МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1; 2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2; -4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16, \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

задание 4.

$4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4\geq 0$

$|x+2| = \begin{cases} x+2 & x\geq -2 \\ -x-2 & x<-2 \end{cases}$

$|x+2|$ при $x+2\geq 0$. $x\geq -2$

$4x^4+x^2+4x-5x^2(x+2)+4\geq 0$

$4x^4-5x^3+x^2-10x^2+4x+4\geq 0$

$4x^4-5x^3-9x^2+4x+4\geq 0 \to 4x^4-5x^3-9x^2+4x+4\geq 0$

Найдем корни ур-е $4x^4-5x^3-9x^2+4x+4=0$

подставим в ур-е $x=2$: $4\cdot 16-5\cdot 8-9\cdot 4+4\cdot 2+4$

$=64-40-36+8+4=24-36+12=0$

2 - корень ур-я

Поделим уголком на $x-2$ (если x_1 - корень ур-я, то ур-е делится $x-x_1$)

$$\begin{array}{l} 4x^4-5x^3-9x^2+4x+4 \;\big|\; x-2 \\ -\;4x^4-8x^3 \qquad\qquad\quad 4x^3+3x^2-3x-2 \\ \quad 3x^3-9x^2 \\ -\;3x^3-6x^2 \\ \quad -3x^2+4x \\ -\;-3x^2+6x \\ \quad \cancel{10x+4} \\ \quad -2x+4 \\ -\;-2x+4 \\ \quad 0 \end{array}$$

$\downarrow$

$4x^3+3x^2-3x-2$

$4x^3+3x^2-3x-2=0 \to 4x^3+3x^2-3x-2=0$

Подставим в ур-е $x=-1$

получим: $-4+3+3-2=6-6=0$

$x=-1$ - корень ур-я

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

поделим в столбик на $x+1$ $\left((x-x_2)\ x_2=-1\right)$

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3+3x^2-3x-2 & x+1 \\
\underline{4x^3+4x^2} & 4x^2-x-2 \\
\quad -x^2-3x & \\
\quad \underline{-x^2-x} & \\
\qquad -2x-2 & \\
\qquad \underline{-2x-2} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$4x^2-x-2=0$

$D=1+4\cdot 2\cdot 4=1+32=33$

$x_3=\frac{1+\sqrt{33}}{4\cdot 2}=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$

$x_4=\frac{1-\sqrt{33}}{4\cdot 2}=\frac{1-\sqrt{33}}{8}$

Итого у нас 4 корня, которые соответствуют $x\geq -2$

Решим неравенство методом интервалов на данном промежутке:

$-2 \quad + \quad -1 \quad - \quad \frac{1-\sqrt{33}}{8} \quad + \quad \frac{1+\sqrt{33}}{8} \quad - \quad 2 \quad +$ $\quad x$

$4x^4-5x^3-9x^2+4x+4\geq 0$

при $x=10$: $4\cdot 10000-5\cdot 1000-9\cdot 100+40+4$

$=40000-5000-900+44>0$

~~Из этого~~ При $x\geq -2$ неравенству удовлетворяют промежутки: $[-2;-1]\cup\left[\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right]\cup[2;+\infty)$

Теперь рассмотрим случай $x<-2$

~~$|x+2|$ $x<$~~ $|x+2|$ при $x<-2$ $\rightarrow (-x-2)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

получим: $4x^4+x^2+4x-5x^2(-x-2)+4\geq 0$

$4x^4+x^2+4x+5x^3+10x^2+4\geq 0$

$4x^4+5x^3+11x^2+4x+4\geq 0$

~~Затем~~ Заметим, что $4x^4$; $11x^2$ – всегда положительные числа,

$5x^3$; $4x$ – отрицательные $(x<-2)$

Сравним попарно на данном промежутке

$4x^4$ и $5x^3$, найдем, когда их сумма ≥ 0

$4x^4+5x^3>0$

$x^3(4x+5)\geq 0$

$x=0$ $\quad 4x+5=0$

$x=\frac{-5}{4}$ $\quad$ подставим $x=10$

$+ \quad -\frac{5}{4} \quad - \quad 0 \quad +$ $\qquad 1000(40+5)\geq 0$ – выполняется

Решив неравенство методом интервалов, видим, что $4x^4+5x^3\geq 0$ на отрезке $(-\infty; -\frac{5}{4}]$

