

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
- ✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$4200 = 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 4$$

Заметим, что в искомым числе нет цифр „0”. Тогда единственные цифры, делящиеся на 5 — „5”, а на 7 — „7”. Значит в числе есть две „5” и две „7”. Оставшиеся цифры дают произведение 4. Тогда среди них либо одна „4” и три „1”, либо две „2” и две „1”. Возможных расположения ~~семи~~ цифр в числе: $C_8^2 \cdot C_6^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 28 \cdot 15 = 420$. Расставить остальные цифры можно в $(C_4^1 + C_4^2) = 4 + \frac{4 \cdot 3}{2} = 10$ способов. Значит всего чисел $420 \cdot 10 = 4200$.

Ответ: 4200

№ 2

$$S = v_1 + v_2 + \dots + v_{3000} = v_1 + v_1 \cdot k + v_1 \cdot k^2 + \dots + v_1 \cdot k^{2999} = \\ = v_1 (1 + k + k^2 + \dots + k^{2999}) = v_1 \cdot \frac{k^{3000} - 1}{k - 1}$$

$$S = v_1 \cdot \frac{k^{3000} - 1}{k - 1}$$

При увеличении членов, ~~делящихся на 3~~ делится на 3, в 90 раз мы к исходной сумме прибавляем $39(v_3 + v_6 + \dots + v_{3000}) = 39v_3(1 + k^3 + k^6 + \dots + k^{2997}) = \\ = 39v_1 \cdot k^2 \cdot \frac{k^{3000} - 1}{k^3 - 1} = \frac{39k^2}{k^3 - 1} \cdot S$

$$S + \frac{39k^2 S}{k^2 + k + 1} = 5S$$

$$\frac{39k^2}{k^2 + k + 1} = 4$$

$$39k^2 = 4k^2 + 4k + 4$$

$$35k^2 - 4k - 4 = 0$$

$$\cancel{35} \left(k^2 - \frac{4}{35}k - \frac{4}{35} \right) = 0$$

$$\left(k - \frac{2}{5} \right) \left(k + \frac{2}{5} \right) = 0$$

$$k = \frac{2}{5} \quad \vee \quad k = -\frac{2}{5}$$

$$\text{Все члены } > 0 \Rightarrow k > 0 \Rightarrow k = 0,4$$

Если увеличим в 3 раза член, номер которого делится на 2, мы к исходной сумме прибавим

$$2 \cdot (b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) = 2 \cdot b_1 (1 + k^2 + k^4 + \dots + k^{2000}) = 2b_1 k \frac{k^{2000} - 1}{k^2 - 1}$$

$$= \frac{2k}{k+1} \cdot S = \frac{2 \cdot 0,4}{1,4} S = \frac{8}{14} S = \frac{4}{7} S$$

$$S' = S + \frac{4}{7} S = \frac{11}{7} S$$

Ответ: сумма увеличится в $\frac{11}{7}$ раз

№ 3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40 \quad | \cdot 2\sqrt{2}$$

$$(x+10) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4) 2\sqrt{2}$$

$$x = -10 \quad \vee \quad \sqrt{x^3 - 64x + 200} = 2\sqrt{2}(x-4)$$

$$\begin{cases} x^3 - 64x + 200 = 8(x^2 - 8x + 16) \Leftrightarrow \\ x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 8x^2 + 42 = 0 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

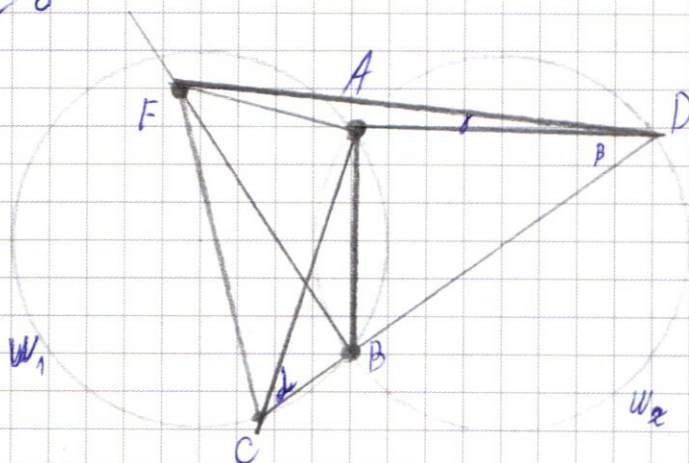
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 1 \pm \sqrt{13} \\ x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow x = 6 \vee x = 14\sqrt{3}$$

