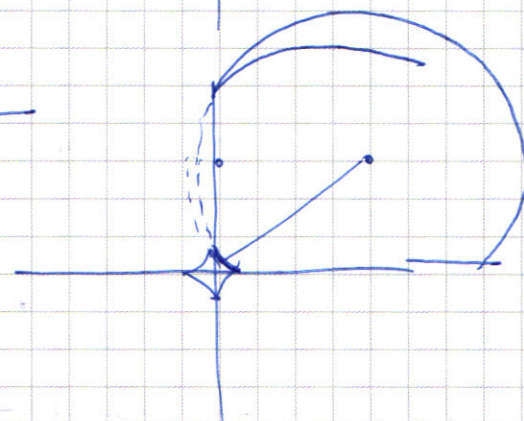
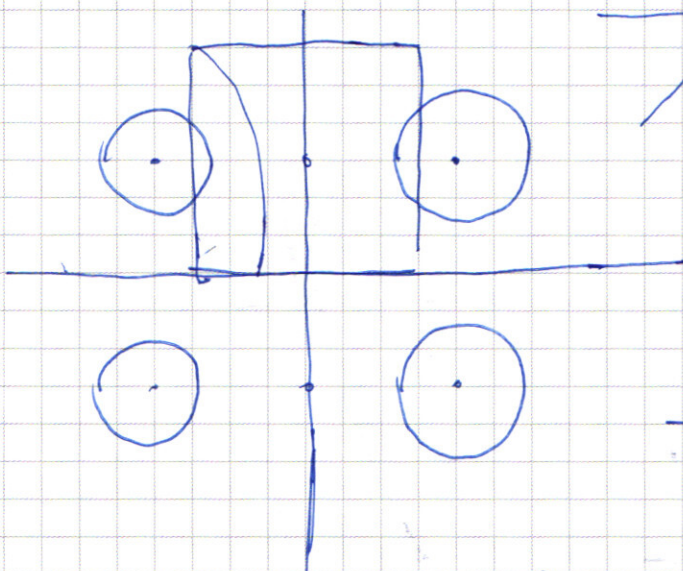
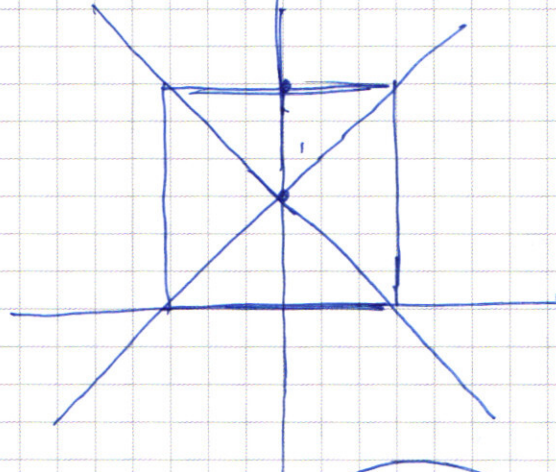
$$\begin{aligned} \text{1. } y-x \geq 6 & \Rightarrow y \geq x+6 \\ y+x \geq 6 & y \geq -x+6 \end{aligned}$$



$$y-x-6+y+x-6=12$$

$$y=12$$

$$\begin{aligned} \text{2. } y+x \geq 6 & y \geq -x+6 \\ y-x \leq 6 & y \leq x+6 \end{aligned}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$CF^2 = \underbrace{4x^2 + 2y^2}_{=6-2\sqrt{2}} - 4\sqrt{2}xy + \underbrace{4y^2 + 2x^2}_{=6-2\sqrt{2}} - 4\sqrt{2}xy + 4xy - \underbrace{2\sqrt{2}y^2}_{=2\sqrt{2}} - \underbrace{2\sqrt{2}x^2}_{=2\sqrt{2}} + 2xy =$$

$$= x^2(6-2\sqrt{2}) + y^2(6-2\sqrt{2}) + xy(6-4\sqrt{2})$$

$$FE \cdot EB = (2y - \sqrt{2}x) \cdot (x\sqrt{2} - y) = 2\sqrt{2}xy - 2y^2 - 2x^2 + \sqrt{2}xy$$

$$AE \cdot CE = (y\sqrt{2} - x)(2x - \sqrt{2}y) = 2\sqrt{2}xy - 2y^2 - 2x^2 + \sqrt{2}xy$$