Соответственно, на отрезке $(-\infty;-2)$ $4x^4+5x^3>0$

~~Сравним~~ Теперь ~~проверим~~ решим неравенство ~~неравенство~~ $11x^2+4x\geq 0$

$x(11x+4)\geq 0$ $\quad x=0;\ x=\frac{-4}{11}$

$+ \quad -\frac{4}{11} \quad - \quad 0 \quad +$

подставим $x=1$:

$1(11+4)>0$ – выполняется

Решив неравенство методом интервалов видим, что
$11x^2+4x>0$ на промежутке $x\in(-\infty;-2)$
Т.к. на нашем интервале
$4x^4+5x^3>0$ и $11x^2+4x>0$
и 4 – положительно число, то
$4x^4+5x^3+11x^2+4x\geq 0$ на интервале $x\in(-\infty;-2)$
Поэтому нам подходит весь интервал $x\in(-\infty;-2)$
Объединяя решения, получаем:
$x\in(-\infty;-1]\cup[\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8})\cup[2;+\infty)$
Ответ: $(-\infty;-1]\cup[\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}]\cup[2;+\infty)$

Задача 3.

$\cancel{b_1, b_2, \ldots, b_{3000}}$
$\cancel{b_n=b_1\cdot q^{(n-1)}}$
$\cancel{S_{3000}=\frac{b_1\cdot(1-q^{3000})}{1-q}}$

$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$

$\left(\frac{2x+5\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$

$\frac{(2x+20)}{4\sqrt{2}}\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$

$x^2+6x-40=0$
$D=36+40\cdot4=196$
$x_1=\frac{-6+14}{2}=4$
$x_2=\frac{-20}{2}=-10$

$2x+20=0$
$2x=-20$
$x=-10$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

У $2x+20$ и $x^2+6x-40$
есть общий корень: $x=-10$
Проверим, $\sqrt{x^3-64x+200} \geq 0$ при $x=-10$ или нет
$= -1000+640+200$
$= -1000+840 = -160 < 0$
Значит $x=-10$ не подходит

$\frac{(2x+20)}{4\sqrt{2}}\sqrt{x^3-64x+200} - (x^2+6x-40) = 0$

$x^2+6x-40 = (x+10)(x-4)$

$\frac{(x+10)}{2\sqrt{2}}\sqrt{x^3-64x+200} - (x+10)(x-4) = 0$

$(x+10)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^3-64x+200}}{2\sqrt{2}} - x+4\right) = 0$

$x+10=0$ - мы уже рассмотрели; $x=-10$ не подходит

$\sqrt{x^3-64x+200} = (x-4)\cdot(2\sqrt{2})$

$x-4 \geq 0$
$x \geq 4$ - ОДЗ

Возведем обе части в квадрат

$x^3-64x+200 = (x^2-8x+16)\cdot 8$
$x^3-64x+200 = 8x^2-64x+128$
$x^3-8x^2+72=0$ $\quad x^3-8x^2+36\cdot 2=0$

Подставим $x=6$: $216-8\cdot 36+36\cdot 2 = 36\cdot 6-36\cdot 6=0$

$x=6$ – корень ур-я и удовлетворяет ОДЗ

Поделим ~~x^3-64x~~ x^3-8x^2+72 на $x-6$

$$\begin{array}{r|l} x^3-8x^2+72 & x-6 \\ \hline -\;x^3-6x^2 & x^2-2x-12 \\ \hline -2x^2 & \\ -\;-2x^2+12x & \\ \hline -12x+72 & \\ -\;-12x+72 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Итого мы получили:

$x^2-2x-12=0$

$D=4+48=52=13\cdot4$

$x_2=\frac{2+2\sqrt{13}}{2}=1+\sqrt{13}$ $\quad x_3=\frac{2-2\sqrt{13}}{2}=1-\sqrt{13}$

не подходит по ОДЗ

Итого ОДЗ подходят 2 корня: $1+\sqrt{13}$; 6

Ответ: $1+\sqrt{13}$; 6

Задача 11

$4900=70\cdot70=7\cdot7\cdot10\cdot10=7\cdot7\cdot5\cdot5\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1$

Восьмизначное число – восемь цифр от 0 до 9 (кроме первой)

Соответственно в числе есть две 7; две 5; две 2 и две 1 (чтобы их произведение было 4900)