Ответ: $x = -10 \vee x = 14\sqrt{3} \vee x = 6$

и 6



а) 1) $\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow \angle AB = 90^\circ$

2) $AB = 2R_1 \sin \alpha$
 $AB = 2R_2 \sin \beta$
 $R_1 = R_2$
 $\Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta$
 $\sin \alpha = \sin(90^\circ - \beta)$
 $\beta = \alpha = 45^\circ$

3) $BF = BD$
 $\angle FBD = 90^\circ$
 $\Rightarrow \angle B + \gamma = 45^\circ$
 $\Rightarrow \gamma = 0^\circ \Rightarrow F \in (AD)$

$$\Rightarrow \angle FAB = 180^\circ - \angle CAD = 90^\circ$$

4) $\angle FAC = 90^\circ$
 $\angle FBC = 90^\circ$
 $\Rightarrow F, A, B, C \in W_1$
 CF — диаметр $W_1 \Rightarrow CF = 2R_1 = 26$

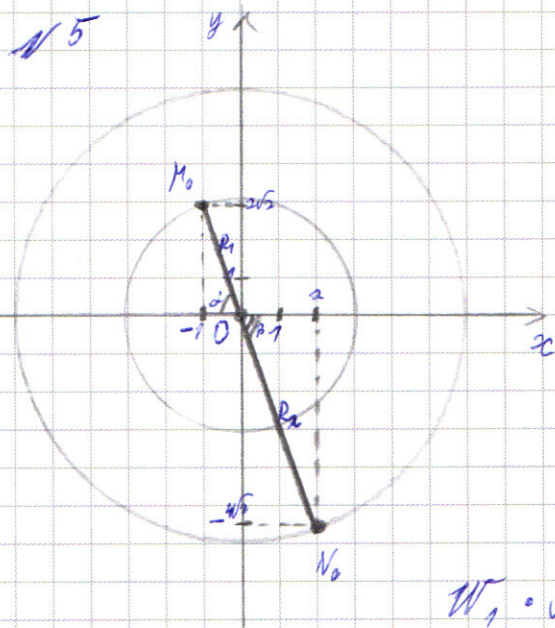
б) 1) $BC = 10$
 $CF = 26$
 $\angle FBC = 90^\circ$
 $\Rightarrow BF = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24 \Rightarrow BD = 24 \Rightarrow$
 $\Rightarrow CD = 34$

2) $CD = 34$
 $\angle CAD = 90^\circ$
 $\angle B = 45^\circ$
 $\Rightarrow AC = AD = 17\sqrt{2}$

3) $AC = 12\sqrt{2}$
 $FC = 26$
 $\angle FAC = 90^\circ$
 $\Rightarrow AF = \sqrt{26^2 - (12\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 \cdot 169 - 288 \cdot 2} =$
 $= \sqrt{676 - 576} = \sqrt{100} = 10$

$$4) \angle FAC = 90^\circ \Rightarrow S_{\triangle FAC} = AF \cdot AC : 2 = 7\sqrt{2} \cdot 12\sqrt{2} : 2 = 4 \cdot 14 = 119$$

Ответ: $CF = 26$, $S_{\triangle AFC} = 119$



$$\frac{2\sqrt{2}}{1} = \frac{4\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \alpha = \tan \beta$$

M_0, O, N_0 лежат на одной прямой
Пусть W_1 — угловая скорость
направления, W_2 — нескоря.

$$W_1 = 2,5 W_2$$

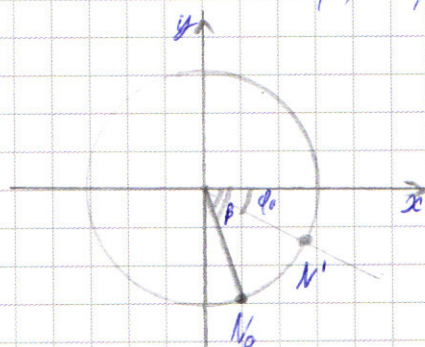
$$W_1 R_1 = 2,5 W_2 R_2$$

$$W_1 \cdot \sqrt{(-1)^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2,5 W_2 \sqrt{(2)^2 + (-4\sqrt{2})^2}$$

$$W_1 \cdot 3 = 2,5 W_2 \cdot 6$$

$$W_1 = 5 W_2 \Rightarrow \frac{W_1 - W_2}{W_2} = 4$$

Пусть φ_0 следующей "встречи" нескоря W_2 противные друг
величиной φ_1 , тогда $\frac{\varphi_1}{\pi} = \frac{W_2}{W_1 - W_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$



$$\sin \beta = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos \beta = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\beta = \varphi_0 + \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \varphi_0 = \cos(\beta - \frac{\pi}{4}) = \cos \beta \cos \frac{\pi}{4} + \sin \beta \sin \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4 + \sqrt{2}}{6}$$

$$\sin \varphi_0 = \sin(\beta - \frac{\pi}{4}) = \sin \beta \cos \frac{\pi}{4} - \cos \beta \sin \frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{4 - \sqrt{2}}{6} \Rightarrow N' \left(\frac{4 + \sqrt{2}}{6}; -\frac{4 - \sqrt{2}}{6} \right)$$

