МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2; -2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5; 5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

1) $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$. Пусть искомое восьмизначное число вида $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$, тогда $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$. Так как $1 \le a_i \le 9$ (если $a_i = 0$, то произведение всех цифр равно 0), то будут однозначно определены 3 цифры: 5, 5, 7. ($5 \cdot 2 > 9$, $7 \cdot 2 > 9$, значит произведение нескольких простых множителей и подавно больше 9).

2) Возможно 2 варианта цифр, которые дают произведение 4:

а) 1 и 4, тогда в итоге цифры: 4, 5, 5, 7, 1, 1, 1, 1. Число вариантов восьмизначных чисел тогда будет: $S_1 = C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1$

Число вариантов поставить 4 единицы на 8 мест

Число вариантов поставить на оставшиеся 4 места 2 пятёрки

поставить 4

поставить 7

$S_1 = \frac{8!}{4!\cdot 4!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2} = 840$

б) 2 и 2, тогда в итоге цифры 2, 2, 5, 5, 7, 1, 1, 1.

Тогда аналогично пункту 2а: $S_2 = C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 = \frac{8!}{3!\cdot 5!} \cdot \frac{5!}{2!\cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2!} \cdot 1 = \frac{8!}{2^2 \cdot 3!} = 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 1680$

„1" „5" „2" „7"

3) Тогда итоговая сумма: $S = S_1 + S_2 = 840 + 1680 = 2520$

Ответ: 2520.

№ 2

1) Пусть q такое число, что $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$; $q > 0$, $\ne 1$ (q – знаменатель геом. прогрессии)

$S = b_1 + b_2 + \ldots + b_{3000} = b_1 q^0 + b_1 q^1 + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{2999} = b_1 (q^0 + q^1 + \ldots + q^{2999}) = b_1 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$

2) $S_3 = b_3 + b_6 + \ldots + b_{3000} = b_1 q^2 + b_1 q^5 + b_1 q^8 + \ldots + b_1 q^{2999} = b_1 q^2 (q^0 + q^3 + q^6 + \ldots + q^{2997}) = b_1 q^2 ((q^3)^0 + (q^3)^1 + (q^3)^2 + \ldots + (q^3)^{999}) = b_1 q^2 \cdot \frac{(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1} = b_1 q^2 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1 (Нумеровать только чистовики)

3) Из условия сумма в начале была S, затем каждое с номерами кратное 3 увеличили в 50 раз, значит сумма станет $S+49S_3$. Значит:

$$S+49S_3=10S$$

$$49S_3=9S$$

$$49\cdot b_1\cdot q^2\cdot\frac{q^{3000}-1}{q^3-1}=9\cdot\frac{q^{3000}-1}{q-1}\cdot b_1$$

$$\frac{49q^2}{q^3-1}=\frac{9}{q-1}\Leftrightarrow\frac{49q^2}{(q-1)(q^2+q+1)}=\frac{9}{q-1}\Leftrightarrow 49q^2=9(q^2+q+1)$$

$$49q^2=9q^2+9q+9\Leftrightarrow 40q^2-9q-9=0$$

$$q=\frac{9\pm\sqrt{9^2+4\cdot 9\cdot 40}}{80}=\frac{9\pm 39}{80}$$ так как $q>0$:

$$\boxed{q=\frac{9+39}{80}=\frac{3}{5}}$$

4) $S_2=b_2+b_4+\ldots+b_{3000}=b_1q^1+b_1q^3+\ldots+b_1q^{2999}=b_1q(q^0+q^2+q^4+\ldots+q^{2998})=$
$=b_1q\left((q^2)^0+(q^2)^1+\ldots+(q^2)^{1499}\right)=b_1q\cdot\frac{(q^2)^{1500}-1}{q^2-1}=b_1q\cdot\frac{q^{3000}-1}{q^2-1}=$
$=b_1\cdot\frac{q^{3000}-1}{q-1}\cdot\frac{q}{q+1}=S\cdot\frac{q}{q+1}=S\frac{\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}=\frac{3}{8}S$

5) Сумма станет $S+(2-1)S_2=S+S_2=S+\frac{3}{8}S=\frac{11}{8}S$

Ответ: сумма увеличится в $\frac{11}{8}$ раза.