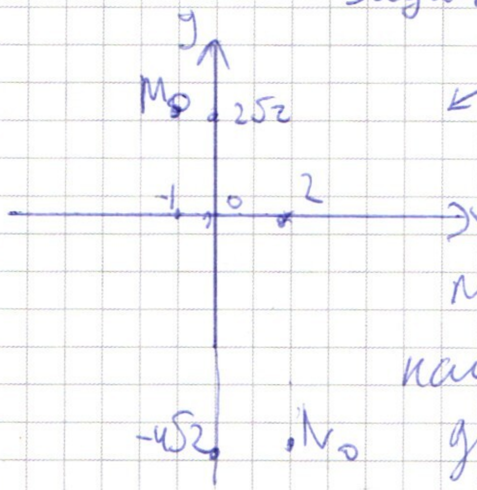
Осталось посчитать число комбинаций.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5.



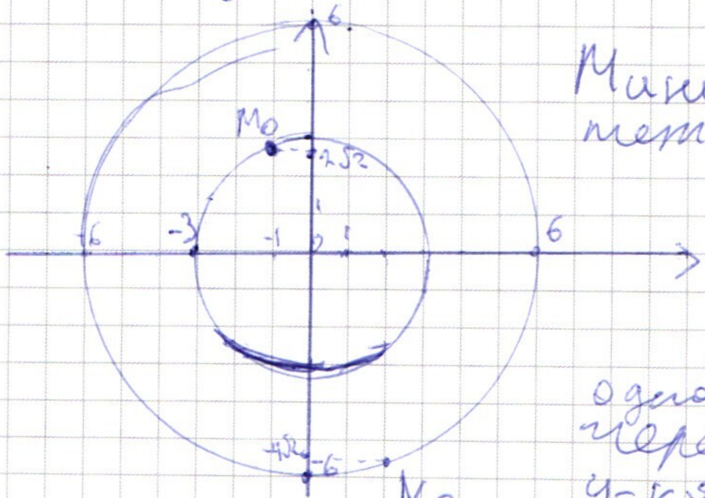
Эскиз рисунка (приблизительно)

Зная координаты, можно по Т. Пифагора найти радиусы окружностей движения карася и пескаря.

$r_{карася} = \sqrt{1+(2\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+8} = 3$

$r_{пескаря} = \sqrt{2^2+(-4\sqrt{2})^2} = \sqrt{4+32} = 6$

Нарисуем более точно ~~графики~~ оси координат и положения рыб



Минимальным расстоянием между ними будет $R_{песк} - r_{карася}$

В этот момент они находятся на одной прямой, проходящей через начало координат $y = kx$

Длина окружности $L_{окр} = 2\pi r$

$$\frac{L_{песк}}{L_{кар}} = \frac{2\pi \cdot 6}{2\pi \cdot 3} = 2$$

Скорость карася в 2,5 р > $v_{пескаря}$

У нас есть цифры: 2, 2, 7, 7, 5, 5, 1, 1
И есть 8 позиций в числе

$\overline{8} \cdot \overline{7} \cdot \overline{6} \cdot \overline{5} \cdot \overline{4} \cdot \overline{3} \cdot \overline{2} \cdot \overline{1}$

кол-во вариантов, как можно заполнить число (число размещений)
$= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
но 2 и 2, 7 и 7, 5 и 5, 1 и 1 –
~~по~~ каждая цифры по двое,
и они ~~зазваивают~~ увеличивают число
вариантов: 11227755 – одно число
Нам нужно понять, сколькими
разами можно получить одно
число (~~Если считать~~
11 22 77 55
$1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2$
2^4 вариантов заставить (составить)
одно число (нам без разницы
какая из двух одинаковых
чисел будет стоять в восьмизначном
числе на одном месте)
Поэтому $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ вариантов
нужно поделить на 2^4
Итого вариантов составить восьмизначное
число $= \frac{\cancel{8} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{8} \cdot \cancel{2}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1$
$= 2520$ вариантов
Ответ: 2520 вариантов

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$S_{3000} = \frac{b_1 \cdot (1-q^{3000})}{1-q} = S$

После увеличения в 40 раз b_3, b_6...

