

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900.
+ Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
- + 3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
- + 4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF . ✓
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(x) 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0 \quad ; x^2 \neq 0$$

$$4x^2 + 5x + 11 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \geq 0$$

$$4x^4 + 10x^2 + 4 > 0 \text{ при всех } x$$

$$5x^3 + 4x \geq 0.$$

$$x(5x^2 + 4) \geq 0.$$

$$5x^2 + 4 > 0 \text{ при всех } x$$

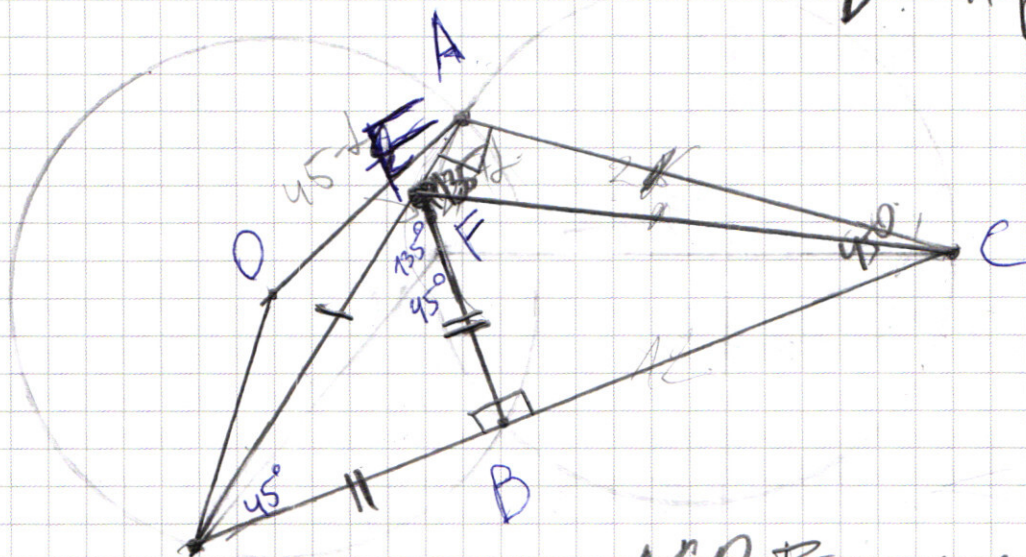
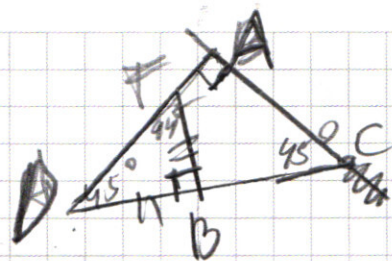
$$\text{если } x \geq 0, \text{ то } f(x) > 0.$$

$$\text{если } x < 0, \text{ то } 5x^3 + 4x < 0$$

$$4x^4 + 10x^2 + 4 > 0$$

$$4x^4 + 10x^2 + 4 > 5x^3 + 4x.$$

$$f(x) > 0 \Rightarrow x < -2.$$



$\angle AQB = 90^\circ$
 $\angle AEC = 90^\circ \Rightarrow \angle AQB + \angle AEC = 90^\circ \Rightarrow (A, B, C) \text{ с кр.}$
 $\Rightarrow AQB \text{ можно вкл. в кр.} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{кр. с кр. 2-ой.}$
 $\angle AEC = 90^\circ \Rightarrow EC \perp \text{ диаметр}$
 $\Rightarrow AQB \text{ можно вкл. в кр. с кр. 2-ой.}$

$\triangle EBD \sim \triangle ABC$
 по 2 углам;

$$\frac{ED}{BD} = \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{BD}$$

$$\frac{1}{EB} = \frac{1}{BD} \Rightarrow EB = BD \Rightarrow E \equiv F \Rightarrow \angle = 0^\circ$$

