

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

Т.е. в записи числа есть две цифры „5“ и две „7“ (Т.к. $5^2=25$, $7^2=49$, $2 \cdot 5=10$, $2 \cdot 7=14$ все они ~~меньше~~ больше 10). А 2^2 можно получить произведением одной „4“ и единицу или двух „2“ и единицу.

1) Когда число состоит из цифр: 5, 5, 7, 7, 4, 1, 1, 1. А кол-во перестановок этих цифр равняется:

$$8! \cdot C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^1 = 28 \cdot 15 \cdot 4 = 1680$$

(где C_8^2 - кол-во выбора двух „5“ из 8 цифр, C_6^2 - кол-во выборов двух „7“ из оставшихся 6 цифр и т.д.)

2) Когда число сост. из: 5, 5, 7, 7, 2, 2, 1, 1.

$$C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 = 28 \cdot 15 \cdot 6 = 2520$$

$$2520 + 1680 = 4200$$

Ответ: 4200

W2

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_{2999}, b_{3000}$

Пусть $b_i = b \cdot q^{i-1}$, где любое натуральное i от 1 до 3000.

$$S = b_1 + b_2 + \dots + b_{3000} = b + bq + bq^2 + \dots + bq^{2999} = b(1 + q + q^2 + \dots + q^{2999})$$

$$b_1 + b_2 + 40b_3 + b_4 + \dots + b_{2999} + 40b_{3000} = b(1 + q + 40q^2 + \dots + q^{2998} + 40q^{2999})$$

$$5 \cdot b(1 + q + q^2 + \dots + q^{2999}) = b(1 + q + 40q^2 + \dots + q^{2998} + 40q^{2999})$$

$$5 \cdot b \cdot (1 + q + q^2) (1 + q^3 + \dots + q^{2997}) = b(1 + q + 40q^2) (1 + q^3 + \dots + q^{2997})$$

$$5 + 5q + 5q^2 = 1 + q + 40q^2$$

$$35q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 4 \cdot 35 = 16 \cdot 36 = 24^2$$

$$q_1 = \frac{4 + 24}{70} = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$q_2 = \frac{4 - 24}{70} < 0 \quad \emptyset$$

Значит $q = 0,4$.

$$\begin{aligned} A = b_1 + 3b_2 + b_3 + 3b_4 + \dots + 3b_{3000} &= b(1 + 3q + q^2 + 3q^3 + \dots + 3q^{2999}) = \\ &= b(1 + 3q)(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2998}) = b(1 + 1,2)(1 + q + \dots + q^{2999}) = 2,2 \cdot b(1 + q + \dots + q^{2999}) \end{aligned}$$

$$S = b(1 + q + \dots + q^{2999}) = b(1 + q)(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2998}) = 1,4 \cdot b \cdot (1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2998})$$

$$\frac{A}{S} = \frac{3,4}{1,8} = \frac{34}{18} = \frac{17}{9} = 1 \frac{8}{9} \quad \frac{A}{S} = \frac{2,2}{1,4} = \frac{11}{7} = 1 \frac{4}{7}$$

Ответ: Увеличится в $1 \frac{4}{7}$ раз.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$$

1) $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

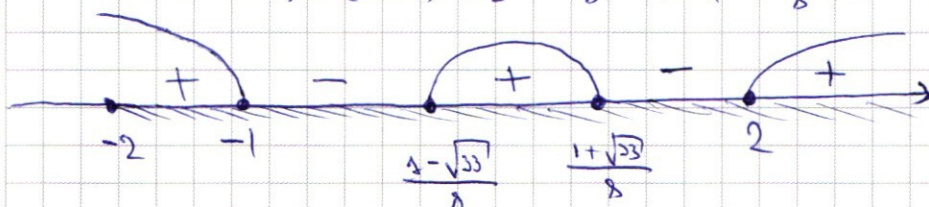
$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$(x+1)(x-2)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0$$

$$(x+1)(x-2)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0$$

$$x_1 = -1; x_2 = 2; x_3 = \frac{1+\sqrt{33}}{8}; x_4 = \frac{1-\sqrt{33}}{8}$$



$$x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty);$$

2) $x+2 < 0 \Rightarrow x < -2$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