$40b_3$, $40b_6$, $40b_9$ — новая прогрессия

$b_1 = 40b_3$ $b_2 = 40b_6$ $b_3 = 40 \cdot b_1 \cdot q^2$

$b_n = 40b_1 q^2 (q^3)^{n-1}$ $n \leq n_{max} = 1000$

Новая сумма, в 5 раз большая S, ~~...~~

будет суммой прогрессии $b_n = 40b_1q^2(q^3)^{n-1}$

и суммы членов b_1, b_2, b_4 ... b_{2999}

Их сумма равна:

~~$S_{3000} = S$~~ $S - S_{3,6,9} = S_{124658}$

$S_{3,6,9}$ — прогрессия, состоящая из начальных b_3 b_6 b_9 b_1...

$n_{max} = 1000$

b_n этой прогрессии $= b_1 q^2 (q^3)^{n-1}$ $S_n = \frac{b_1 q^2 (1-q^{3000})}{1-q^3}$

$S_{124658} = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q} - \frac{b_1 q^2 (1-q^{3000})}{1-q^3}$

(сумма не кратных 3)

Сумма прогрессии, состоящих из $40b_3$, $40b_6$...

$= \frac{40b_1 q^2 (1-q^{3000})}{1-q^3}$

Итого S в 5 раз большая начальной $= \frac{40b_1q^2(1-q^{3000})}{1-q^3} + \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q} - \frac{b_1q^2(1-q^{3000})}{1-q^3}$

(a) $5S = 5b_1\frac{(1-q^{3000})}{1-q} = \frac{40b_1q^2(1-q^{3000})}{1-q^3} + \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q} - \frac{b_1q^2(1-q^{3000})}{1-q^3}$

Теперь посмотрим, что будет

после удвоения четных в 2 раза.

I. Рассм. прогрессию $3b_2; 3b_4; 3b_{3000}$

$b_n = 3b_1q\cdot(q^2)^{n-1}$ таких чисел

$S_{1500} = 3\cdot\frac{b_1q(1-q^{3000})}{1-q^2}$ $\frac{3000}{2}=1500$

II. Рассм. прогрессию $b_1; b_3; b_5$ – нечетных чисел их 1500 (половина)

$b_n = b_1(q^2)^{n-1}$ $S_{1500} = \frac{b_1\cdot(1-q^{3000})}{1-q^2}$

Сумма всех членов после ~~удв~~ утроения прогрессии будет сумма $b_1, b_3, b_5\ldots$ и суммы прогрессии $b_2; b_4; b_6\ldots$

$= 3b_1q\frac{(1-q^{3000})}{1-q^2} + b_1\frac{(1-q^{3000})}{1-q^2}$

$= b_1\left(\frac{1-q^{3000}}{1-q^2}\right)\cdot(3q+1) = \frac{b_1(1-q^{3000})}{(1-q)}\cdot\left(\frac{3q+1}{(1+q)}\right)$