№3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$$

1) $x^2+10x+24=(x+6)(x+4)$

$$\frac{x+6}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{x^3-4x+80}=(x+6)(x+4)$$

Напрашивается первое решение $x=-6$. Проверим ОДЗ: $x^3-4x+80\geq 0$

$(-6)^3-4\cdot(-6)+80$

$-216+24+80<0$

Вывод: $x\neq -6$ из ОДЗ. Поэтому можно поделить обе части на $(x+6)$.

$$\sqrt{x^3-4x+80}=\sqrt{2}\cdot(x+4)$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\sqrt{x^3-4x+80}=\sqrt{2}(x+4)$. Возведём в квадрат и найдём корни уравнения, а затем подстановкой откиним лишние корни.

$$x^3-4x+80=2(x+4)^2=2x^2+32+16x$$

$$x^3-2x^2-20x+48=0$$

Легко (на самом деле нелегко) подбираем корень $x=4$.

$(4^3-2\cdot4^2-20\cdot4+48=64-32-80+48=0)$. Проверим подходит ли он:

$\sqrt{4^3-4\cdot4+80}=\sqrt{2}(4+4)$ — подходит!

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2-20x+48 & x-4 \\ \underline{x^3-4x^2} & x^2+2x-12 \\ \quad 2x^2-20x+48 & \\ \quad \underline{2x^2-8x} & \\ \qquad -12x+48 & \\ \qquad \underline{-12x+48} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

3) $x^3-2x^2-20x+48=(x-4)(x^2+2x-12)$.

Теперь решим квадратное уравнение:

$$x^2+2x-12=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot12}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{13}}{2}=-1\pm\sqrt{13}$$

4) а) $x^3-4x+80\ge0$. $-1+\sqrt{13}\in(2;3)$, так как $3<\sqrt{13}<4$

При $x\in(2;3)$ $x^3-4x+80\ge2^3-4\cdot3+80>0$ б) $x=-1+\sqrt{13}$ — подходит!

Также $(-1+\sqrt{13}+4)>0$.

Значит б) $(x+4)\ge0$ $-1-\sqrt{13}+4=\sqrt{9}-\sqrt{13}<0$

Значит этот корень не подходит.

Ответ: $x=\{4;-1+\sqrt{13}\}$

№4

$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \ge 0$

$2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2|x-2| \ge 0$

$2(x^2-4)^2 = 2x^4 + 32 - 16x^2 \Leftrightarrow 2x^4 = 2(x^2-4)^2 - 32 + 16x^2$

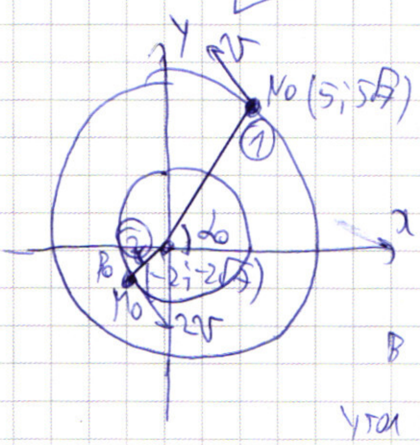
$2(x^2-4)^2 - 32 + 16x^2 + (x-2)^2 - 3x^2|x-2| \ge 0$

$2(x-2)^2(x+2)^2 + 16(x^2-4) + 32 + (x-2)^2 - 3x^2|x-2| \ge 0$

$2|x-2|^2|x+2|^2 + 16(x-2)(x+2)$

№5

1)



а) Найдём радиусы окружностей, по которым они движутся. $R_1 = \sqrt{5^2 + (5\sqrt7)^2} = 5\sqrt8 = 10\sqrt2$

$R_2 = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt7)^2} = 2\sqrt8 = 4\sqrt2$

б) Пусть α_0 — начальный угол ① (жук) в полярной системе координат, $\pi + \beta_0$ — начальный угол в полярной системе координат ② (водомерка).

Заметим, что $\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{5\sqrt7}{5} = \sqrt7$ $\quad \operatorname{tg}\beta_0 = \frac{-2\sqrt7}{-2} = \sqrt7 \Rightarrow \alpha_0 = \beta_0$ (они острые).

в) Тогда в полярной системе координат разница углов между ними $(\pi + \beta_0) - \alpha_0 = \pi$.

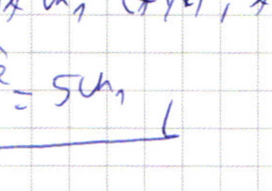
г) Пусть угловая скорость ① равна ω_1 (жук), а ② равна ω_2 (водомерка).