Пусть φ_2 второй "встречи" нескоря противные друг
величиной φ_2 , тогда $\frac{\varphi_2}{2\pi} = \frac{1}{4} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. Тогда каждая

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Следующая „встреча“ происходит, когда пещарь
противлет дугу величиной $\frac{\pi}{2}$. Значит точек
„встречи“ всего $(2\pi : \frac{\pi}{2}) = 4$, а ~~на~~ координаты пещаря
и $N \left(\frac{4+\sqrt{2}}{8} ; -\frac{4-\sqrt{2}}{2} \right)$ в моменты „встречи“:

$$N' \left(\frac{4+\sqrt{2}}{8} ; -\frac{4-\sqrt{2}}{8} \right); N'' \left(\frac{4-\sqrt{2}}{8} ; \frac{4+\sqrt{2}}{8} \right); N''' \left(-\frac{4+\sqrt{2}}{8} ; \frac{4-\sqrt{2}}{8} \right);$$

$$N'''' \left(-\frac{4-\sqrt{2}}{8} ; -\frac{4+\sqrt{2}}{8} \right).$$

Под „встречей“ подразумевается момент,
когда расстояние между карасём и пещарём
~~равно~~ наименьшее, т. е. когда $M \in [ON]$.

и 4

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 | x+2 | + 4 \geq 0$$

$$1) x < -2$$

$$|x+2| = -x-2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 8x^3 - 3x^3 - 6x^2 + 17x^2 + 34x - 30x - 60 + 64 \geq 0$$

$$(x+2)(4x^3 - 3x^2 + 17x - 30) + 64 \geq 0$$

$$x < -2 \Rightarrow \begin{array}{l} 4x^3 < 0 \\ -3x^2 < 0 \\ 17x < 0 \\ x+2 < 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 4x^3 - 3x^2 + 17x - 30 < 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(4x^3 - 3x^2 + 17x - 30) + 64 > 0$$

Тогда неравенство верно для любых $x < -2$

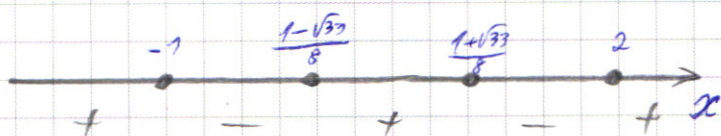
2) $x \geq -2$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0$$

$$(x-2)(x+1)(4x^2 - x - 2) \geq 0$$

$$4(x-2)(x+1)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$$

$$x \geq -2 \Rightarrow x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$$

Сложим наши два решения и получим, что $x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$

~ 7

1) $x \neq 0$: ~~н.к.~~

$$\begin{cases} |y+8| + |y-8| = 16 \\ 15^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |y+8| = 8 \\ (|y|-8)^2 = a-225 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-16 \\ (|y|-8)^2 = a-225 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-16 \\ 8^2 = a-225 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-16 \\ a=289 \end{cases}$$

$(0; 0)$ и $(0; -16)$ при $a = 289$

Заметим, что если $(x_0; y_0)$ - решение $\Rightarrow$
 $\Rightarrow (-x_0; y_0)$ - тоже решение системы.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$(4x^4 + 8x^3) + (-3x^3 - 6x^2) + 17x^2 + 34x + (-30x - 60) + 60 \geq 0$$

$$(x+2)(4x^3 - 3x^2 + 17x - 30) - 60 \geq 0$$

$$2) \quad y - x + 8 \geq 0 \quad y + x + 8 \geq 0$$

$$y - x + 8 + y + x + 8 = 16$$

$$2y = 0$$

$$y = 0$$

$$-x + 8 \geq 0$$

$$x \leq 8$$

$$x + 8 \geq 0$$

$$x \geq -8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \in [-8; 8] \end{cases}$$

$$3) \quad y - x + 8 \leq 0 \quad y + x + 8 \leq 0$$

$$-y + x - 8 - y - x - 8 = -16$$

$$-2y = 32$$

$$y = -16$$

$$-16 - x + 8 \leq 0$$

$$x \geq -8$$

$$-16 + x + 8 \leq 0$$

$$x \leq 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -16 \\ x \in [-8; 8] \end{cases}$$