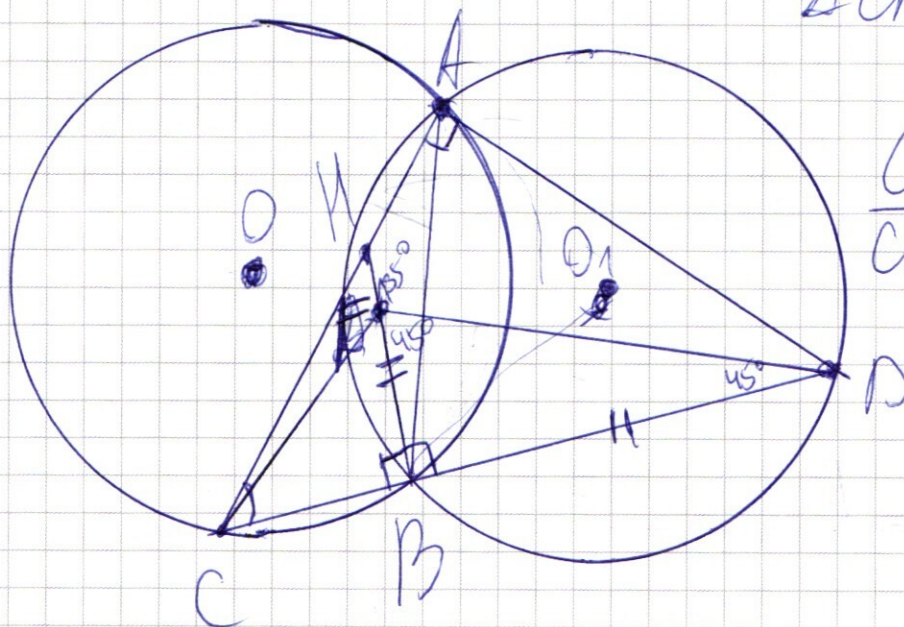
$$\angle C = 45^\circ$$

$$\angle C = \angle D = 45^\circ$$

$$AD = AC$$

$$PC = 26$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\Delta C_{BH} \approx \Delta C_{AD}$
26

$$\frac{CH}{CD} = \frac{BH}{AD} = \frac{BC}{AC}$$

\$ 4225.41.

15.

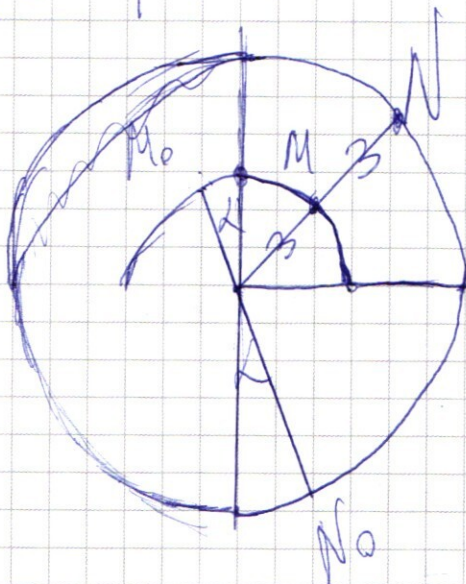
$$\sum_{m=1}^2 x_m^2 + y_m^2 = 9$$

$$x_n + y_n = 36$$

$$(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2 = 9$$

$$I + 36 - 2X_m X_n - 2Y_m Y_n =$$

$$x_m x_n + y_m y_n = 1$$



$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases} \quad a > 0$$

$$\begin{cases} y+x+8 \\ y-x+8 \end{cases}$$

$$y+x+8$$

$$y-x+8$$

$$f(x) = 16x^3 + 15x^2 + 22x + 4$$

$-x \leq \text{полож. числа}$

$x \geq \text{отриц. числа}$

$$y \leq -x-8$$

$$(y+x+8)^2 + |(y-x+8)-x| = 16|y+x+8|$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$\begin{cases} x < -2 \end{cases}$$

$$x^2(4x^2+11) + x(5x^2+4) + 4 \geq 0$$

$$-x(5x^2+4) \leq x^2(4x^2+11) + 4$$

$$-x \leq \frac{x^2(4x^2+11) + 4}{5x^2+4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{S_1}{5S} = \frac{3q^3}{40q(q^3-1)} = \frac{3(q^3-1)}{40q(q^3-1)} = \frac{3}{40}$$

$$= \frac{3(q^2+q+1)}{40q(q+1)} \cdot 1.5$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{3(q^2+q+1)}{80q(q+1)}$$

~~Зеркало~~

$$\frac{8q}{q+1} = \frac{8(q^2+q+1)}{8q(q+1)}$$

$$8q^2 = q^2 + q + 1$$

$$7q^2 - q - 1 = 0$$

$$D = 1 + 28 = 29$$

$$q = \frac{1 + \sqrt{29}}{14}$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{3 + 3\sqrt{29}}{14} = \frac{3 + 3\sqrt{29}}{15 + \sqrt{29}}$$

$$S_1 = \frac{3 + 3\sqrt{29}}{15 + \sqrt{29}} S$$

Ответ: $\frac{3 + 3\sqrt{29}}{15 + \sqrt{29}}$ раз

№3.