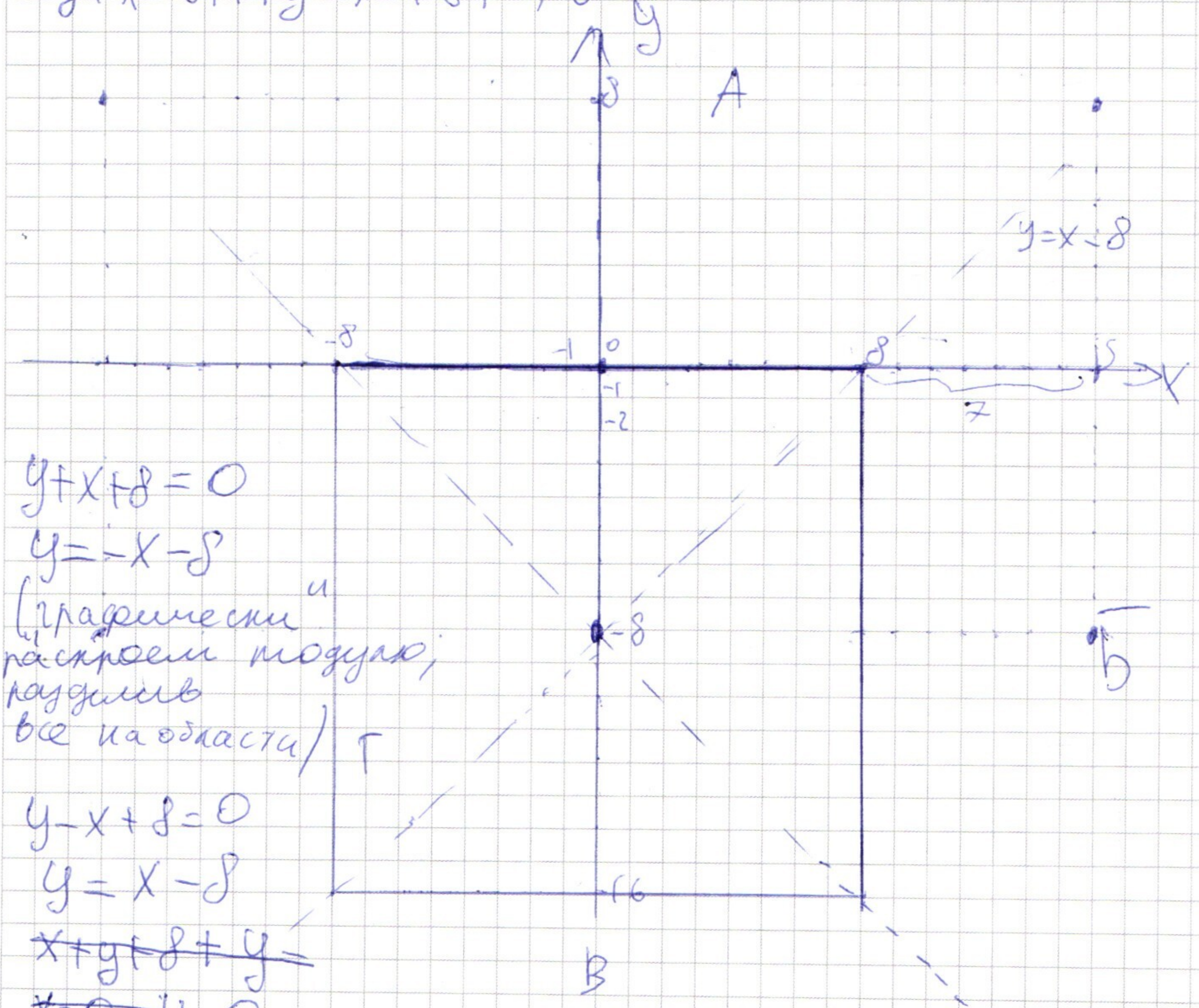
перепишем (a) $5S = 5b_1\frac{(1-q^{3000})}{1-q} = \frac{40b_1q^2(1-q^{3000})}{1-q^3} + \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q}$

$4b_1\left(\frac{1-q^{3000}}{1-q}\right) = \frac{39b_1q^2(1-q^{3000})}{1-q^3}$ $- \frac{b_1q^2(1-q^{3000})}{1-q^3}$

$\frac{4}{1-q} = \frac{39q^2}{(1-q^3)} \rightarrow \frac{4}{1-q} = \frac{39q^2}{(1-q)(1+q+q^2)}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|y+x+8|+|y-x+8|=16$



$y+x+8=0$

$y=-x-8$

(графически раскроем модуль, разделив все на области)

$y-x+8=0$

$y=x-8$

$\cancel{x+y+8+y=}$

$\cancel{x=0 \quad y=0}$

В области A все раскрывается с +

$x+y+8+y-x+8=16$

$2y+16=16$

$y=0$ (на отрезке от $x=-8$ до $x=8$ $\quad x\in[-8;8]$

$$4 = \frac{39q^2}{1+q+q^2}$$

$4q^2+4q+4=39q^2$

$35q^2-4q-4=0$

$D = 16+140\cdot 4 = 576$

$D = \frac{4+24}{70} = \frac{4}{10} = 0,4$; $\frac{4-24}{70} < 0$ - не подходит

$q = 0,4$

$$S_{\text{которое нужно найти}} = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q} \cdot \left(\frac{3q+1}{1+q}\right)$$

$$= S \cdot \left(\frac{3\cdot 0,4+1}{1,4}\right) = S\frac{2,2}{1,4} =$$

$$S\,\frac{22}{10}\cdot\frac{10}{14} = \frac{11}{7}S$$

Соответственно: сумма S увеличится в $\frac{11}{7}$ раз

Ответ: в $\frac{11}{7}$ раз S увеличится

№7.

$$\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16 \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases}$$

