

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
- ✓ 3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
- ✓ 4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
- ✓ 5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
- ✓ 7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \Rightarrow$ существует 2 набора чисел,
из которых составлены эти числа:

1) $\{1; 1; 2; 2; 5; 5; 7; 7\}$ кол-во таких чисел равно $\frac{8!}{2^4}$

2) $\{1; 1; 1; 1; 5; 5; 7; 7\}$ кол-во таких чисел равно $\frac{8!}{2^2 \cdot 6}$

Всего таких чисел $\frac{8!}{2^4} + \frac{8!}{2^2 \cdot 6} = 2520 + 1680 = 4200$

№2 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{3000}$ — ариф. прогр. $b_i > 0, i \in [1; 3000]$
 $b_1 + b_2 + \dots + b_{3000} = S$ $n = ?$

$$b_1 + b_2 + 40b_3 + \dots + 40b_{3000} = 5S$$

$$b_1 + 3b_2 + b_3 + 3b_4 + \dots + 3b_{3000} = nS$$

$$S = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} \quad , q - \text{знаменатель прогрессии}$$

$$4S = 3qb_3 + 3qb_6 + \dots + 3qb_{3000} = \frac{b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} \cdot 3q$$

$$n = \frac{39q^2}{q^2 + q + 1}$$

$$35q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$q = \frac{4 \pm 24}{70}$$

т.к. $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{3000} > 0$,
то $q > 0 \Rightarrow q = \frac{28}{70} = \frac{2}{5}$

$$(n-1)S = 2(b_2 + b_4 + \dots + b_{2000}) = \frac{b_1 q (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$$n-1 = \frac{q}{q+1} = \frac{2}{7} \quad n = 1 + \frac{2}{7} = \frac{9}{7}$$

Ответ: S увеличивается в $\frac{9}{7}$ раза.

$$\sqrt{3} \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4)$$

при $x = -10$
выполняется

$x \neq -10$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x-4) \cdot 2\sqrt{2} \cdot (x-4)$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$\text{при } x = 6 \quad x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} 6 & 1 & -8 & 0 & 72 \\ & 1 & -2 & -12 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$D = 4 + 48 = 2^2 \cdot 13$$

Ответ: $x = 6, x = 1 + \sqrt{13}, x = 1 - \sqrt{13}$ $x = 1 \pm \sqrt{13}$ точно проверено

$$N4 \quad 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 | x+2 | + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 | x+2 | + 4 = 0$$

$$\text{при } x \geq -2: 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 = 0$$

~~при $x = -1$~~ при $x = -1$ выполняется

удовлетворяется,
при
то $x = 6, x = 1 + \sqrt{13},$
 $x = 1 - \sqrt{13}$

$$x^3 - 64x + 200 \geq 0$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -5 & -9 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & -9 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -2 & 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 4x^3 - 9x^2 + 4 = 0$$

выполняется при $x = 2$

$$4x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 33$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$\text{при } x \geq -2 \quad 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 = 0 \quad -2 < \frac{1 - \sqrt{33}}{8}$$

$$\text{при } x = -1, x = 2, x = \frac{1 - \sqrt{33}}{8}, x = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$$

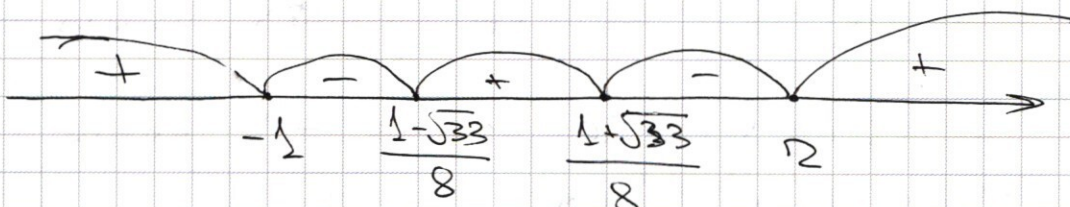
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $x < -2$ Пусть $f(x) = 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4$,
тогда $f'(x) = 16x^3 + 15x^2 + 12x + 4$
при $x \in (-\infty; -2)$ $f'(x) < 0$, $f(-2) = 64 > 0$,
значит $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -2)$,