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40 \cdot | \cdot 2\sqrt{2}$$

$$x^3 + 6x - 40 = 0.$$

$$D_1 = 9 + 40 = 49.$$

$$x_1 = -3 + 7 = 4.$$

$$x_2 = -3 - 7 = -10$$

$$\frac{1}{2} (x+10) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = 2\sqrt{2} (x+10)(x-4)$$

$$(x+10) (\sqrt{x^3 - 64x + 200} - 2\sqrt{2}(x-4)) = 0.$$

$$x = -10.$$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = 2\sqrt{2}(x-4)$$

$$x \geq 4.$$

$$\text{ВММ } x \geq 4, \text{ то } x^3 \geq 64$$

$$-64x \leq -256.$$

$$\text{ВММ } x = 4 \quad 64 - 256 + 200 = 8$$

$$x = 5 \quad 125 - 320 + 200 = 5$$

$$x = 6 \quad 216 - 384 + 200 = 32$$

$$729 - 576 + 200 = 353$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8(x^2 - 8x + 16)$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128$$

$$x^3 - 8x^2 + 32 = 0. \quad 64 - 128 + 32 = -32$$

$$4 \quad 64 - 128 + 32 = -32 \neq 0$$

$$64 - 128 + 32 = -32 \neq 0$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a_1 a_2 \dots a_8$; $a_1 a_2 \dots a_8 = 4900$

$4900 = 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$

$4 \cdot 4 \cdot$

2700 "7" - 2
"5" - 2
"2" - 2
"1" - 2

$C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 =$
 $= 8! \cdot 6! \cdot 4! \cdot 2! =$
 $= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 =$
 $= 28 \cdot 90 = 2520$

Объем: 2520

№2

$S = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}$

$b_1 + b_2 + \dots + b_3 = 5$

$40 b_3 + 40 b_6 + \dots + 40 b_{3000} = 55$

$55 = \frac{b_3 (q^{1000} - 1)}{q - 1}$

$\frac{1}{5} = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}$

$3 (b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) = ?$

$b_6 = b_3 \cdot 3q^3$

$$S = \frac{40b_3(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{40b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

$$S = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{1 \ 2 \ 4}{40 \ 10 \cdot 160}$$

$$S = \frac{b_1 q^3 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$q > 0$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{3b_1 q (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$$S = \frac{q^3 \cdot 40}{q^3 - 1} = \frac{40}{q - 1}$$

$$\frac{40q^3(q-1)}{q^3-1} = \frac{40q^3}{(q-1)(q^2+q+1)}$$

$$40q^3 = 5q^2 + 5q + 5$$

$$q^3 - 5q^2 - 5q - 5 = 0$$

$$35q^3 - 5q^2 - 5q - 5 = 0$$

$$7q^2 - q - 1 = 0$$

$$D = 1 + 28 = 29$$

$$S_1 = \frac{3b_2(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$$S_1 = \frac{3b_1 q (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$$q = \frac{3 + \sqrt{29}}{19}$$

$$S = \frac{3b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$\sqrt{29 \cdot 9} = \sqrt{261} > 16$$

$$3 + 3\sqrt{29} > 19$$

$$29 > 5 \cdot 15 + 5 = 80$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\frac{3b_1 q (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}}{\frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}} = \frac{3q(q-1)}{q^2 - 1} = \frac{3q}{q+1}$$

$$\frac{3q}{q+1}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

По ск. Бернера из м. Бугу:

$$\begin{matrix} 1 & -8 & 0 & +2 \\ 6 & 1 & -2 & -12 & 0 \end{matrix}$$

$$(x-6)(x^2-2x-12)=0$$

$$\begin{cases} x=6 \\ x^2-2x-12=0 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D &= 1+12=13 \\ x &= \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x &= \frac{1-\sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x=6 \\ x=1+\sqrt{13} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } 6, -10, 1+\sqrt{13}$$

$$4 \cdot 16 + 4 - 8 + 4$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 \mid x+2+4 \geq 0$$

$$\begin{cases} 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 - 10x^2 + 4 \geq 0 \\ x \geq -2 \\ 4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0 \\ x < -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0 \\ x \geq -2 \\ 4x^4 - 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

$$9x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0 = f(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq -2 \end{array} \right.$$

$$4x^4 + 11x^2 + 4 > 0 \text{ при всех } x$$

$$x(5x^2 + 4):$$

$$5x^2 + 4 > 0 \text{ при всех } x.$$

$x \uparrow \Rightarrow$ max зн-е $f(x)$ достигается
при $x = -2$.

$$64 - 40 + 44 - 8 + 4 \geq 0.$$

$$\frac{11}{4} \geq 2\frac{3}{4}$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 = 0.$$

$$x = 0,5:$$

$$\begin{aligned} & 4 \cdot 0,5^4 - 5 \cdot 0,5^3 + 11 \cdot 0,5^2 + 2 + 4 = \\ & = 0,25 - 0,625 + 2,75 + 6 = \\ & = 9 - 0,625. \end{aligned}$$

$$x^2(4x^2 + 11) + 4 + x(5x^2 + 4) \geq 0$$

$$-x(5x^2 + 4) \leq x^2(4x^2 + 11) + 4.$$

$$-x \leq \frac{x^2(4x^2 + 11) + 4}{5x^2 + 4} > 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x \geq - \left(\frac{x^2(4x^2 + 11) + 4}{5x^2 + 4} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$m \leq 2$
 $n \leq 2$
 $M_0 = 2.5$
 $n - 5m < 1$
 $R_0 \cdot \psi_1 = 35.8 \cdot \psi_2$
 $\psi_1 = 5\psi_2$
 $\alpha < \frac{\pi}{2}$

