

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Разобьем 4900 на простые множители

$$4900 = 4^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 7$$

возможные две комбинации чисел

4, 4, 5, 5, 2, 2, 1, 1 и 4, 4, 5, 5, 7, 1, 1, 1

(больше чем м.к. произведение любых двух чисел)

> 9)

~~число~~

комбинация 1

число 8 элементов разлится

тогда их число 8! м.к. числа два

4 безразличны: 2 числа 5 безразличны: 2

числа 1 безразличны: 2

их всего $\frac{8!}{2^4}$

числа комбинация 2

число 8 элементов разлится тогда

их 8! м.к. числа 4, 5, 1 безразличны

2, 2, 3!

их число $\frac{8!}{2^3 \cdot 3}$

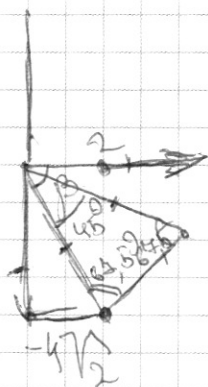
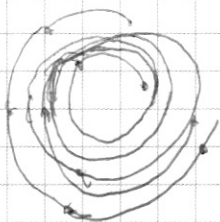
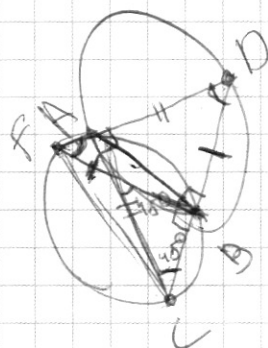
тогда их всего

$$\frac{8!}{2^4} + \frac{8!}{2^3 \cdot 3} = \frac{4!}{2} + \frac{4!}{3} = \frac{4! \cdot 5}{6} = 4 \cdot 5^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4900 \text{ чисел}$$

Ответ: 4900 чисел

$$\begin{array}{r}
 \times 14 \quad 25 \\
 \times 25 \\
 \hline
 35 \\
 14 \\
 \hline
 \times 145 \\
 24 \\
 \hline
 480 \\
 350 \\
 \hline
 4200
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 15 \\
 \times 15 \\
 \hline
 45 \\
 15 \\
 \hline
 225 \\
 64 \\
 \hline
 289
 \end{array}$$



$$x^3 - 8x^2 + 42 = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 42$$

$$x_1 \cdot x_2 = 12 \quad 6 \cdot 2 \quad 3 \cdot 4 \quad 12 \cdot 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -8 \quad \text{умм } 8$$

$$x_1 + x_2 = -14 \quad \text{умм } 2$$

$$(1 + \sqrt{13})^2 = (1 + 4 + 2\sqrt{13})(14 - \sqrt{13}) = 48 - 13 = 35$$

$$\begin{array}{r}
 \times 30 \\
 \times 6 \\
 \hline
 36 \\
 18 \\
 \hline
 246
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 64 \\
 \times 6 \\
 \hline
 24 \\
 36 \\
 \hline
 384
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 416 \\
 384 \\
 \hline
 32
 \end{array}$$

$$(1 + \sqrt{13})(14 + 2\sqrt{13} - 64) + 200$$

$$(1 + \sqrt{13})(-50 + 2\sqrt{13}) + 200$$

$$-50 - 50\sqrt{13} + 2\sqrt{13} + 26 + 200$$

$$146 - 48\sqrt{13}$$

$$88$$

$$16 \cdot 11 - 16 \cdot 4 \cdot \sqrt{13}$$

$$16(11 - 4\sqrt{13})$$

$$128 - 16 \cdot 13$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

Пусть $b_1, b_2, \dots, b_{2000}$ — прогрессия с шагом k ($k > 0$)
т.к. член. прогр.