таким образом

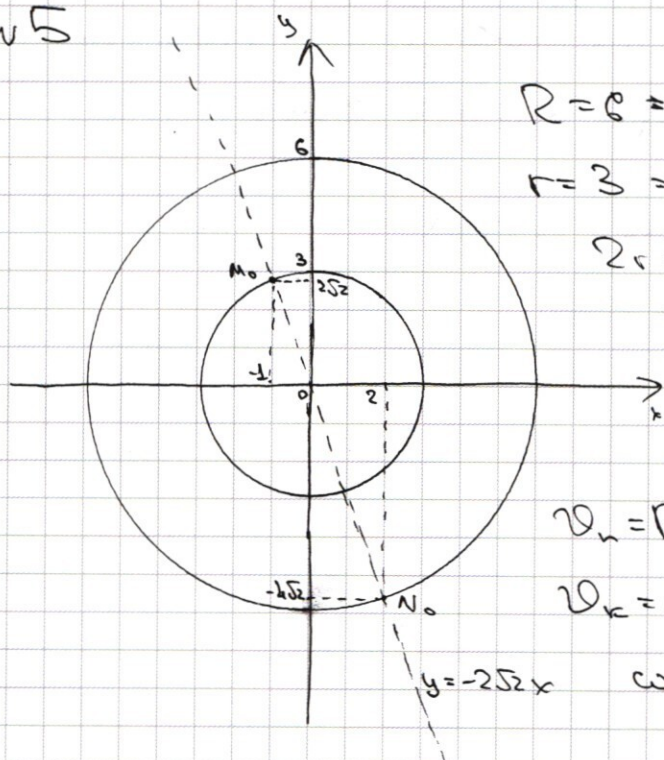
$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 |x+2| + 4 = 0$$

$$\text{при } x = -1, x = 2, x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$



Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$

и 5



$$R = 6 = \sqrt{(-1)^2 + 2^2}$$

$$r = 3 = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2}$$

$$2r = R$$

$$\frac{v_k}{v_n} = 2,5$$

$$v_n = R \omega_n = 2r \omega_n$$

$$v_k = r \omega_k$$

$$\omega_k =$$

Поиск скорости
R имеет значение

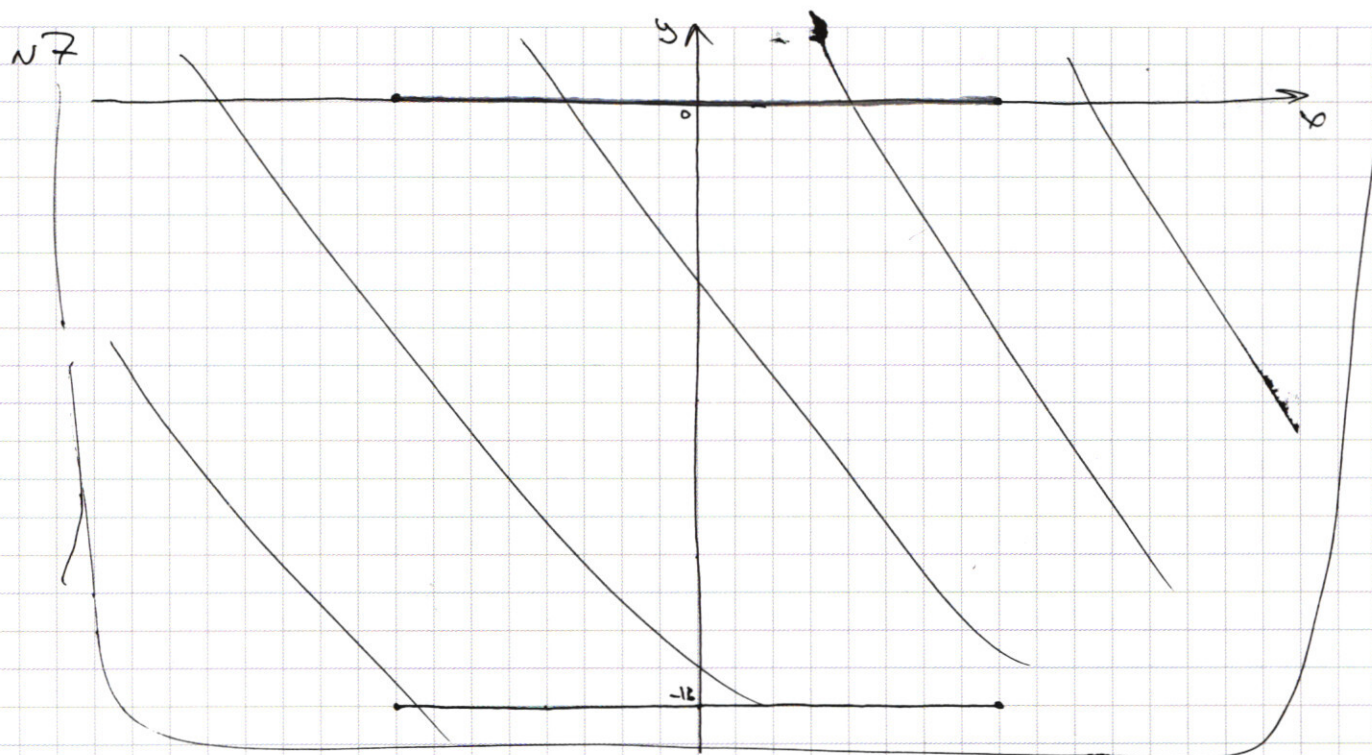
Поиск скорости
r имеет значение

v_n - скорость центра
 v_k - скорость касания
 ω - угловая скорость

$$\omega = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}, \text{ где } \alpha - \text{угловая величина (град)}$$

$$\frac{\omega_k}{\omega_n} = 5$$

$$\omega_k = 5 \omega_n$$



На странице 5 приведен график

$$|y+x+8| + |y-x+8| = 16 \quad (\text{линия } -)$$

$$(|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \quad \text{при } a = 289, \text{ только } a$$

Система $\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 & (\text{линия } -) \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a & (\text{линия } -) \end{cases}$

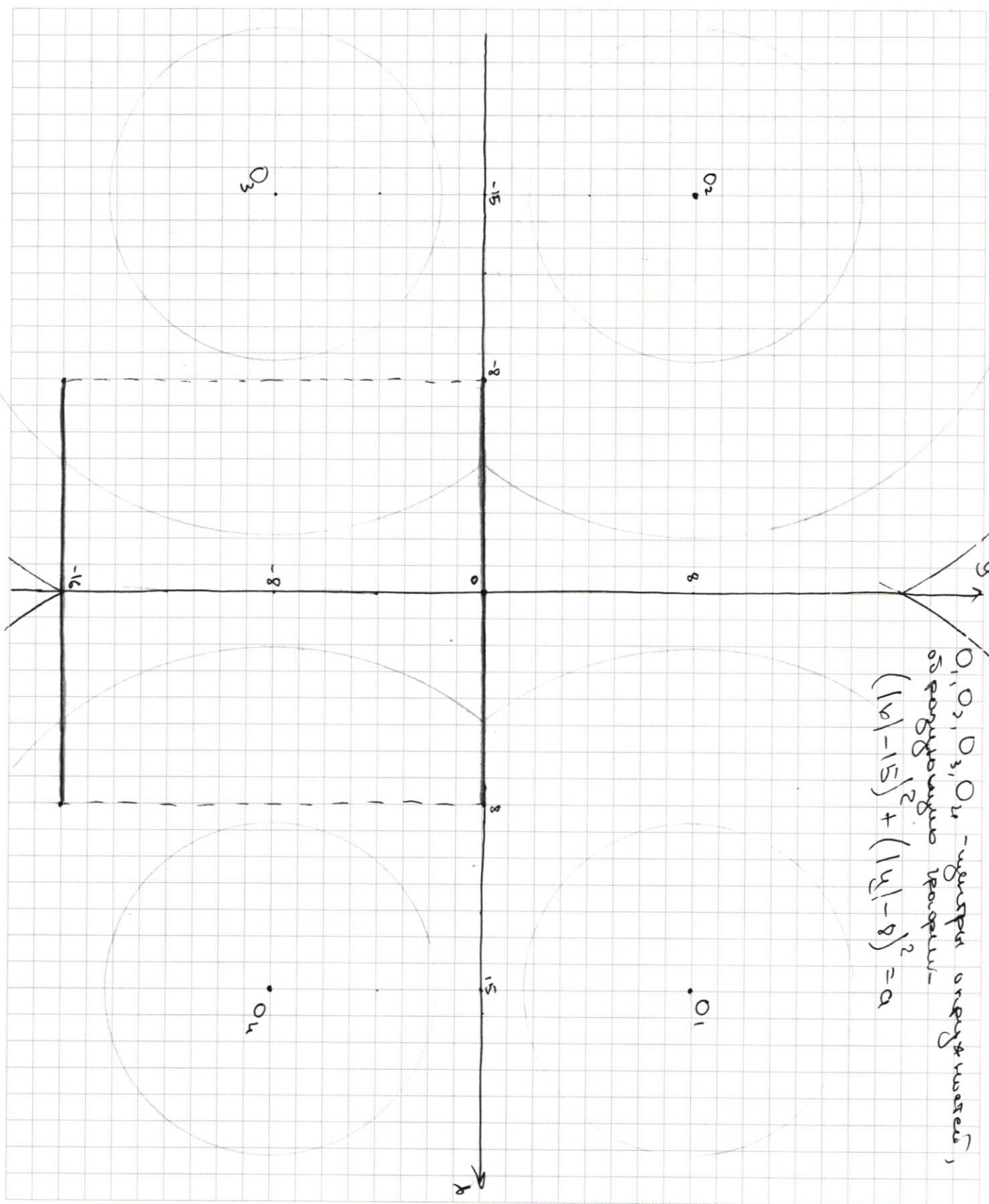
имеет 2 решения при $a = 289$, (точки $(0; 0)$ и $(0; -16)$)