~~4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0~~ $y = -x, y > 2$

$$4y^4 + 11y^2 + 4 \geq 5y^3 + 4y$$

$$4y^4 + 11y^2 + 4 > 8y^3 + 4y > 5y^3 + 4y, \text{ т.е. это неравенство}$$

верно для $\forall y, x < -2. \quad x \in (-\infty; -2)$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty),$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200}} = x^2 + 6x - 40$$

$$\frac{2x+20}{4\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4)$$

$$(x+10) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = 2\sqrt{2} (x+10)(x-4)$$

$$(x+10)^2 (x^3 - 64x + 200) = (x+10)^2 (8x^2 - 64x + 128)$$

$$(x+10)^2 (x^3 - 8x^2 + 72) = 0$$

$$(x+10)^2 (x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0$$

$$x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 12 = 52$$

$$(x+10)^2 (x-6) (x - (2+\sqrt{13})) (x - (2-\sqrt{13})) = 0$$

$$x_1 = -10, x_2 = 6, x_3 = 2 + \sqrt{13}, x_4 = 2 - \sqrt{13}$$

~~Решение:~~

~~$$x_1 = -10 \rightarrow \sqrt{x^3 - 64x + 200} = \sqrt{-1000 + 640 + 200} = 0$$~~

~~$$x_2 = 6 \rightarrow \sqrt{x^3 - 64x + 200} = \sqrt{216 - 384 + 200} = 2$$~~

~~$$10 \cdot \sqrt{1000 - 640 + 200} = 2\sqrt{2} \cdot 16 \cdot 2$$~~

~~$$10 \cdot \sqrt{1232} = 2 \cdot 64 \cdot \sqrt{2}$$~~

~~$$10 \cdot \sqrt{64 \cdot 19} = 64 \sqrt{2}$$~~

~~$$x_3 = 2 + \sqrt{13}$$~~

~~$$(2 + \sqrt{13}) \cdot \sqrt{...}$$~~

Ответ: $x_1 = -10; x_2 = 6; x_3 = 2 + \sqrt{13}; x_4 = 2 - \sqrt{13}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = 9 \end{cases}$$

1) ~~x~~ $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

1.1) $y-x+8 \geq 0$

$$x+y+8 + y-x+8 = 16$$

$$y=0 \Rightarrow x \geq 8$$

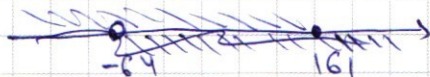
$$x^2 + 30x + 225 + 64 = 9$$

$$x^2 - 30x + 288 - 9 = 0$$

$$D = 900 - 4 \cdot 288 + 36 = 256 + 36 = 300 > 0 \Rightarrow 16 > -9$$

$$x_1 = \frac{30 + \sqrt{256 + 36}}{2} > 8 \quad \phi$$

$$x_2 = \frac{30 - \sqrt{256 + 36}}{2} > 0 \Rightarrow 900 > 256 + 36$$



$$x \in [-64; 161]$$

1.2) $y-x+8 < 0$.