$\begin{cases} v = \omega_1 R_1 \\ 2v = \omega_2 R_2 \end{cases} \Rightarrow \omega_2 = \frac{2\omega_1 R_1}{R_2} = \frac{2\cdot\omega_1\cdot 10\sqrt2}{4\sqrt2} = 5\omega_1$

2) Найдём зависимость $\alpha(t)$ и $\beta(t)$:

$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega_1 t \quad \beta(t) = \beta_0 + \pi + \omega_2 t = \alpha_0 + \pi + 5\omega_1 t$

Очевидно, что кратчайшее расстояние между жуком и водомеркой будет в момент $\alpha(t) = \beta(t) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



Запишем это условие:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\alpha(t)=\beta(t)+\pi+2\pi n, n\in Z$ $\quad \alpha_0+\omega_1 t=\alpha_0+\pi+5\omega_1 t+2\pi n, n\in Z$

n – число кругов, на которое ведомерка обогнала жука, или наоборот, не имеет значения.

$4\omega_1 t+\pi+2\pi n=0$

$$t=\frac{\pi(-2n-1)}{4\omega_1}, n\in Z$$

3) В момент времени t координаты жука:

$x=\cos\alpha(t)\cdot R_1$; $y=\sin\alpha(t)\cdot R_1$

$$x=\cos\left(\alpha_0+5\omega_1\cdot\frac{\pi(-2n-1)}{4\omega_1}\right)R_1 \quad y=\sin\left(\alpha_0+5\omega_1\cdot\frac{\pi(-2n-1)}{4\omega_1}\right)R_1 \Rightarrow \begin{cases} x=\cos\left(\alpha_0+\frac{5}{4}\pi(-2n-1)\right)R_1 \\ y=\sin\left(\underbrace{\alpha_0+\frac{5}{4}\pi(-2n-1)}_{\alpha}\right)R_1 \end{cases}, n\in Z$$

$\alpha=\{\alpha_0+1\frac{1}{4}\pi;\ \alpha_0+1\frac{3}{4}\pi;\ \alpha_0+\frac{1}{4}\pi;\ \alpha_0+\frac{3}{4}\pi\}$.

$\cos\alpha_0=\frac{5\sqrt7}{10\sqrt2}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt7}{\sqrt2}=\frac{\sqrt{14}}{4}$ $\quad \sin\alpha_0=\frac{5}{10\sqrt2}=\frac{1}{2\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{4}$

3.1.) $x_1=\cos(\alpha_0+1\frac{1}{4}\pi)R_1=(\cos\alpha_0\cdot\cos\frac{5}{4}\pi-\sin\alpha_0\cdot\sin 1\frac{1}{4}\pi)R_1=\left(\frac{\sqrt{14}}{4}\cdot-\frac{1}{\sqrt2}-\frac{\sqrt2}{4}\cdot-\frac{1}{\sqrt2}\right)\cdot 10\sqrt2=$
$=\left(-\frac{\sqrt7}{4}+\frac{1}{4}\right)10\sqrt2=\frac{5\sqrt2}{2}(1-\sqrt7)$

$y_1=\sin(\alpha_0+1\frac{1}{4}\pi)R_1=(\sin\alpha_0\cdot\cos 1\frac{1}{4}\pi+\cos\alpha_0\cdot\sin 1\frac{1}{4}\pi)R_1=\left(\frac{\sqrt2}{4}\cdot-\frac{1}{\sqrt2}+\frac{\sqrt{14}}{4}\cdot-\frac{1}{\sqrt2}\right)\cdot 10\sqrt2=$
$=\left(-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt7}{4}\right)\cdot 10\sqrt2=-\frac{5\sqrt2}{2}(1+\sqrt7)$

3.2.) $x_2=\cos(\alpha_0+1\frac{3}{4}\pi)R_1=(\cos\alpha_0\cdot\cos 1\frac{3}{4}\pi-\sin\alpha_0\cdot\sin 1\frac{3}{4}\pi)R_1=\left(\frac{\sqrt{14}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt2}-\frac{\sqrt2}{4}\cdot-\frac{1}{\sqrt2}\right)10\sqrt2=$
$=\left(\frac{\sqrt7}{4}+\frac{1}{4}\right)10\sqrt2=\frac{5\sqrt2}{2}(\sqrt7+1)$

$y_2=\sin(\alpha_0+1\frac{3}{4}\pi)R_1=(\sin\alpha_0\cdot\cos 1\frac{3}{4}\pi+\cos\alpha_0\cdot\sin 1\frac{3}{4}\pi)R_1=\left(\frac{\sqrt2}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt2}+\frac{\sqrt{14}}{4}\cdot-\frac{1}{\sqrt2}\right)10\sqrt2=$
$=\frac{5\sqrt2}{2}(\sqrt7-1)$