не имеет ~~ли~~ решений при $a \in (-\infty; 113) \cup (289; +\infty)$

имеет 4 решения при $a \in [113; 289)$

Таким образом Ответ: $a = 289$

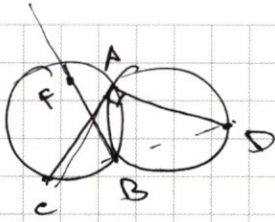
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



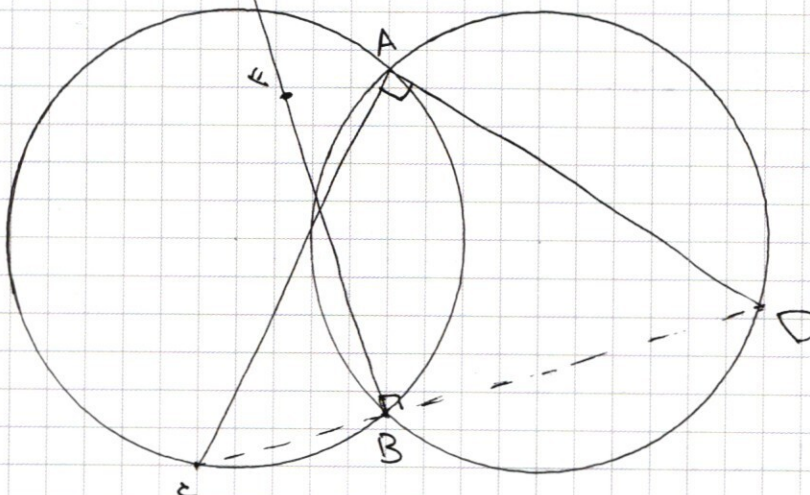
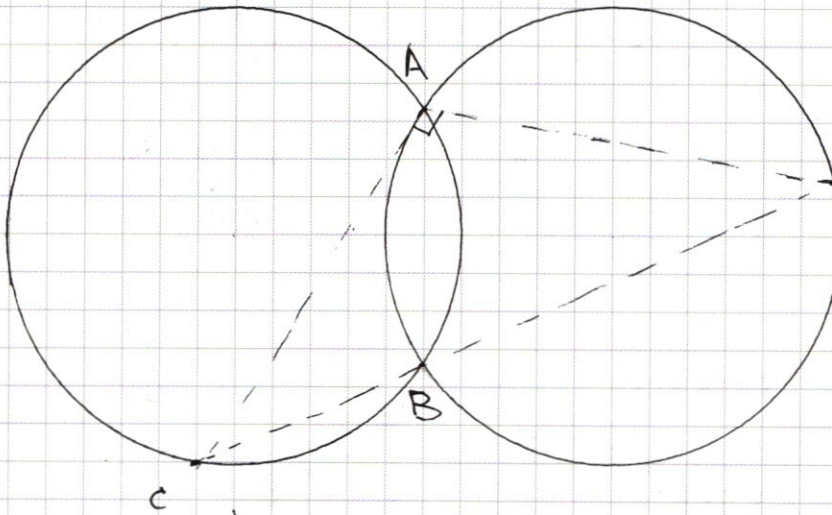
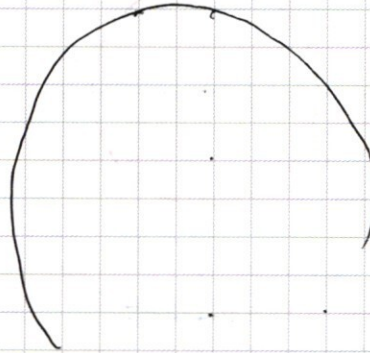
№ 5 продолжение:

Таким образом за время t
пескоре пройдет дугу в 45° меньшую
чем корабль т.к. изначально они
были на одной прямой с началом коорд.,
но по разную сторону от начала, то
такие точки будут расположены от
 N_0 через дуги величинами в 45° ,
 135° , 225° , 315° по часовой стрелке
(координаты не чисел подставить)

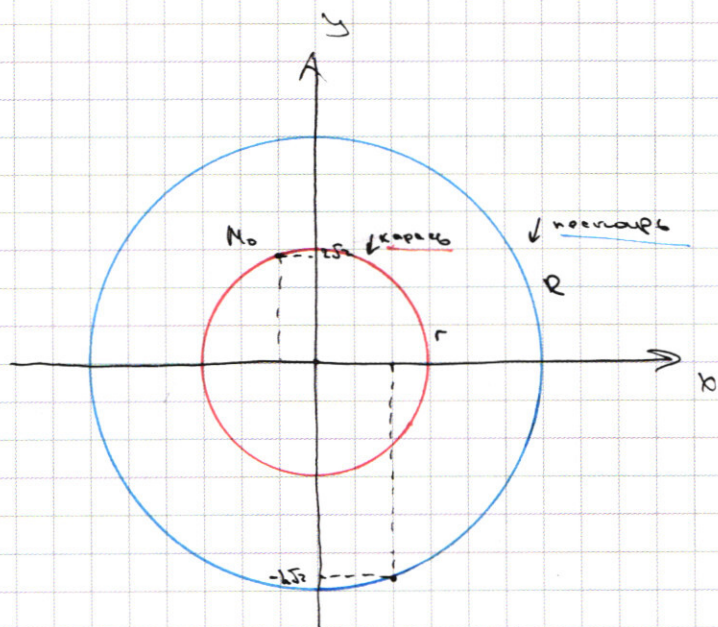
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{cases} |y+6+8| + |y-6+8| = 16 \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$



$$\begin{aligned} & |y+6+8| + |y-6+8| = 16 \\ & |y+14| + |y+2| = 16 \\ & \begin{cases} y+14 \geq 0 \\ y+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y \geq -2 \\ & y+14 + y+2 = 16 \\ & 2y+16 = 16 \\ & 2y = 0 \\ & y = 0 \\ & \begin{cases} y+14 < 0 \\ y+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq y < -14 \\ & -(y+14) + y+2 = 16 \\ & -y-14 + y+2 = 16 \\ & -12 = 16 \quad \text{Contradiction} \\ & \begin{cases} y+14 \geq 0 \\ y+2 < 0 \end{cases} \Rightarrow y < -2 \\ & y+14 + -(y+2) = 16 \\ & y+14 - y-2 = 16 \\ & 12 = 16 \quad \text{Contradiction} \\ & \begin{cases} y+14 < 0 \\ y+2 < 0 \end{cases} \Rightarrow y < -14 \\ & -(y+14) - (y+2) = 16 \\ & -y-14 - y-2 = 16 \\ & -2y-16 = 16 \\ & -2y = 32 \\ & y = -16 \end{aligned}$$



$$2r = R$$

$$\omega_r = \frac{\sqrt{5}}{4} \omega_R$$

$$x \geq -2$$

$$x_1 = -1$$

$$4x^3 - 9x^2 + 4 = 0$$

$$x^2(4x - 9) + 4 = 0$$

$$x_2 = 2$$

$$4 - 9 \quad 0 \quad 4$$

$$x_2 = 2$$

$$2 \quad 4 \quad -1 \quad -2 \quad 0$$

$$4x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 32 = 33$$

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$x \leq -2$$

$$f(x) = 4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 = 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4$$

$$256$$

$$3$$

$$-30$$

$$f'(x) = 16x^3 + 15x^2 + 22x + 4$$

$$f'(x) = 48x^2 + 30x + 22$$

$$D = 30^2 - 48 \cdot 22 < 0$$

$$x^3 - 2x^2 + 200 = 0$$

$$5$$

$$1$$

$$5$$

$$5$$

$$5$$

$$5$$

$$5$$

1
0
2
0
0

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 $4800 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

a b c d e f g n

Всего разл. цифр. 4, при этом

$$n = \frac{8!}{16} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 3 = 2520 + \frac{8!}{16} = 2520$$