$\begin{cases} n=1 \\ m=2 \end{cases}$
 $5m+1 > n$
 $\begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases}$
 $\begin{cases} m=2 \\ n=2 \end{cases}$
 $\begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases}$

$(L + \frac{3\pi}{2}) = 5(L + \frac{\pi}{2})$
 $(L + n\pi) = 5(L + m\pi)$
 $4L - \pi = k$
 $\begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases}$
 $L + \frac{3\pi}{2} = 5L + \frac{5\pi}{2}$
 $4L + \pi = 0$
 $L = -\frac{\pi}{4}$ — не подходит.

$M_0 = (0; -6)$
 $(L + 2\pi) = 5(L + \pi)$
 $L + 2\pi = 5L + 5\pi$
 $4L = -3\pi$
 $L = -\frac{3\pi}{4}$

$L + 90^\circ$
 $(L + \frac{\pi}{2}) = 5L$
 $4L = \frac{\pi}{2}$
 $L = \frac{\pi}{8}$

$M_0 = 6.8 = \frac{34}{5}$
 $M_0 = \frac{34}{5} \cdot 2.5 = \frac{34}{2} = 17$
 $\frac{30\pi}{4} \cdot \frac{10}{4} = \frac{30\pi}{16} = \frac{15\pi}{8}$

$M_0 = (0; -6); (0; 0); (0; 6)$

26.