$$y+x+8 - y-x-8 = 16$$

$$x=8 \Rightarrow y < 0 \quad \phi$$

$$2) x < 0, y < 0.$$

2.1) ~~fg+~~

$$y+x+8 \geq 0 \text{ и } y-x+8 \geq 0.$$

$$y+x+8+y-x+8=16$$

$$y=0 \text{ } \emptyset.$$

$$2.2) y+x+8 < 0 \text{ и } y-x+8 < 0$$

$$-y-x-8+y-x-8=16$$

$$y=-8$$

$$-2y-16=16$$

$$y=-16 \Rightarrow x < 8 \text{ и } x > -8$$

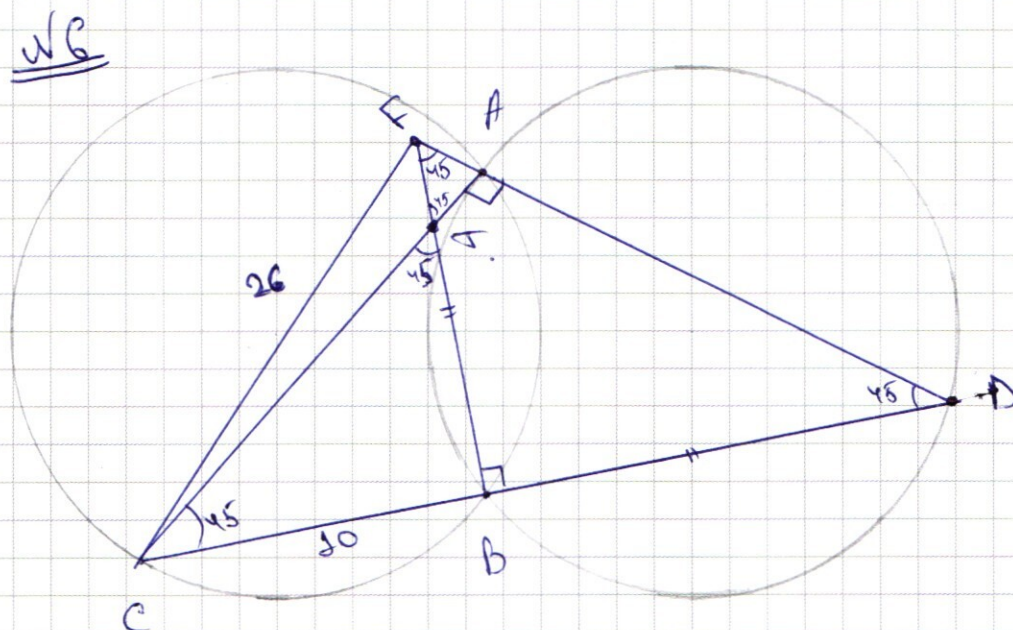
$$x^2 + 30x + 225 + 2y^2 = a$$

$$x^2 + 30x + 801 - a = 0$$

$$D = 900 - 4 \cdot 801 + 4a > 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{-30 + \sqrt{900 - 3204 + 4a}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



а) Т.к. радиусы окр. одинаковы, то дуга АВ образует $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ \Rightarrow$ отсюда следует что F лежит на AD. Т.к. $\angle AFB = \angle ACB = 45^\circ$, то F лежит на окр-ности из окр-ностей. Т.к. $\angle FAC = 90^\circ$, то CF - диаметр $\Rightarrow$ $\boxed{CF = 26}$

$$d) \quad FB^2 = 26^2 - 10^2 = 636$$

$$FB = \sqrt{636} \Rightarrow BD = \sqrt{636}$$

$$T = C \cap F \cap B$$

Р-н. АТВД - cyclic, то $\angle CTD = \angle ADB = 45^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow AF = AT \text{ u } TB = BC = 10. \Rightarrow AF = \sqrt{626} - 10$$

$$AC = AD = \frac{10 + \sqrt{636}}{\sqrt{2}}$$

$$\cancel{S_{ACF} = S_{FDC} = S}$$

$$S_{ACF} = (AF \cdot AC) / 2 = \frac{(\sqrt{636} - 10)(10 + \sqrt{636})}{2\sqrt{2}} = \frac{636 - 100}{2\sqrt{2}} = \frac{536}{2\sqrt{2}} = 134\sqrt{2}$$

т

Ответ: $S = 134\sqrt{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

$$5'' - 2$$

$$\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}$$

$$2, 2, 1, 1$$

$$7'' - 2$$

$$4, 2, 1, 1$$

$$8, 1, 1, 1$$

$$\begin{matrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$$C_5^2 \cdot C_4^2 = \frac{5!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 10 \cdot 6 = 60$$

$$C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 28 \cdot 15 \cdot 6$$

$$C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 = 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 2$$

$$C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^3 = 28 \cdot 15 \cdot 4$$

$$\begin{array}{r} 8! \\ \hline 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \\ \hline 2 \cdot 30 \cdot 42 \\ \hline 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \\ \hline 4 \cdot 5 \cdot 42 \\ \hline 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \\ \hline 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \end{array}$$