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = 0 \end{cases}$$

$$|(y-x)-6| + |(y+x)-6| = 12$$

1. $(y-x) < 0$ ~~$(y+x)$~~

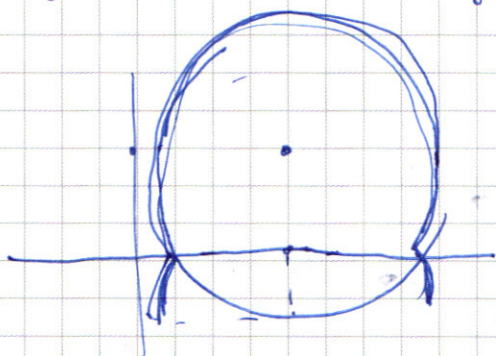
$$y-x < 6$$

$$y+x < 6$$

$$6 - (y-x) + 6 - (y+x) = 12$$

$$12 - 2y = 12 \quad y = 0$$

$$-6 \leq x \leq 6$$



$$2x^4 + x^2(x-2)^2 \geq 3x^2(x-2)$$

$$x > 2$$

$$11/12 \text{ (м дм 5 5)}$$

$$x \leq 2$$

$$2x^4 + (x-2)^2 \geq 3x^2(2-x)$$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 4 + 3x^3 - 6x^2 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$x = 1$$

$$2 + 3 - 5 - 4 + 4 = 0$$

$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2+x-2) \geq 0$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = -1; 0.5$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \quad | \quad x-1 \\ \underline{2x^4 - 2x^3} \\ 5x^3 - 5x^2 \\ \underline{5x^3 - 5x^2} \\ 0 \end{array}$$

$$2x^3 + 5x^2 - 4 = 0$$

$$4 = x^2(5+2x)$$

$$x = -2$$

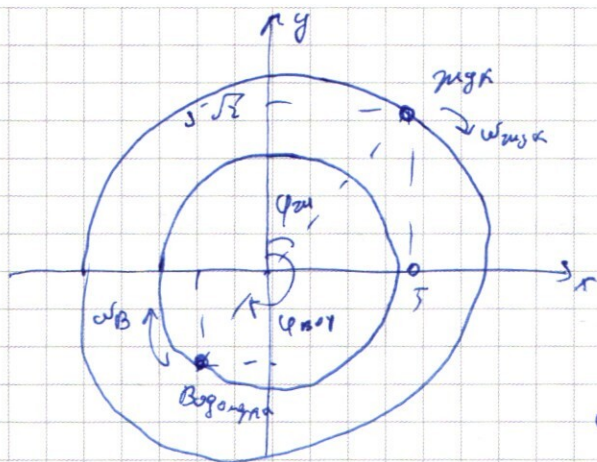
$$-8 +$$

$$-15 - 4$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 - 4 \quad | \quad x+2 \\ \underline{2x^3 + 4x^2} \\ x^2 - 4 \\ \underline{x^2 + 2x} \\ 2x - 4 \\ \underline{2x - 4} \\ 0 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.



Водомерка $2V$
мук V

$$r_{\text{Водомерка}} = \sqrt{4+4 \cdot 2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$r_{\text{мук}} = \sqrt{25+25 \cdot 2} = \sqrt{25 \cdot 4 \cdot 2} = 10\sqrt{2}$$

$$\omega_{\text{Возб}} = \frac{2V}{4\sqrt{2}} = \frac{V}{2\sqrt{2}} = 5\omega$$

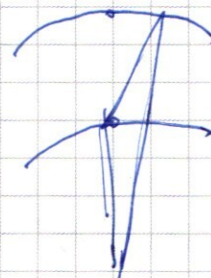
$$\omega_{\text{мук}} = \frac{V}{10\sqrt{2}} = \omega$$

$$\varphi_m = \varphi_0 + \omega t$$

$$\varphi_0 = \varphi_0 + \pi + 5\omega t$$

$$\varphi_0 - \varphi_m = \pi + 4\omega t = 2\pi k$$

$$\varphi_0 = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$t = \frac{\pi(2k-1)}{4\omega}$$