$$AB^2 + BC^2 < 6462$$

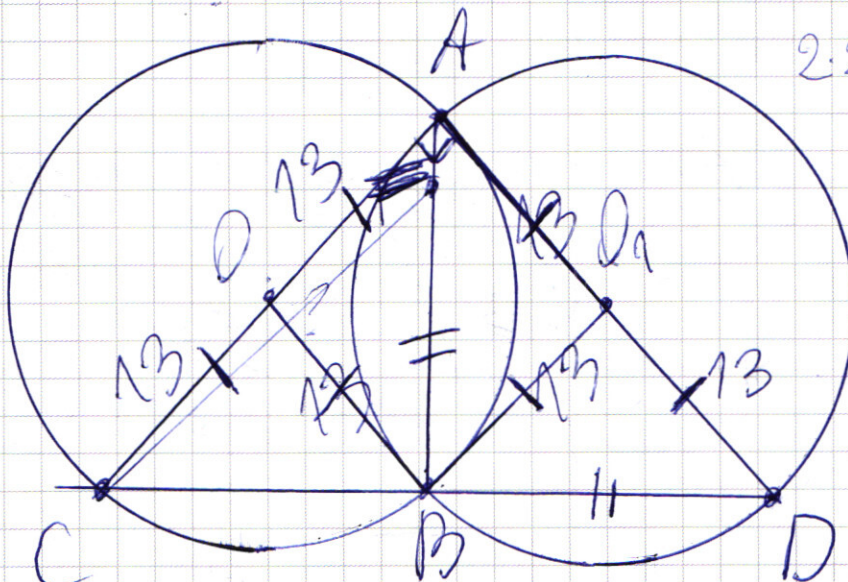
$$2 \cdot 26^2 = 646 \cdot 2$$

$$AC^2 < 646 \cdot 2$$

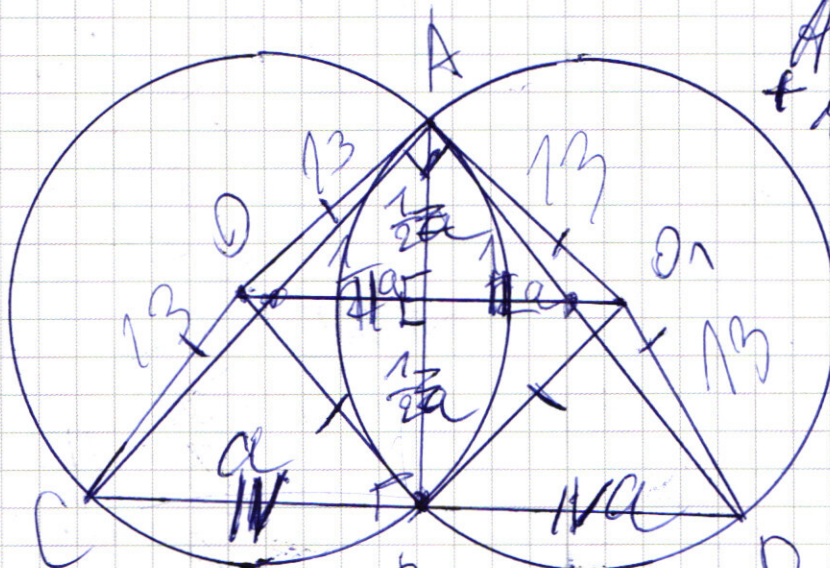
$$AC^2 > 2 \cdot 13^2$$

$$AC < 26\sqrt{2}$$

$$AC > 13\sqrt{2}$$



$OO_1 \parallel CD$



$$AC^2 = AO^2 + OC^2 + AO_1^2 + O_1C^2$$

$$CD > 4 \cdot 13^2$$

$$= 26^2$$

$$CD > 26$$

$$CB < 26$$

$$BD < 26$$

$$CD \in (26; 52)$$

$$AB < 26$$

$R_1 = R_2 \Rightarrow$ окружности $(O; R)$ и $(O_1; R)$ касаются в точке M на отрезке AB .

$\Rightarrow CB = BD \Rightarrow M \in CD \Rightarrow CM = MD = MO = 13$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 = 0$$

по сж. Бернулли:

$$4 \quad -5 \quad -9 \quad 4$$

$$-4 \quad 4 \quad -9 \quad 0 \quad 4$$

$$(x-1)(4x^3 - 9x^2 + 4) = 0$$

$$4(x^3 + 1) = 9x^2$$

по сж. Бернулли:

$$4 \quad -9$$

$$x = -2:$$

$$64 + 4 - 36 + 4 = 0$$

$$x \in [-2; 1]$$

$$x \in \left[-1; \frac{1+\sqrt{33}}{4}\right] \cup$$

$$[2; +\infty)$$

$$x < -2$$

$$x_2: 4 \quad -1 \quad -2 \quad 0 \quad x \in (-\infty; -2] \cup$$

$$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) = 0$$

$$4x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 32 = 33$$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{33}}{4}$$

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{33}}{4}$$

$$8 > 1 + \sqrt{33} > 6$$

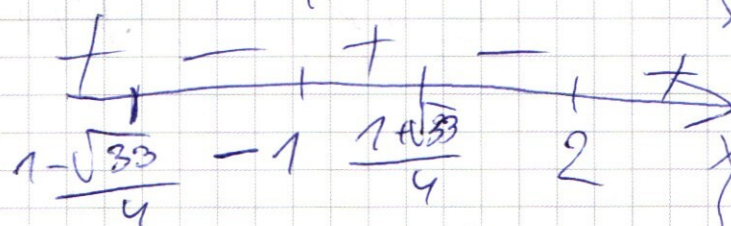
$$2 > \frac{1+\sqrt{33}}{4} > 1,5$$

$$1 - \sqrt{33} < 1 - \sqrt{9}$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{33}}{4}\right] \cup$$

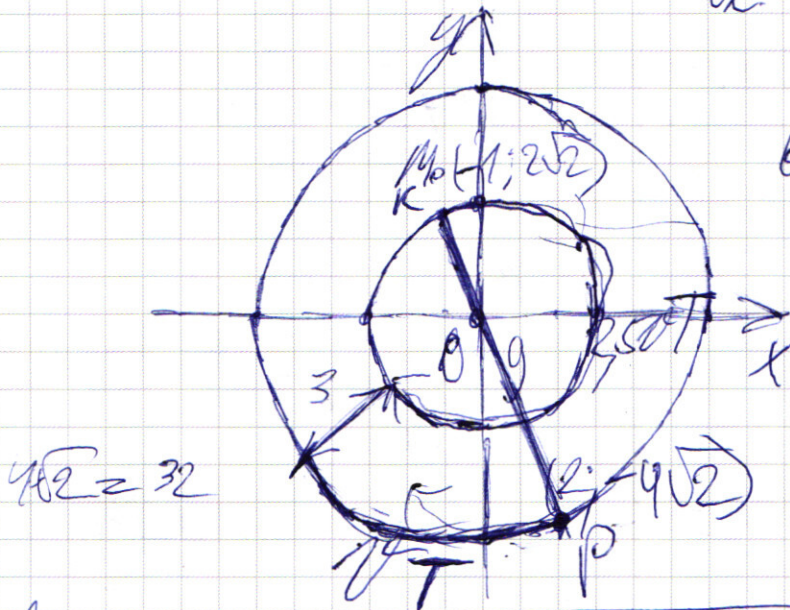
$$\left[-1; \frac{1+\sqrt{33}}{4}\right] \cup$$

$$[2; +\infty)$$



$$x^4 + 1,25x^3 + 2,75x^2 + x + 1 = 0$$

$$V_k = 250 \text{ m}^3$$



$$\sqrt{2} = 36 - 2 = 72$$

$$\sqrt{1024} = 32$$

$$\text{Hence } R_{K_0} = \sqrt{1+8} = 3$$

$$R_{12} = \sqrt{4 + 32} = 6.$$

Хмм. расчет $= 2 R_{10} R_c = 3$
~~Тогда~~ Пусть темп за T предположи
 что Φ кризис но есть 12т, тогда ханса
 за T предположи $2 \cdot 3 \cdot 35 \pi = 15 \pi$
~~В~~ В начале расчет - меньше нуля =

$$\sqrt{9+72} = \sqrt{81} = 9 = R_x + R_y \Rightarrow 0 \in \mathbb{R} \text{ MoNo}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$a_1 a_2 \dots a_8; a_1 a_2 \dots a_8 = 4900$