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

$$b_2 = bq$$

$$b(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = \frac{b(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$b_n = b \cdot q^{n-1}$$

$$q^{2338} + q^{2338}$$

$$\begin{aligned} b(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + \dots) &= b(1 + q + 40q^2 + q^3 + q^4 + 40q^5 + \dots) \\ &= b((1 + q)(1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{2338}) + q^2(40q^2(1 + q^3 + \dots + q^{2338})) \\ b(1 + q + 40q^2 + q^3 + \dots + q^{2338} + q^{2338} + 40q^{2338}) &= b(1 + q + 40q^2)(1 + q^3 + \dots + q^{2338}) \end{aligned}$$

$$b(1 + q + 40q^2)(1 + q^3 + \dots + q^{2338}) = 5b(1 + q + q^2)(1 + q^3 + \dots + q^{2338})$$

$$\begin{aligned} 1 + q + 40q^2 &= 5 + 5q + 5q^2 \\ 35q^2 - 4q - 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$D = 16 + 4 \cdot 4 \cdot 35 = 16 \cdot 36 = 24^2$$

$$q_1 = \frac{4 + 24}{35} = \frac{28}{35} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$q_2 < 0$$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40 = (x+10)(x-4)$$

$$\frac{2x+20}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4)$$

$$x \neq -10$$

$$\frac{\sqrt{x^3 - 64x + 200}}{2\sqrt{2}} = (x-4)$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 28 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$64 - 64 \cdot 164 +$$

$$425 \cdot 15 - 64 \cdot 15$$

$$200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

$$\sqrt{\frac{x^3 - 64x + 200}{8}} = \left(\left(\frac{x}{2}\right)^3 - 8x + 25\right)$$

$$\left(\left(\frac{x}{2}\right)^3 - 16\left(\frac{x}{2}\right) + 25\right)$$

$$125 - 16 \cdot 5 + 25$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 | x+2 | +4 \geq 0$$

$$1) x+2 \geq 0$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \quad | \quad x+1 \\ \underline{4x^4 + 4x^3} \\ -9x^3 - 9x^2 \\ \underline{-9x^3 - 9x^2} \\ 0 + 4x + 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 9x^2 + 4x - 4 \quad | \quad x-4 \\ \underline{4x^3 - 16x^2} \\ 9x^2 + 4x - 4 \end{array}$$

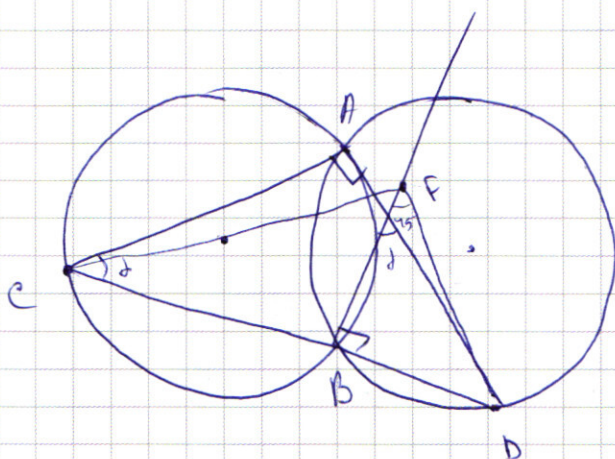
$$\begin{array}{r} 4x^3 - 9x^2 + 4x - 4 \quad | \quad x-2 \\ \underline{4x^3 - 8x^2} \\ -x^2 + 4x - 4 \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ -2x - 4 \end{array}$$

$$3,6$$

$$\begin{array}{r} 2520 \\ 1680 \\ \hline 4200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 28 \\ \hline 9 \\ 252 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 3 \\ \hline 840 \end{array}$$