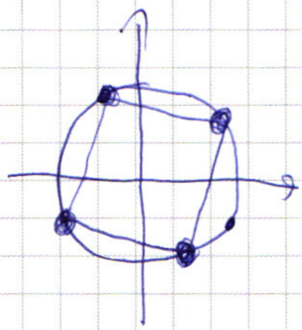
3.3.) Аналогично $x_3=\cos(\alpha_0+\frac{1}{4}\pi)R_1=(\cos\alpha_0\cdot\cos\frac{1}{4}\pi-\sin\alpha_0\cdot\sin\frac{1}{4}\pi)R_1=$
$=\left(\frac{\sqrt{14}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt2}-\frac{\sqrt2}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt2}\right)10\sqrt2=\frac{5\sqrt2}{2}(\sqrt7-1)$

$y_3=(\sin\alpha_0+\frac{1}{4}\pi)R_1=(\sin\alpha_0\cdot\cos\frac{1}{4}\pi+\cos\alpha_0\cdot\sin\frac{1}{4}\pi)R_1=\left(\frac{\sqrt2}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt2}+\frac{\sqrt{14}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt2}\right)10\sqrt2=\frac{5\sqrt2}{2}(\sqrt7+1)$

3.4) $x_4 = \cos(\alpha_0 + \frac{3}{4}\pi) R_1 = (\cos\alpha_0 \cdot \cos\frac{3}{4}\pi - \sin\alpha_0 \cdot \sin\frac{3}{4}\pi) R_1 = \left(\frac{\sqrt{14}}{4} \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot 10\sqrt{2} = -\frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{7}+1)$

$y_4 = \sin(\alpha_0 + \frac{3}{4}\pi) R_1 = (\sin\alpha_0 \cdot \cos\frac{3}{4}\pi + \cos\alpha_0 \cdot \sin\frac{3}{4}\pi) R_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{14}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) 10\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{7}-1)$

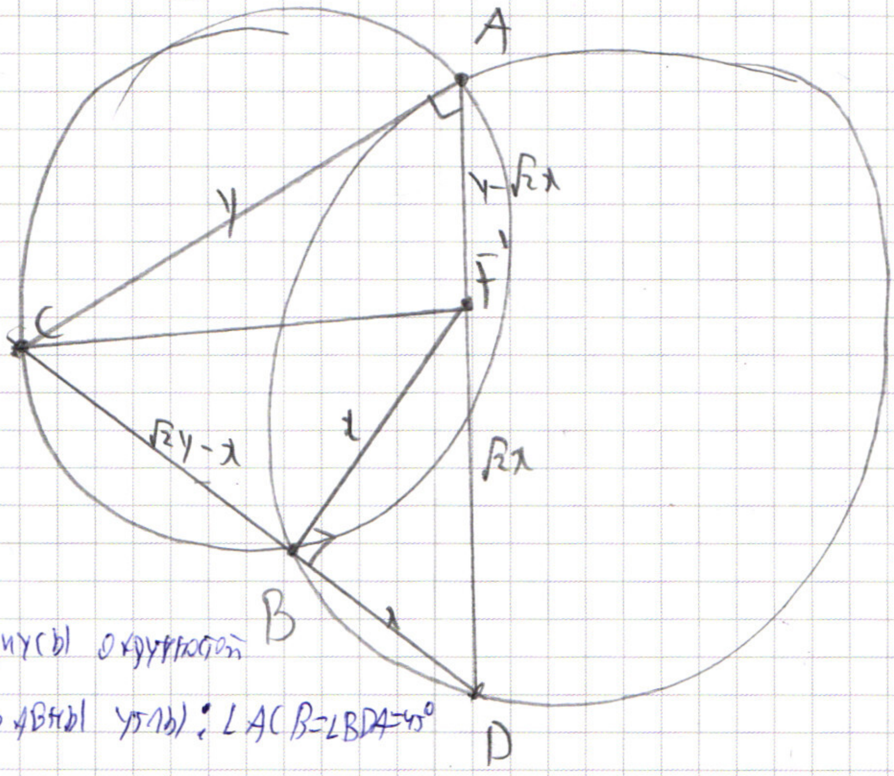
4) Можно заметить, что координаты образуют квадрат с центром в (0;0), повёрнутый на угол $\alpha_0 + \frac{1}{4}\pi$.