$4900 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$

Тогда есть необходимые цифры масс
различия $2^{1/2}, 2^{1/5}, 2^{1/2}, 2^{1/2}, 2^{1/2}, 2^{1/2}, 2^{1/2}, 2^{1/2}$

$$C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = \frac{8! \cdot 6! \cdot 4! \cdot 2!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2^8} = 2800 = 280 \cdot 9 = 2520$$

Ответ: 2520 способов

N2.

$S = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$ м.к. все члены послед-ны

$$S_2 = 5S = \frac{40 b_3(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} =$$

$$= \frac{40 b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

$$\frac{5S}{S} = \frac{40 b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{b_1 (q^{3000} - 1)} = \frac{40 q^2 (q - 1)}{q^3 - 1} = \frac{40 q^2}{q^2 + q + 1} \cdot \frac{1}{5}$$

$$8q^2 = q^2 + q + 1; 7q^2 - q - 1 = 0 \quad \text{D} = 1 + 28 = 29$$

$$q_1 = \frac{1-\sqrt{29}}{24} < 0$$

$$q_2 = \frac{1+\sqrt{29}}{24} \Rightarrow q = \frac{1+\sqrt{29}}{24}$$

$$19 < 15 + \sqrt{29} < 21$$

$$19 < 3 + 3\sqrt{29} < 20$$

$$S_3 = \frac{3b_2(q^{3000}-1)}{q^2-1} = \frac{3b_1q(q^{3000}-1)}{q^2-1}$$

$$\frac{S_3}{S} = \frac{\frac{3b_1q(q^{3000}-1)}{q^2-1}}{\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}} = \frac{3q/(q-1)}{q^2-1} = \frac{3q}{q^2-1} =$$

$$= \frac{\frac{3+3\sqrt{29}}{24}}{\frac{15+\sqrt{29}}{24}} = \frac{3+3\sqrt{29}}{15+\sqrt{29}} \Rightarrow S_3 = \frac{3+3\sqrt{29}}{15+\sqrt{29}} S$$

Ответ: ~~увеличится в $\frac{3+3\sqrt{29}}{15+\sqrt{29}}$ раз~~
 уменьшится в $\frac{15+\sqrt{29}}{3+3\sqrt{29}}$ раз
 №3.

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40 \cdot 2\sqrt{2}$$

$$(x+10) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = 2\sqrt{2}(x^2 + 6x - 40)$$

$$x^2 + 6x - 40 = 0$$

$$x_1 = 9 + 40 = 49$$

$$x_1 = -3 + 7 = 4$$

$$x_{22} = 3 - 7 = -10$$

$$(x+10) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = 2\sqrt{2}(x+10)(x-4)$$

$$(x+10)(\sqrt{x^3 - 64x + 200} - 2\sqrt{2}(x-4)) = 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x \geq -10 \\ \sqrt{x^3 - 64x + 200} = 2\sqrt{2}(x-4) \quad (1) \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad x^3 - 64x + 200 &= 8(x-4)^2 \\ x^3 - 64x + 200 &= 8x^2 - 64x + 128 \\ x^3 - 8x^2 + 72 &= 0. \end{aligned}$$

По схеме Горнера из т. Безу:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -8 & 0 & 72 & \\ 6 & 1 & -2 & -12 & 0 & \end{array}$$

$$(x-6)(x^2-2x-12)=0$$

$$\begin{cases} x=6 \\ x=1-\sqrt{13} \\ x=1+\sqrt{13} \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$D_1 = 1 + 12 = 13$$

$$x_1 = 1 - \sqrt{13}$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{13}$$

$$\begin{cases} x \geq -10 \\ x=6 \\ x=1-\sqrt{13} \\ x=1+\sqrt{13} \\ x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=1+\sqrt{13} \end{cases}$$

Ответ: 6; $1+\sqrt{13}$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 \cdot |x+2| + 4 \geq 0.$$

$$\begin{cases} 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0 & (1) \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0 & (2) \\ x \leq -2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2. \end{cases}$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 = 0.$$

По ок. Горнера из м. Безу:

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & -5 & -9 & 4 & 4 & & \\ -1 & 4 & -9 & 0 & 4 & 0 & \end{array}$$