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{2000} = S$$

$$5S = b_1 + b_2 + 40b_3 + b_4 + \dots + 40b_{2000}$$

или поделив числа на последовательные
 $b_n + b_n k + 40b_n k^2 = 5(b_n + b_n k + b_n k^2)$ т.к. $5S$

$$35b_n k^2 = 4b_n + 4b_n k^2 : b_n$$

$$35k^2 - 4k - 4 = 0$$

$$k = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 35}}{2 \cdot 35} \text{ т.к. } k > 0 \text{ и } 4 - \sqrt{4^2 + 4 \cdot 35} < 0 \text{ т.к. } -20$$

$$k = \frac{4 + \sqrt{4^2 + 4 \cdot 35}}{2 \cdot 35} = \frac{2}{5}$$

Далее поделив числа на последовательные

$$(b_n + b_n k) \cdot 2 = b_n + b_n k \cdot 3 \quad \text{т.к. } 2 - \text{увеличение } S$$

$$b_n \cdot 2 + b_n k = b_n + b_n k \cdot 3 : b_n$$

$$2\left(\frac{1}{2} + k\right) = 1 + 3k$$

$$\frac{4}{5} \cdot 2 = \frac{11}{5} \quad 2 = \frac{11}{4} \Rightarrow \text{сумма увеличилась}$$

Ответ: сумма увеличилась в $\frac{11}{4}$ раз

№3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40 \quad \text{или } x^3 - 64x \geq 200$$

$$\frac{x\sqrt{2} + 10\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\frac{(x+10)}{4} \sqrt[3]{2(x^3-64x+200)} = x^2+6x-40$$

м.к. при $x = -10$ не является корнем м.к. $-1000+640+200 < 0$

то: $\frac{x+10}{4} (\neq 0)$

$$\sqrt[3]{(x^3-64x+200) \cdot 2} = \frac{(x^2+6x-40)4}{(x+10)}$$

$$\sqrt[3]{(x^3-64x+200) \cdot 2} = \frac{(x+10)(x-4) \cdot 4}{(x+10)} \quad \frac{x+10}{x+10} = 1$$

$$\sqrt[3]{(x^3-64x+200) \cdot 2} = (x-4) \cdot 4 \quad \text{м.к. } \sqrt[3]{\geq 0} \Rightarrow x-4 \geq 0$$

м.к. $x+10 \neq 0$
возврат в $\frac{x+10}{x+10} = 1$
клад $x \geq 4$
там

$$(x^3-64x+200) \cdot 2 = (x-4)^2 \cdot 16 \quad | :2$$

$$x^3-64x+200 = (x^2-8x+16) \cdot 8$$

$$x^3-64x+200 = 8x^2-64x+128$$

$$x^3-8x^2+32=0$$

$x^2(x-8) = -32$ ~~м.к. $x \geq 4$ и $x^2(x-8)$ возраст.~~
 ~~$x^2(4-8) = -64 > -32$~~ ~~м.к. $x \geq 4$~~

подставляем $x=6$

$$x^3-8x^2+32 = (x-6)(x^2-2x+12)$$

В малых корни это $\frac{2 \pm \sqrt{2^2+4 \cdot 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{2}$
 $\frac{2+\sqrt{13}}{2} < 4$
 $\frac{2-\sqrt{13}}{2} < 4$
 $\frac{2+\sqrt{13}}{2} > 4$
 $\frac{2-\sqrt{13}}{2} > 4$
 не удовлет.
 не удов.
 не удов.

Проверка

$$6^3-64 \cdot 6+200 = 32 > 0$$

$$(1+\sqrt{13})^3-64 \cdot (1+\sqrt{13})+200 = 16(1-4\sqrt{13}) < 0 \Rightarrow \text{не реш.}$$

Ответ: 6

Но и

$$x^4+2x^2+4x-5x^2|x+2|+4 \geq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

Пусть $x \geq -2$ тогда

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3(x+2) + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

Решим неравенство методом интервалов

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 = f(x)$$

найдём корни функции

$$x_1 = -1$$

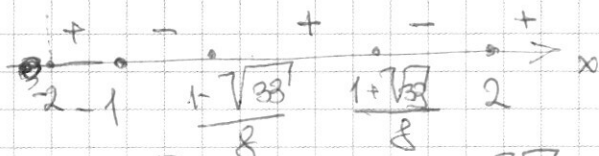
$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 = (x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4)$$

$$x_2 = 2$$

$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) = (x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2)$$

$$x_3 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} \quad \text{т.к. } \sqrt{33} < 4 \quad \frac{1 + \sqrt{33}}{8} < 1$$

$$x_4 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 4} = \frac{1 - \sqrt{33}}{8} \quad \text{т.к. } \sqrt{33} < 4 \Rightarrow \frac{1 - \sqrt{33}}{8} > -1$$