$$4) \quad y - x + 8 \geq 0 \quad y + x + 8 \leq 0$$

$$y - x + 8 - y - x - 8 = -16$$

$$-2x = -16$$

$$x = 8$$

$$y + 16 \geq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$39k^2 = 4(k^2 + k + 1)$$

$$35k^2 - 4k - 4 = 0$$

$$k = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16 \cdot 35}}{70} = \frac{4 \pm 24}{70} = \frac{2 \pm 12}{35}$$

$$\frac{14}{35} \text{ и } \frac{40}{35}$$

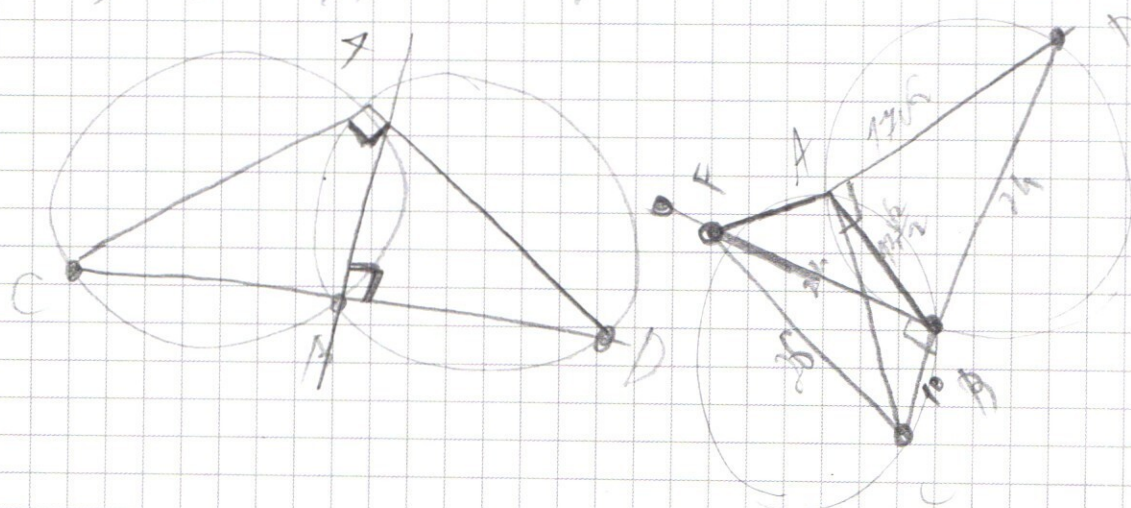
$$\frac{2}{5} \text{ и } \frac{8}{7}$$

$$\frac{2}{5} \text{ и } \frac{2}{7}$$

$$S + 2(b_2 + b_4 + \dots + b_{2000}) = S + 2 \cdot b_2 (1 + k^2 + k^4 + \dots + k^{2000}) =$$

$$= S + 2 \cdot b_1 \cdot k \cdot \frac{k^{2000} - 1}{k^2 - 1} = S + S \frac{2k}{k+1}$$

$$= S + S \frac{0,8}{1,4} = \frac{2,2}{1,4} S = \frac{11}{7} S$$



$$1) y - x + 8 \geq 0 \quad , x > 0$$

$$2y + 16 = 16$$

$$y = 0$$

$$x \leq 8$$

$$x \in [7^2; 15^2]$$

$$u \quad x > \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P_1 W_1 = P_2 W_2$$