$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) = 0.$$

$$4x^3 - 9x^2 + 4 = 0.$$

По ок. Горнера из м. Безу:

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & -9 & 0 & 4 & & & \\ 2 & 4 & -1 & -2 & 0 & & \end{array}$$

$$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) = 0.$$

$$4x^2 - x - 2 = 0$$

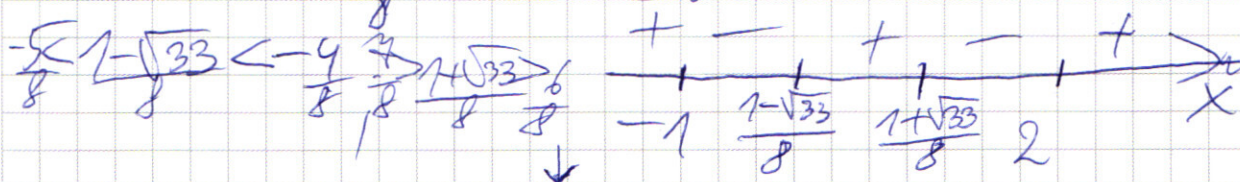
$$D = 1 + 32 = 33$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{33}}{8}$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$$

$$4(x+1)(x-2)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0$$

$$f(-1) = f(2) = f\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) = f\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) = 0.$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty) \\ x \geq -2 \end{cases}$$

⇓

$$x \in (-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty);$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

$$f(x) = 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 =$$

$$= x^2(4x^2 + 11) + 4 + x(5x^2 + 4)$$

$$x^2(4x^2 + 11) + 4 > 0 \text{ при всех } x$$

$$(5x^2 + 4) > 0 \text{ при всех } x$$

⇓

$$\text{если } x > 0 \Rightarrow f(x) > 0.$$

$$\text{если } x < 0 \Rightarrow (5x + 4)x < 0;$$

$$\text{но } x^2(4x^2 + 11) + 4 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(4x^2 + 11) > (5x + 4)x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \text{ при всех } x$$

CR

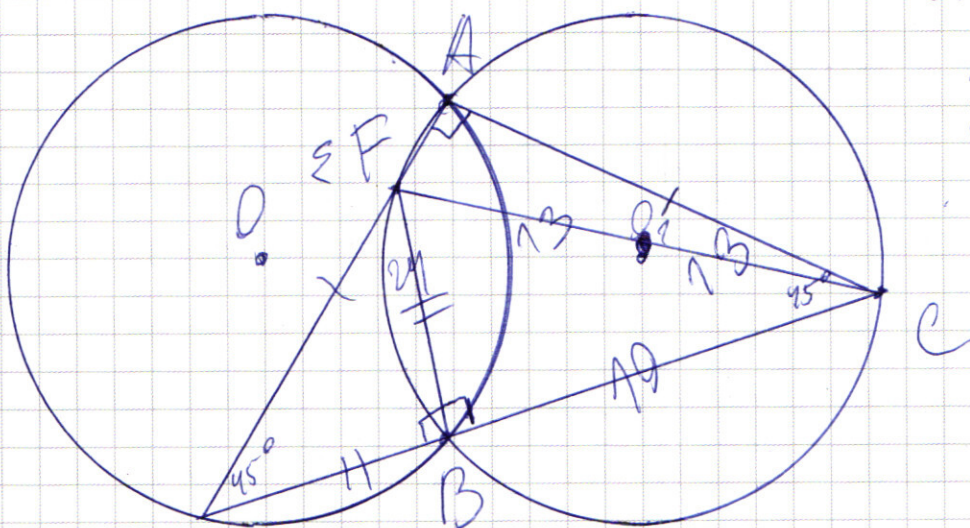
$$x \leq -2 \Rightarrow x \in (-\infty; -2]$$

$$x \in (-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty);$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty).$$

№ 6

Д.п.: $EB \perp CD$;
 $F \in EB$;
 $E \in AD$



a) $\triangleright BD = BF \Rightarrow \angle FDB = 45^\circ$;

Пусть $\angle EDF = \alpha$;

$\Rightarrow \angle DEB = 45^\circ - \alpha$;

$\Rightarrow \angle AEB = 135^\circ + \alpha$;

Рассм-м $\triangle EBC$:

$\angle EAC = 90^\circ$

$\angle EBC = 90^\circ \Rightarrow \angle AEB + \angle ACB = 180^\circ$

~~$\triangle ABE$~~

$\angle FAC = 90^\circ$

$\angle FBC = 90^\circ$

$\Downarrow$

$\triangle FBC$ можно

вписать в окружность

Д.п.: $\text{окр}(O_2; R) = \text{окр. около } \triangle FBC$;

$\angle FAC = 90^\circ \Rightarrow FC = 2R$.