2 $b_1, b_2, \dots, b_{2000}$

$b_i > 0, S$

$39 \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_{2000}) = 4S$

$39 \cdot b_i (q^2 + q^3 + \dots + q^{2000}) = 4S$

$S = \frac{b_i (q^{2000} - 1)}{q^2 - 1}$

$16 + 16 \cdot 38 =$

$= 16 \cdot 36 =$

$= 24^2$

$nS = 2 \cdot \frac{b_i q (q^{2000} - 1)}{q^2 - 1}$

$4S = \frac{b_i q^2 (q^{2000} - 1)}{q^2 - 1} \cdot 39$

$4 + 15 - 9 - 4 + 4 = 0 \quad q = \frac{4+24}{70} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$n = \frac{q}{q+1} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{2}{7} \quad k = 39 \cdot \frac{q}{q^2 + q + 1}$

$39q^2 = 4q^2 + 4q + 4$

$35q^2 - 4q - 4 = 0$

4 $4x^4 + x^3 + 4x - 5x^2 \mid x+2 \mid 4 \geq 0$

$x \in \mathbb{R}$

при $x \geq -2$

$4x^4 + x^3 + 4x - 5x^2 \geq -10x^2 + 4 \geq 0$

$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$

$b_1 = 9 - x_2 - x_3$

$x_1 + x_2 + x_3 = 9$
 $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 0$
 $x_1 x_2 x_3 = 4$

$4x^3 - 9x^2 + 4 = 0$

$x_2^2 + x_2(x_3 - 9) + x_3^2 - 9x_3 = 0$

$x_2 \in \mathbb{R}$

	4	-5	-9	4	4
-1	4	-9	0	4	0

$\Delta = x_3^2 - 18x_3 + 81 + 4x_3^2 - 9x_2^2 - x_2^2 - 6x_2x_3 + 6x_2x_3 +$
 $- 36x_2 \geq 5x_3^2 - 54x_3 + 81 + 8x_2 - 6x_2^2 - 6x_2x_3 = 0$

$$M_0(-1; 2\sqrt{2}) \quad N_0(2; -4\sqrt{2})$$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = v^2 + 6v - 40$$

$$G^3 = 216$$

$$\frac{v+10}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = 12 \sqrt{2} (v+10)(v-4)$$

$$-6$$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = \frac{12}{\sqrt{2}} (v-4)$$

$$-2 \cdot 3^2$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8v^2 - 64x + 128$$

$$x^3 - 8v^2 + 72 = 0 \quad -6$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1 & -8 & 0 & 72 \\ \hline 6 & 12 & 12 & (x-4)^2 \\ \hline & -2 & -12 & \end{array}$$

$$v^2 - 2v - 12 = 0$$

$$\oplus = 4 + 48 = 52$$

$$72 = 3 \cdot 8 \cdot 8$$

$$\frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 1 \pm \sqrt{13}$$

$$(v-8)v^2 = -72$$

$$v_1 = 8 - v_2 - v_3$$

$$v_1 + v_2 + v_3 = 8$$

$$8x_2 - v_2^2 - v_2v_3 + 8v_3 - v_3^2 = 0$$

$$v_1v_2v_3 = 72$$

$$v_1v_2 + v_2v_3 + v_3v_1 = 0$$

$$x_2^2 + x_2(v_3 - 8) + v_3^2 - 8v_2 = 0$$

$$\oplus = v_3^2 - 16v_3 + 64 - 2v_3^2 + 24v_2 =$$

$$= 8v_3 + 64 - 3v_3^2$$

$$x_2v_3(8 - x_2 - v_3) = -72$$

$$v_2^2v_3 - 8v_2v_3 + v_2v_3^2 = 72$$

$$0 + 8: \{6; 1 + \sqrt{13}; 1 - \sqrt{13}\}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

$$v_1v_2 + v_2v_3 + v_3v_1 = -8$$

$$v_1v_2v_3 = -72$$

$$v_1 = -(v_2 + v_3)$$

$$-x_2^2 - v_2v_3 + v_2v_3 - v_3^2 - v_2v_3 = -8$$

$$x_2^2 + v_2v_3 + v_3^2 - 8 = 0$$

$$\oplus = v_3^2 - 4v_3 + 32 =$$

$$= 32 - 3v_3^2$$

$$v_2^2 - x_2 \pm \sqrt{32 - 3v_3^2}$$

$$2(2x_2)$$

$$6(x_3 - 4)^2 - v_3^2$$

$$-2(v_3 - 4)(x_3 + 4) - v_3^2$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