первое ур-е - это прямая
Изобразим ее график

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

В области Б первый модуль с +
второй с −

$x+y+8-y+x-8=16$

$2x=16$

$x=8$

В области В оба модуля раскрываются с −

$-x-y-8-y+x-8=16$

$-2y=32$

$y=-16$

В области Г первый модуль с −
второй с +

$-y-x-8+y-x+8=16$

$-2x=16$

$x=-8$

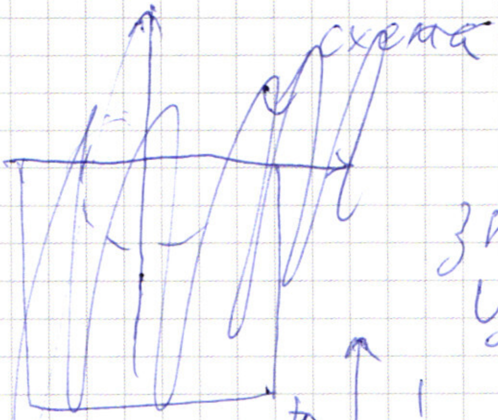
Итого мы получили, что 1 ур-е представляет из себя на графике квадрат с стороной 16, смещенный вниз.

Теперь посмотрим на второе ур-е

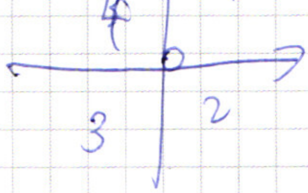
$(|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a$

это окружность с переменным радиусом $\sqrt{a}$

~~Раскроем модули~~



$|x|$ и $|y|$ будут менять знак по прямым $y=0$ $x=0$



4 области

Рассмотрим 1 область

$(x-15)^2+(y-8)^2=a$

это будет смещенная на 15 $\rightarrow$ вправо и на 8 вверх относит $(0;0)$ окружность отн~~о~~ (ее кусочек)

$R=\sqrt{a}$

Пока $R<\sqrt{64+49}=\sqrt{113}$ – точек касания нет

когда $R=\sqrt{113}$ – 1 точка

$R>\sqrt{64+225}=\sqrt{289}>17$ – нет решений

(?) $R>\sqrt{113}$ – всеравно 1 точка, т.к остальная часть окружности не попадает в данную область раскрытия модуля.

Рассмотрим 2 область (правый нижн. угол)

$(x-15)^2+(y+8)^2=a$

это окружн. смещенная на 15 $\rightarrow$ вправо и на 8 вниз

пока $R<7$ – точек касания нет; ~~$R\geq 7$ 1 точка касания~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~R>7 - две точки касания~~

когда $R > \sqrt{64+225} = \sqrt{285+4} = \sqrt{289} = 17$

- точек касания нет

$7 \leq R < 17$ - 2 точки касания

Рассмотрим 3 область:

все модули с -

$(x+15)^2 + (y+8)^2 = a$

Это окружн. смещенная на 15 влево и на 8 вн.

$R = 7$ - 1 решение $R < 7$ - нет решений

$R > 17$ - нет решений

$7 < R < 17$ - 2 решения

Рассмотрим 4 область

здесь $|x|$ с - раскрывается $|y|$ с плюсом

$(x+15)^2 + (y-8)^2 = a$

Это окр. смещенная на 15 влево и на 8 вверх

Пока $R < \sqrt{49+64} = \sqrt{100+13} \leq \sqrt{113}$

$R < \sqrt{113}$ - нет решений

$R = \sqrt{113}$ - 1 решение

$R > \sqrt{225+64} = \sqrt{289}$ $R > 17$ - нет решений

$\sqrt{113} \leq R \leq \sqrt{17}$ - 1 решение соответственно, осталось определить промежуток R окружности, где система имеет 2 решения

от 1 области:
$R < \sqrt{113}$ - 0 решений
$\sqrt{113} \leq R \leq 17$ - 1 реш
$R > 17$ - 0 реш

от 3 области
$R < \sqrt{113}$ - 0 реш
$\sqrt{113} \leq R \leq 17$ - 1 решение
$R > 17$ - 0 реш

2 обл.
$R < 7$ - 0 реш
$7 \leq R \leq 17$ - 1 реш
$R > 17$ - 0 реш

4 обл
$R < 7$ - 0 реш
$7 \leq R \leq 17$ - 1 реш
$R > 17$ - 0 реш

$\sqrt{113} > 7$

Объединив все решения, получаем, что два решения система будет иметь при $R = 7; 17$