т.к. $f(1) < 0$ поставим
знаки

$$x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1 - \sqrt{33}}{8}; \frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$$

Пусть $x \leq -2$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$x^2(2x+1) + x(x+2)^2(1+x)^2\left(\frac{5x^2+4}{2}\right) + \frac{3x^4}{2} + \frac{13x^2}{2} + 2 \geq 0$$

т.к. это все суммы квадратов $\Rightarrow$ при $x \in \mathbb{R}$

$$x \in (-\infty; -2)$$

или при объединении

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}, \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty)$$

№ 4

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

т.к. при $x=0$ и $y=0$ модули равны 8, а

сумма 16 $\Rightarrow$ тогда $\begin{cases} x+y=0 \\ y-x=0 \end{cases} \Rightarrow y=0 \quad x \text{ — любое}$

$$\begin{cases} (y+x) = -(y-x) \Rightarrow y=0 \quad x \text{ — любое} \end{cases}$$

тогда

$$(|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

$$|x|^2 - 30|x| + 15^2 + (0-8)^2 = a$$

$$|x|^2 - 30|x| + 15^2 + 8^2 - a = 0$$

замена $|x|=t$ т.к. для $t > 0$ есть $2 \nmid x$

$$t^2 - 30t + 15^2 + 8^2 - a = 0$$

при $t=0$ 1х

имеет либо 1 решение $t \neq 0$

либо 2 решения, но с разными

знаками т.к. $t_1, t_2 = \frac{30 \pm \sqrt{15^2 + 8^2 - a}}{2}$ на рисунке $\Rightarrow$

есть только случаи с 1 корнем (т.к. либо $a < 0$, либо $a = 0$)
тогда

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4x^4 + 11x^2 + 4 = 5x^3 + 4x$$

$$\frac{1}{4} + \frac{11}{4} + 4 = \frac{5}{8} + 2$$

$$3 + 4$$

$$3x^2 + 4x^4$$

$$(4x^2 + 5x + 10x)$$

$$x^2 + 4x + 4$$

$$(4x^2 + 5x + 4x)$$

$$4x^2 + 4x + 1$$

$$1x^3 + 10x^2 + 4x + 1$$

$$6x^2 + 1$$

$$2x \left(\frac{5x^2 + 4}{2} \right)$$

$$+ 1 \frac{5x^2 + 4}{2}$$

$$+ x^2 \left(\frac{5x^2 + 4}{2} \right)$$

$$5x^3 + 4x + \frac{5x^2}{2} + 2 +$$

$$1 + 4x^2 - 9 = 13 \quad -4\sqrt{2}$$

$$1 + 2x + 1$$

$$\lg 24 = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$2\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ \triangle \\ 2\sqrt{2} \end{array}$$

т.к. $t_1, t_2 = 15^2 + 8^2 - a$ по разные знаки
при $15^2 + 8^2 - a < 0 \Rightarrow a > 15^2 + 8^2$

случай с единственным решением
тогда когда ~~всегда~~ появляется полный
квадрат $co^2 t$ и это ч.к. $a = 8^2$
($(t - 8 - 15)^2 = 0$)

Ответ: $a \in \{8^2\} \cup (15^2 + 8^2; +\infty)$

Ответ: $a \in \{64\} \cup (289; +\infty)$

№5

Найдём радиус окружности движущейся
для караван это $r = \sqrt{(-1)^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3$

для пещеры это $R = \sqrt{2^2 + (-4\sqrt{2})^2} = 6 = 2r$

(Радиусы считаются как расстояния от $(0; 0)$
до M_0 и N_0 (по пещере))