$(A, B, C) \in \text{окр}(O_1; R) \Rightarrow \angle FBC = 90^\circ$

$\Rightarrow F \in \text{окр}(O_1; R) \Rightarrow$

$\Rightarrow FC = 2 \cdot R = 26$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

вб
5) $BC = 10$. По т. Пифагора:

$$FB = \sqrt{FC^2 - BC^2} = \sqrt{546} = 24$$

$$FB = BD = 24 \Rightarrow CD = 34. (24 + 10)$$

$\triangle ACD$ — равнобедр. $\Rightarrow AC = AD = 14\sqrt{2}$

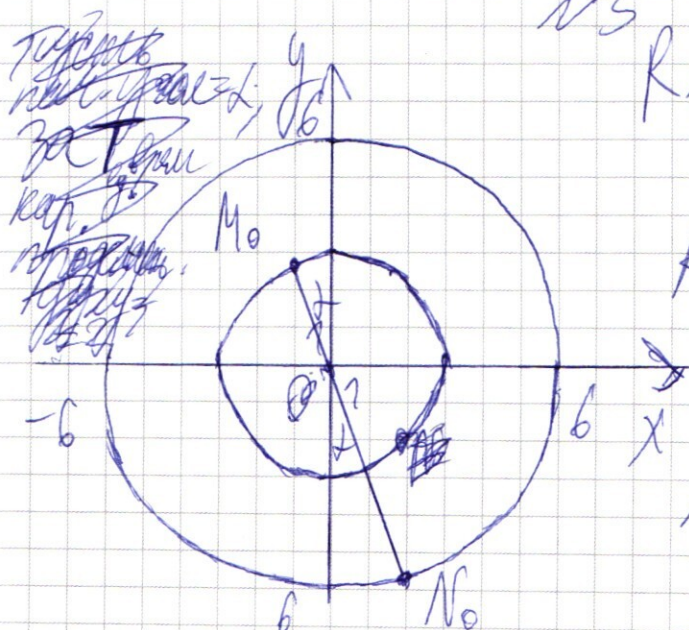
$\triangle ACD$ — равнобедр.

По т. Пифагора:

$$AF = \sqrt{AC^2 - FC^2} = \sqrt{546} = 24$$

$$S_{\triangle AFC} = \frac{1}{2} AF \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 14\sqrt{2} = 168\sqrt{2} = 119$$

Ответ: $FC = 26$, $S_{\triangle AFC} = 119$



$$R_1 = \sqrt{x_m^2 + y_m^2} = \sqrt{1 + 8} = 3$$

$$R_2 = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \sqrt{4 + 32} = 6$$

(м.к. $O(0;0)$.)

$$MO_2 = \sqrt{9 + 42} = 9 \Rightarrow$$

$$R_1 + R_2 = 9$$

$$\Rightarrow O \in MO_2$$

min расстояние
между ними $= R_2 - R_1 = 3$

ответ: $(0;6)$, $(0;-6)$, $(6;0)$, $(-6;0)$

~~Вектор~~ $V_1 = 2.5 V_2$

Пусть. они достигли min расстоя
через Т.е. времени

$V_2 T = 2.5 V_1 T$; Пусть ~~это~~ ^{карас} ~~проделал~~ угол φ_1 (в рад.)

$V_1 T = \varphi_1 R_1 = 3 \varphi_1$

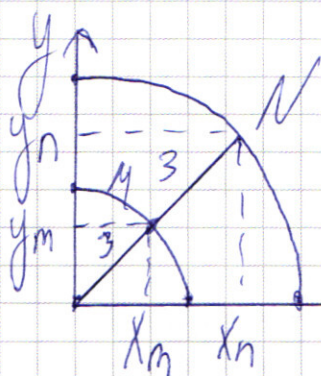
$V_2 T = \varphi_2 R_2 = 6 \varphi_2$

пеша φ_2 (в рад.)

$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \cdot 2$

$\varphi_1 = 5 \varphi_2$

Пусть. пом. угол их отсчитывали и $0 \leq \varphi \leq \pi$
~~Пусть~~ ~~проделав~~ угол φ , они
достигли min расстоя.



$$\begin{cases} y_n^2 + x_n^2 = 36 \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 3\sqrt{2} \\ y_m^2 + x_m^2 = 9. \end{cases}$$

$$(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2 = 9 \cdot 3$$

||

~~Вектор~~

Вектор: $(3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$

$(3\sqrt{2}; -3\sqrt{2})$

$(-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$

$(-3\sqrt{2}; -3\sqrt{2})$

$2x_n x_m + 2y_n y_m = 36$

$x_n x_m + y_n y_m = 18$

$x_n = \pm 3\sqrt{2}$; $x_m = \pm 3\sqrt{2}$
 $y_n = \pm 3\sqrt{2}$