$$\frac{8!}{2 \cdot 2 \cdot 6} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{x} = 30 \cdot 56$$

$$45 \cdot 56$$

$$28 \cdot 15 \cdot 46$$

$$\begin{array}{r} 2x + x01 - \\ \underline{x01 + x0 -} \\ 2x0 - \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8x + 4 \\ 21 - x0 - 2x | \quad 2x + x8 - 5x - \end{array}$$

$$4x^2 - x - 2$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 4 = 1 + 32 = 33$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 4x + 4 \mid x^2 - x - 2 \\ 4x^4 - 4x^3 - 8x^2 \\ \hline -x^3 - x^2 + 4x \\ -x^3 + x^2 + 2x \\ \hline -2x^2 + 2x + 4 \end{array}$$

$$104 = 2 \cdot 52 = 4 \cdot 26 = 8 \cdot 13$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ \times 289 \\ \hline 289 \\ 2320 \\ 1156 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\frac{x}{x^2} \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4)$$

$$\begin{array}{r} 300 \\ - 266 \\ \hline 644 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 26 \\ 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 1576 \\ + 225 \\ \hline 801 \end{array}$$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = 2\sqrt{2}(x-4)$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8(x^2 - 8x + 16)$$

$$x^3 - 72x + 232 = 0$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 86 \quad 80 + 48 = 128$$

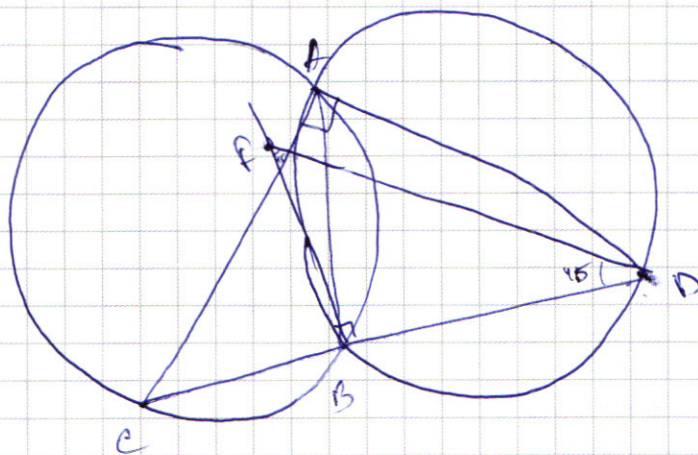
$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$-72 = 2 \cdot 3^2$$

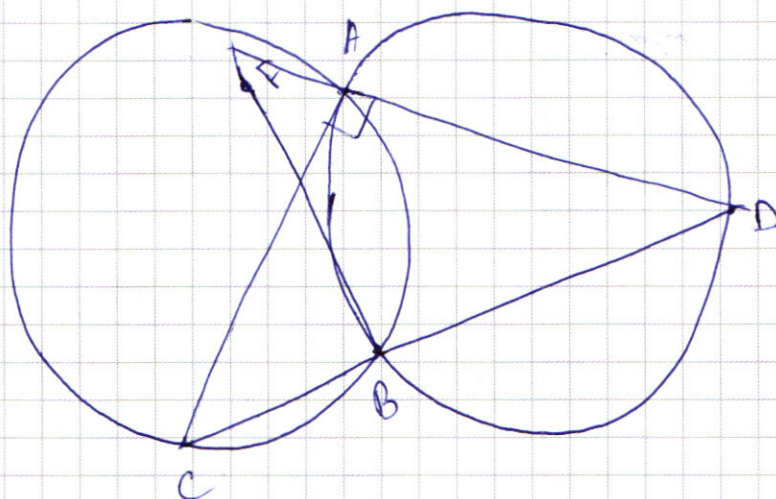
$$x^2(x-8) = -104$$

$$x^2(8-x) = 104$$

$$\begin{aligned} |y+x+8| + |y-x+8| &= 16 \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 &= a \end{aligned}$$



Решение
159



$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 216 \\ 52 \\ \hline 736 \end{array}$$

63674

159