Найдём длины окружности
проходимых караваном и пещерой

$$S_k = 2\pi \cdot r \quad S_{\pi} = 2\pi R = 2\pi \cdot 2r = 2S_k$$

Обозначим скорости каравана за v_k и пещеры за v_{π}

тогда скорости каравана $v_k = 2,5 v_{\pi}$

тогда караван пройдёт круг

$$\text{за } t = \frac{S_k}{v_k}; \text{ а пещера за } t_2 = \frac{S_{\pi}}{v_{\pi}} = \frac{2S_k}{2,5v_{\pi}} = \frac{4}{5}$$

через t они окажутся в тех же
точках; при этом караван 4 раза

обойдёт пещеру т.к. пройдёт на
круга больше; но есть б

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

и во время обгона и будет появляться
маленькая точка м.к. между ними будет
расстояние $R - r = r \sin \alpha$ из $t_k = \frac{1}{5} t_B \Rightarrow$

угловая скорость ω_k караса в 5 раз больше
угловой скорости ω_B колеса

изначально они диаметрально противоположны
м.к. центр в 0 и $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2} = -\frac{1}{2}$ где $y_1, x_1 = R_0$
 $y_2, x_2 = R_0$

то в центре караса $180^\circ + \alpha$; косоуго α (где α угол
м.к. $180^\circ + \alpha = 5\alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ$ кратчайший карасей)

каждый угол между касательными β

$$\beta = -\arcsin \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$$

$\beta + \alpha < 0$ $\Rightarrow$ в координатах следующие
на 45° в одной четверти эквивалентно
оказываться

то $45 - |\beta| = \frac{90 - 2\beta}{2} \Rightarrow$ координаты этой
точки это координаты $\angle$ в 2 раза
большей $\angle$ точки окружности сверху деленной
на 2
тогда x этой точки

$$\text{это } \cos \left(\frac{90 - 2\arcsin \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)}{2} \right) = \sin \left(\frac{1}{2} \cdot 2\arcsin \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \right) =$$

$$= 6 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2} \quad y \text{ м.к.} < 0 \quad y = -2 \text{ gain}$$

они поворачиваются через $30^\circ \Rightarrow$ нужно
 менять значение x на значение y и
 менять один знак; поворот на 30°
 и.к.

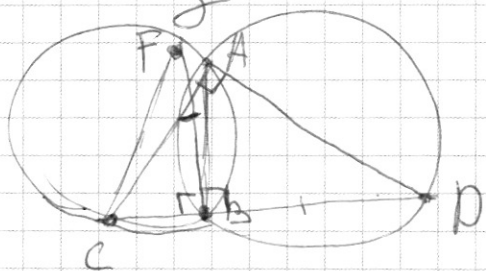
если корабль пройдёт до след. Вспомог.
 $360^\circ + \varphi = 5\varphi$ φ - угол корабля и $\varphi = 90^\circ$

это точки $(4\sqrt{2}; -2); (2; 4\sqrt{2}); (-4\sqrt{2}; 2); (-2; -4\sqrt{2})$

Ответ: $(4\sqrt{2}; -2); (2; 4\sqrt{2}); (-4\sqrt{2}; 2); (-2; -4\sqrt{2})$

№ 6

а) Доказ



Рассмотрим $\triangle ACP$ и $\triangle ADP$ они опираются на

одну и ту же дугу
 и углы

$\angle BSA = \angle APB$ и.к. опираются на одну

дугу с одной стороны $\Rightarrow CB = BP$;

$AC = AD \Rightarrow AB$ высота и медиана и $AB = BP$

и $AB \perp CD \Rightarrow A$ совпадает с $F \Rightarrow CF = AP$ и

и диаметр $D = 2r = 26$

Ответ а: $CF = 26$

б) $S_{\triangle ACF}$ равен $S_{\triangle ABC}$

по площади найдём 3 сторону

$AB = 24$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{26^2 - 10^2} = BF = 24$$

С по теореме $\sqrt{30^{5.6} (30-24)(30-2)(30-10)} = 5 \cdot 4 \cdot 6 = 240$

Ответ: 240

$$\begin{array}{r}
 \times 26 \\
 \hline
 216 \\
 52 \\
 \hline
 432
 \end{array}$$

$$\sqrt{632} = 24$$