$$32 = 16 \cdot 2$$

$$\varphi_m \quad \varphi_0 \quad t = \frac{\pi(2k-1)}{4\omega}$$

$$\varphi_m = \varphi_0 + \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$x_m = r_m \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)$$

$$y_m = r_m \cos\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)$$

$$x_m = 10\sqrt{2} \left(\sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + \cos\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \right)$$

$$y_m = 10\sqrt{2} \left(\cos\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \right)$$

$$\frac{14}{36}$$

$$\varphi_0 + \pi + \frac{5\pi k}{2} - \frac{5\pi}{4} =$$

$$= \varphi_0 - \frac{\pi}{4} +$$

$$36 \cdot 2 + 4 \cdot 14$$

$$72 + 56 =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$700 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2$$

$$\underbrace{C_8^2}_{2\text{-}w_p} \cdot \underbrace{C_6^2}_{5\text{-}w_p} \cdot C_4^1 = 4 \cdot \frac{8!}{6!2!} \cdot \frac{6!}{4!2!} = 4 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$$

$$C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot \frac{8!}{3!5!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6}$$

$$\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 4$$

$$5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 30 \cdot 56 = 10 \cdot 3(50 + 6) = 10 \cdot (150 + 18) = 1680$$

$$30 \cdot 7 = 210$$

$$1680 + 840 = 120 + 2500$$

$$\frac{x+6}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3 - 6x + 80} = (x+4)(x+6)$$

$$x = -6$$

$$x^3 - 6x + 80 = 2x^2 + 32 + 16x$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0 = f(x)$$

$$x^3$$

$$f(-6) = -216 - 72 + 120 + 48 = -288 + 168 = -120 < 0$$

$$f(-5) = -125 - 50 + 100 + 48 = -175 + 48 = -127 < 0 \quad) [-5; -4]$$

$$f(-4) = -64 - 32 + 80 + 48 = -96 + 128 = 32 > 0$$

$$f(-3) = -27 - 18 + 60 + 48 > 0$$

$$f(-2) = -8 - 8 + 20 + 48 > 0$$

$$f(-1) > 0$$

$$f(0) > 0$$

$$f(1) = 1 - 2 - 20 + 48 > 0 \quad +64 - 32 - 80 + 48$$

$$f(2) = 8 - 8 - 20 + 48 > 0 \quad [2; 3]$$

$$f(3) = 27 - 18 - 60 + 48 = -3 < 0$$

$$f(4) = 64 - 32 - 80 + 48 = 112 - 112 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 \\ x^3 - 4x^2 \\ \hline 2x^2 - 20x \\ -2x^2 + 8x \\ \hline -12x + 48 \end{array} \quad \begin{array}{l} x-4 \\ x^2+2x-12 = 0 \end{array}$$

$$x = -2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 12}$$

$$3 < \sqrt{13} < 4$$

$$x^2 + 10x + 24 \geq 0$$

$$-3 > -\sqrt{13} > -4$$

$$x \in (-\infty; -6] \cup [-4; +\infty)$$

$$-4 > -1 - \sqrt{13} > -5$$

$$\begin{array}{l} 2x^4 + x^2 - 4x + 4 - 3x^2/x - 2 \geq 0 \\ 2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2/x - 2 \geq 0 \end{array}$$

$$2x^4 + (x-2)^2 \geq 3x^2/x - 2$$

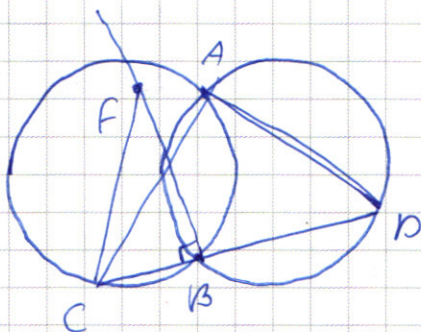
$$\text{для } x \geq 2$$

$$2x^4 + (x-2)^2 \geq 3x^2(x-2)$$

$$2x^4 \geq (x-2)(3x^2 - x + 2) =$$

$$= 3x^3 - 7x^2 + 4x - 4$$

$$x=2 \text{ делит } 5$$



$$8x^3$$

и

$$9x^2 - 14x + 4$$

$$x=2$$

$$\text{делит } x-2$$

$$24x^2$$

и

$$9x - 14$$

$$x=2$$

$$\text{делит } x-2$$

$$24x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$9 \pm \sqrt{81 - 784}$$