~~$7 \leq R < \sqrt{113}$~~
~~$7 \leq \sqrt{a} < \sqrt{113}$~~
~~$49 \leq a < 113$ - ответ.~~

$\sqrt{a} = 7$
$a = 49$
$\sqrt{a} = 17$
$a = 289$

~~Ответ: при $49 \leq a < 113$ система будет иметь 2 решения.~~

Ответ: при $a = 49; 289$ система будет иметь 2 решения

$a = 289$ подходит, т.к. окружности будут пересекать квадрат лишь в двух точках: $x = 0$ $y = 0; -16$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4900 : 70 = 70$

$4900 = 70 \cdot 70 = 7 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 10 = 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$

$520 : 7$, -49, 30

$42 \cdot 60 = 520$

$2-7$, $2-5$, $2-$

$= 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$

$-4+3+3-2$

$520 : 7$, -49, 30

$4x^2 - x - 2(x+1)$

$4x^3 - x^2 - 2x$

$+4x^2 - x - 2$

$\cancel{x \geq -2}$

$\cancel{x+2 \geq 0}$

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$

$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$

$\cancel{4-5}$

$= 4x^3 + 3x^2 - 3x - 2 \quad x \geq -2$

$4 - 5 - 9 + 4 + 4 = 12$

2

$4 + 5 + 9 + \cancel{4}$

$\frac{6}{4}$

$16 \cdot 4 = 64$

$4 \cdot 16 - 5 \cdot 8 - 9 \cdot 4 + 8 + 4$

$= 64 - 40 - 36 + 12 = 24 + 12$

$4 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} - 1,5 - 2$

$(4x^3 + 3x^2 - 3x - 2)(x-2)$

$= -1 + \frac{3}{4} - 2$

$= 4x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x$

$-8x^3 - 6x^2 + 6x + 4$

$-4 \cdot \frac{1}{8} + \cancel{1,5} + 3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2$

$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cancel{+ \frac{3}{2}} - 2$

$= 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$4\left(x - \frac{1 - \sqrt{33}}{4}\right)\left(x - \frac{1 + \sqrt{33}}{4}\right)$

$\frac{1-33}{8} = \frac{-32}{8}$

$4x^4 + 5x^3 \geq 0$

$x^3(4x+5) \geq 0$

$x_1 = 0$

$x_2: \ 4x = -5$

$x = -\frac{5}{4}$

$+ \quad -\frac{5}{4} \quad - \quad 0 \quad +$

$\frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q^2} =$

$b_3 ; b_6$

$b_n = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 =$

$40 b_1 q^2$

$b_n = 40 b_1 \cdot (q^3)^{n-1} = 40 b_1 \cdot (q^3)^{n-1}$

$S_n =$

$x^3 - 64x = -200$

$x^2 + 6x - 40$

$= \frac{3 b_1 q \cdot (q^2)^{n-1}}{\cancel{1-q^2}} = \frac{3b_1 q(1-q^{3000})}{(1-q)(1+q)} + \frac{b_1 \cdot (q^2)^{n-1}}{(1-q)(1+q)} =$

$\frac{b_1 \cdot (1-q^{3000})}{(1-q)} \cdot \frac{(39+1)}{(1+q)}$

$q = \frac{39 \cdot 0{,}16}{1 + 0{,}4 + 0{,}16}$

$\frac{1-6}{8}$

$\frac{1+6}{8} = \frac{7}{8}$

$\times \begin{array}{r}42\\80\\\hline 2520\end{array}$

$\frac{2{,}2}{1{,}2} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$

$\frac{1}{q} = \frac{39q^2}{1+q+q^2}$

$4q^2 + 4q + 4 = 39q^2$

$35q^2 - 4q - 4 = 0$

$D = 16 + 560 = 576$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

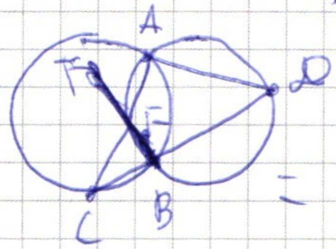
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x^2+2x-12)(x-6)$ $100-60-40=0$