$$W_1 = 5 W_2$$

$$2) y - x + 8 \leq 0$$

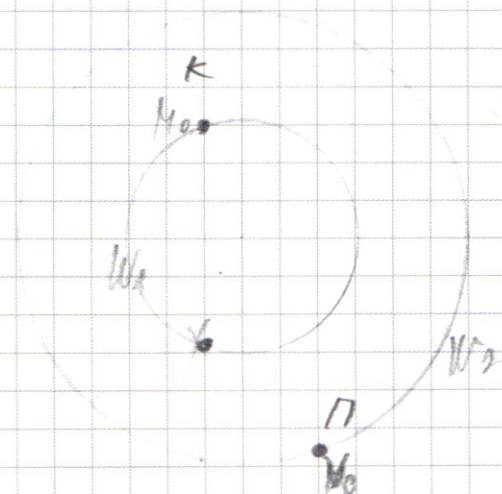
$$2y + 16 = -16$$

$$y = -16$$

$$-16 + 8 - x \leq 0$$

$$x \leq 8$$

$$x \in [7^2; 15^2]$$



$$3) y - x + 8 \geq 0$$

$$y - x + 8 \leq 0$$

$$y - x + 8 - y - x + 8 = 16$$

$$2x = 16$$

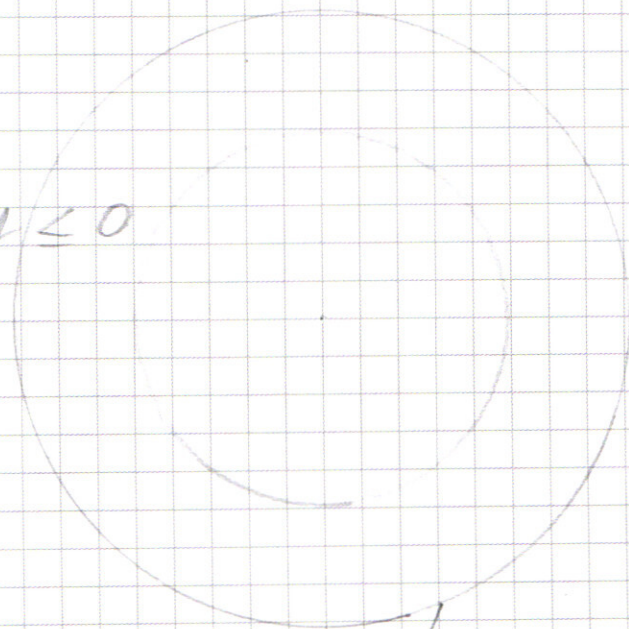
$$x = 8$$

$$y \geq -16$$

$$y \leq 0$$

$$(y + 8)^2 = x - 49$$

$$x \in [19^2; 49 + 8^2]$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

11

$$4900 = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2$$

$$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2$$

$$C_8^2 \cdot C_8^2 \cdot (C_4^1 \cdot 2 + C_4^2 \cdot 2^2) = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot (4 \cdot 2 + \frac{4 \cdot 3}{2}) =$$

$$= 28 \cdot 15 \cdot (8 + 6) = 4 \cdot 60 \cdot 30 = 210 \cdot 60 = 12600$$

12

$$\left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \right) \sqrt{x^3 - 8x^2 + 200} = (x+10)/(x-4)$$

$$\sqrt{x^3 - 8x^2 + 200} = (x-4)/2\sqrt{2}$$

$$x = -10$$

✓

$$x^3 - 8x^2 + 200 = 8/(x-4)^2$$

$$x^3 - 8x^2 + 200 - 128 = 0$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$(x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+48}}{2} =$$

$$x = 6 \quad \vee \quad x =$$

$$y = x \in [-24, 8]$$

$$y = x \in [-24, 8]$$

13

$$12\sqrt{11+12} = 12\sqrt{13}$$

$$1) x \geq -2$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x - 14 \geq 0$$

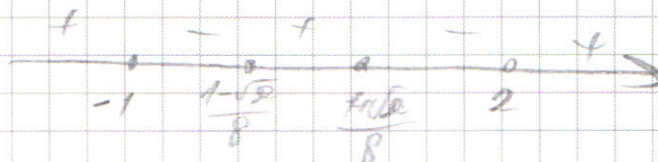
$$4x^4 + 4x^3 - 9x^3 - 9x^2 + 4x - 14 \geq 0$$

$$(x+1) | 4x^3 - 9x^2 + 4 | \geq 0$$

$$(x+1) | 4x^3 - 8x^2 - x^2 + 2x + 4 | \geq 0$$

$$(x+1) | 4x^3 - x^2 - 2x + 4 | \geq 0$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8}$$



$$x \in -$$

$$[-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$$

$$2) x < -2$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$324 - 135 + 99 - 12$$

$$\frac{4}{625} - \frac{25}{625} + \frac{11 \cdot 25}{625} + \frac{4}{25} \geq 0$$

$$\frac{3}{4} - \frac{15}{8} + \frac{99}{4} - 6 + 4 \geq 0$$

$$(y+8)^2 = 8$$

$$y = 0 \cup y = -10$$

$$220 = (y+8)^2 - 8$$

$$S = b_1 (1 + k + k^2 + \dots + k^{2999}) = b_1 \frac{k^{3000} - 1}{k - 1}$$

$$99 (b_2 + b_6 + \dots + b_{3000}) = 99 b_1 k^2 (1 + k^3 + k^6 + \dots + k^{2997})$$

$$= 99 b_1 k^2 \frac{k^{3000} - 1}{k^3 - 1} = 4S = 4b_1 \frac{k^{3000} - 1}{k - 1}$$