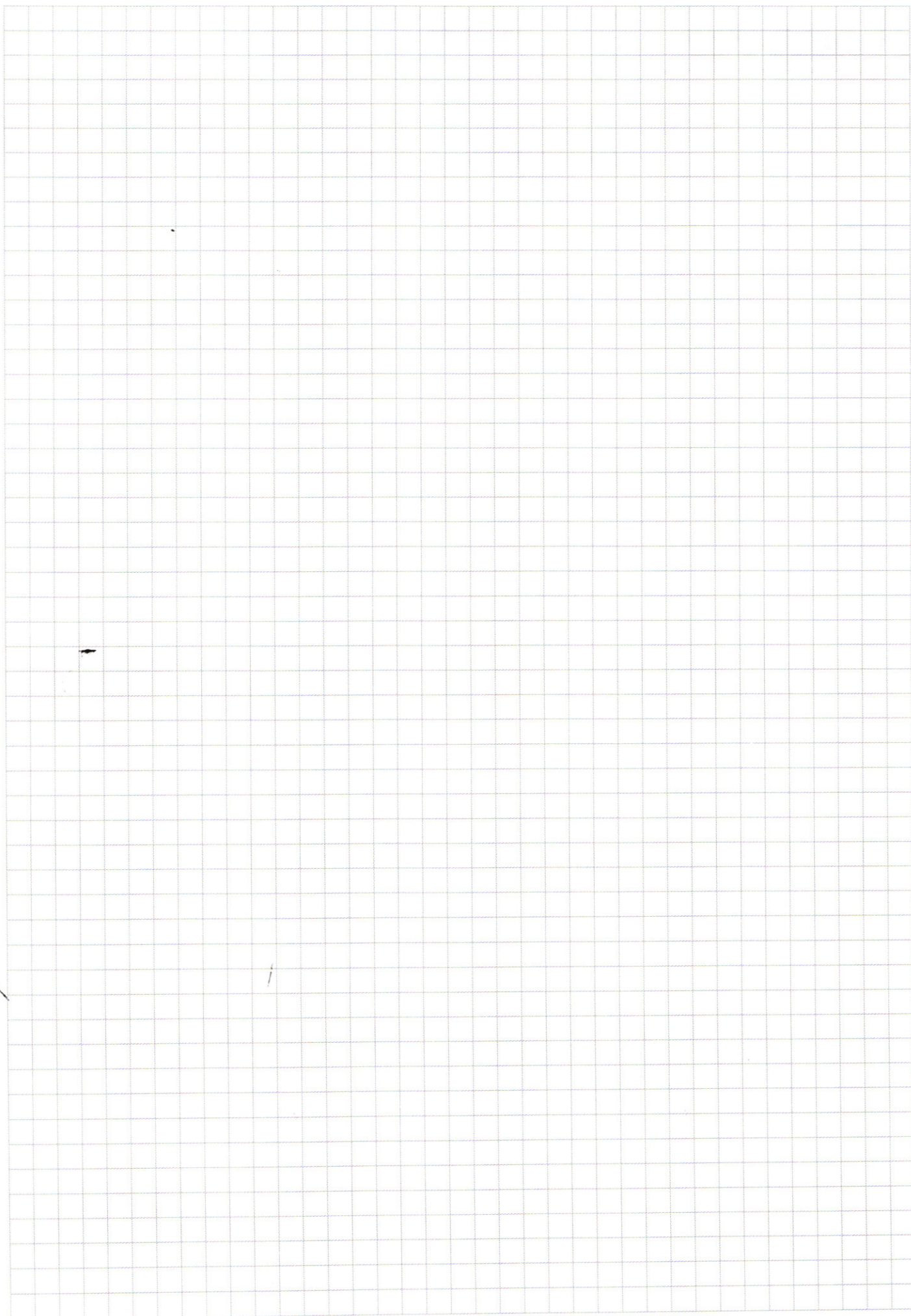
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)