$D=36+160=196$

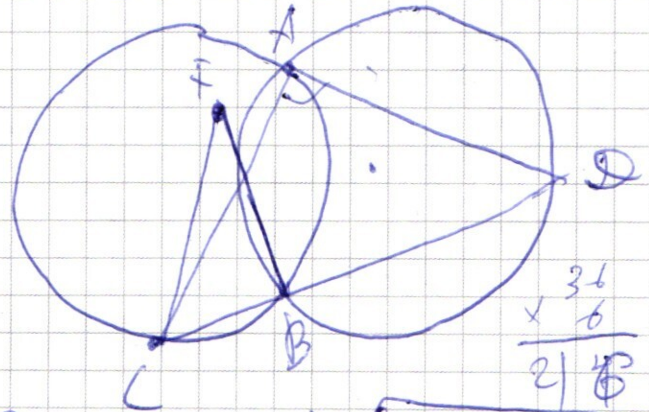


$= \cancel{x^3-12x+72}$

x^3+2x^2-12x

$\cancel{72^3-8\,72}$ $-6x^2-12x$

$216-$ $+64$ $\begin{array}{r}225\\+\;64\\\hline 289\end{array}$



$\begin{array}{r}36\\\times\;6\\\hline 216\end{array}$ $\begin{array}{r}36\\\times\;8\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{r}36\\\times\;6\\\hline 216\end{array}$

$\left(\frac{x}{2\sqrt2}+\frac{5\sqrt2}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$

$x^2+6x-40=0$

$D=36+1600=1636$

$\cancel{\frac{x}{2\sqrt2}+\frac{5\sqrt2}{2}}$

x^3+2x^2-12x

$-6x^2-12x+72$

$\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6$

$\begin{array}{r|l}1636 & 4\\ \underline{16} & \overline{409}\\ 36 & \\ \underline{36} & \\ 0 & \end{array}$

$\begin{array}{r}42\\\times\;60\\\hline 520\end{array}$

$2x+20\cdot\sqrt{x^3-64x}$

$\begin{array}{r}16\\\times\;8\\\hline 128\end{array}$

$\cancel{4\sqrt2 x^2+6x\cdot4\sqrt2-40\cdot4\sqrt2=0}$

$\cancel{100}$ $\cancel{100}$

$\begin{array}{r}200\\-\;128\\\hline 72\end{array}$

100 $\begin{array}{r}42\\\times\;60\\\hline 520\end{array}$ $\cancel{3}\cdot16\;\cancel{+24-40=0}$

$x^2+6x\cancel{+6}$ -40

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$x^3-8x^2+72 \,\big|\, x-6$$
$$-\,x^3-6x^2 \quad x^2-2x-12$$
$$-2x^2$$
$$-2x^2+12x$$
$$-12x+72$$

$$42\cdot20\cdot3$$
$$=84\cdot3$$

39

$$(x-6)(x^2-2x-12)=x^3-2x^2-12x-6x^2+12x+72$$
$$x^3-8x^2+72$$

$$4900=70\cdot70=$$
$$7\cdot7\cdot5\cdot5\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1$$

$$42\cdot20\cdot3=42\cdot60$$

$$\times\,42 \cdot 60 = 2520$$

$$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$$
$$b_{3000}=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$\times\,42\cdot60=2520$$
$$\times\,42\cdot5=210$$
$$2520 \,|\, 42$$
$$-252 \quad 60$$

$$b_n^2=40b_1\cdot q^2\cdot(q^3)^{n-1}$$
$$=40b_1q^2\cdot(q^3)^{n-1}$$

$$22\,|\,14$$
$$-14 \quad 1{,}5$$
$$80$$
$$70$$
$$100$$

$$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{8\cdot7}=$$

$n=1000$

$$b_{новое} \quad \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}-$$
$$b$$

$$r_1=\sqrt{8+1}=9=3$$
$$r_2=4+32=6$$

$$1)\ \frac{40b_1q^2\cdot(1-q^{3000})}{1-q^3}+\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$b_1q^2\cdot(q^3)^{n-1}$$

$$\times\,24\cdot24$$
$$96$$
$$+48$$
$$576$$

$$+49+64=113$$

$$\frac{5b_1(1-q^{3000})}{1-q}=\frac{40b_1q^2(1-q^{3000})}{1-q^3}+b_1$$

$$\frac{4}{...}=\frac{39\cdot0{,}02}{1-0{,}4^2}$$
$$(1+0{,}4+0{,}4^2)$$
$$1{,}42$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)