$$x \leq 2$$

$$(2-x)(x-2)$$

$$2x^4 + (x-2)^2 \geq 3x^2(2-x)$$

$$2x^4 \geq (2-x)(3x^2 + x - 2)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$b_0, b_1, \dots$$

$$b_n = b_1 q^n$$

$$q > 0 \quad b_1 > 0$$

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

$$1681$$

$$S = \sum_{n=1}^{3000} b_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

$$\frac{1681}{1681}$$

после трансформации

$$b_1 + b_4 + b_7 + \dots + b_{2998} = b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1}$$

$$b_2 + b_5 + b_8 + \dots + b_{2999} = b_1 q \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1}$$

$$50 \cdot (b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) =$$

$$= 50 \cdot b_1 q^2 \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1}$$

$$10 \cdot b_1 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} = b_1 (q^{3000} - 1) \left(\frac{1}{q^3 - 1} + \frac{q}{q^3 - 1} + \frac{50q^2}{q^3 - 1} \right)$$

$$\frac{10}{q-1} = \frac{1 + q + 50q^2}{(q-1)(q^2 + q + 1)}$$

$$40q^2 - 9q - 50 = 0$$

$$10q^2 + 10q + 10 = 1 + q + 50q^2$$

$$q = \frac{39 \pm \sqrt{81 + 40 \cdot 40}}{80} = \frac{61 \pm 9}{80} = \frac{5}{8}$$

$$q = \frac{\sqrt{81 + 36 \cdot 40}}{80}$$

$$36 \cdot 40 + 81 = 9 \cdot (160 + 9)$$

$$39 + 9 = 48$$

$$x^3 - 4x + 80$$

$$2x^2 - 4$$

6p 6

$$x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \text{ убывает}$$

$$x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \text{ 2 экстремума}$$

$$x \in (\sqrt{2}; +\infty) \text{ убывает}$$

$$\begin{array}{r} 6,25 \\ 25 \\ \hline 156,25 \end{array}$$

$$6,25 \cdot 2,5 = 625 \cdot 25 = 600 \cdot 25 + 625 =$$

$$= 150 \cdot 100 + 625 = 15,625$$

$$x^2 + 10x + 24$$

$$x^2 + 10x + 24 = x^2 + 10x + 25 - 1 = (x+5)^2 - 1 = (x+4)(x+6)$$

$$\frac{x+6}{\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)(x+6)$$

$$x = -6$$

$$1 \cdot 2 - 20 + 48 = 49 - 22 = 27$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2(x+4)^2 = 2x^2 + 32 + 16x$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0 = f(x) \quad \text{---}$$

$$f(0) = 48$$

$$f(1) = 27$$

$$f(2) = 8$$

$$f(3) = -3$$

$$f(-1) = 85$$

$$f(-2) = 72$$

$$f(-4) = 26$$

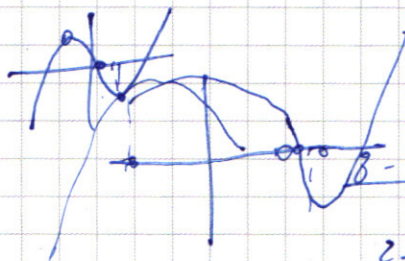
$$f(-5) > 0$$

$$3x^2 - 4x - 20 = 0$$

$$8 - 8 - 40 + 48$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 12 \cdot 20}}{6} = \frac{4 \pm 4\sqrt{1+15}}{6}$$

$$= \frac{4 \pm 16}{6} = -2; \frac{10}{3}$$



$$27 - 18 - 60 + 48 = -3$$

$$= 1 - 2 + 20 + 48 = 65$$

$$-8 - 8 + 40 + 48 = 72$$

$$f(-3) = -27 + 18 + 60 + 48 =$$

$$= 64 + 32 + 80 + 48$$

$$-125 + 50 + 100 + 48 =$$

$$3x^2 - 4x - 20 = 0$$

$$\frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 3 \cdot 20}}{6} = \frac{4 \pm 4\sqrt{16}}{6} = \frac{4 \pm 16}{6} = -2; \frac{10}{3}$$

$$15,625 =$$

x^2