Ответ: $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{7}); -\frac{5\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{7})\right)$,
$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{7}); \frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{7}-1)\right)$,
$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{7}-1); \frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{7}+1)\right)$
$\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{7}+1); \frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{7}-1)\right)$

$\boxed{№6}$

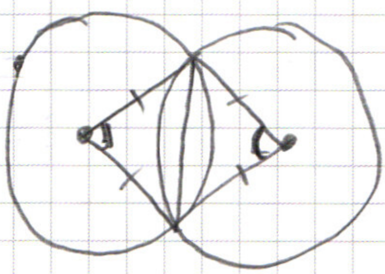
Дано:
$R = 5$
$\angle CAD = 90^\circ$
$BF = BD$
а) $CF = ?$
б) $BC = 6$
$S_{ACF} - ?$



1) Так как радиусы окружностей равны, то и равны углы: $\angle ACB = \angle BDA = 45^\circ$

Это можно легко показать:

равны центральные углы, значит и равны вписанные углы



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) Пусть перпендикуляр к CD пересекает AD в точке F', тогда $\angle BDF' = 45^\circ \Rightarrow \angle BF'D = 45^\circ \Rightarrow BD = BF'$, но из условия $BD = BF$, значит $F' \equiv F$

3) Пусть $BD = BF = x$, тогда $FD = \sqrt{BD^2 + BF^2} = \sqrt{2}x$

Пусть $AC = AD = y$, тогда $AF = AD - FD = y - \sqrt{2}x$

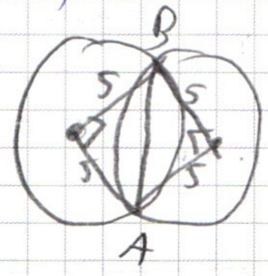
$CD = \sqrt{CA^2 + AD^2} = \sqrt{2}y$; $CB = CD - BD = \sqrt{2}y - x$

4) $CF^2 = CB^2 + BF^2 = AC^2 + AF^2 = 2(x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy)$

$(\sqrt{2}y - x)^2 + x^2 = y^2 + (y - \sqrt{2}x)^2$

$2y^2 + x^2 - 2\sqrt{2}xy + x^2 = 2y^2 - 2\sqrt{2}xy + 2x^2$

5) $AB = 5\sqrt{2}$, так как центральный угол в 2 раза больше — 90°.



а) по т. косинусов для $\triangle BCA$:

$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos 45^\circ =$

$= y^2 + (\sqrt{2}y - x)^2 - \underline{2y(\sqrt{2}y - x)}_{\sqrt{2}} = y^2 + 2y^2 + x^2 - 2\sqrt{2}xy$

$- 2y^2 + \sqrt{2}xy = x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy = 50$

б) по т. косинусов для $\triangle ABD$:

$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos 45^\circ = y^2 + x^2 - \frac{2 \cdot yx}{\sqrt{2}} = y^2 + x^2 - \sqrt{2}xy = 50$

6) $CF = \sqrt{2(x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy)} = \sqrt{2 \cdot 50} = 10$

7) если $BC = 6$, то $BC = 6 = \sqrt{2}y - x$

$\begin{cases} 50 = x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy \\ \sqrt{2}y - x = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}y - 6 \\ 50 = (\sqrt{2}y - 6)^2 + y^2 - \sqrt{2}y(\sqrt{2}y - 6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}y - 6 \\ 50 = y^2 - 6\sqrt{2}y + 36 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 7\sqrt{2} \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) б) $S_{ACF} = \frac{y(y-\sqrt{2}x)}{2} = \frac{AC\cdot AF}{2} = \frac{7\sqrt{2}(7\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot 1)}{2} = \frac{7\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}}{2} = 42$

Ответ: $CF=10$. $S_{ACF}=42$.

№7

1) Заметим, что если $(x_0;y_0)$ — корень системы, то и $(-x_0;y_0)$ — корень системы, то есть система имеет чётное число решений.

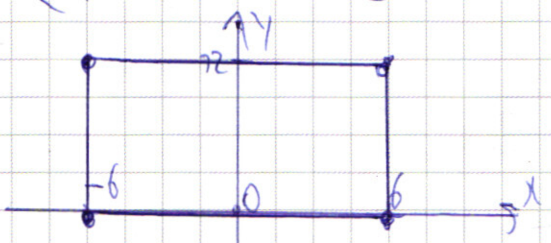
2) $|y-6-x|+|y-6+x|=12$

а) $\begin{cases} y-6-x\geq 0 \\ y-6+x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\geq x+6 \\ y\geq 6-x \end{cases} \Rightarrow 2y-12=12 \Rightarrow y=12 \Rightarrow \begin{cases} y=12 \\ x\geq 6-12 \\ x\leq 12-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=12 \\ x\in[-6;6] \end{cases}$

б) $\begin{cases} y-6-x\leq 0 \\ y-6+x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\leq x+6 \\ y\geq 6-x \end{cases} \Rightarrow -y+6+x+y-6+x=12 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y\in[0;12] \end{cases}$

в) $\begin{cases} y-6-x\geq 0 \\ y-6+x\leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\geq x+6 \\ y\leq 6-x \end{cases} \Rightarrow y-6-x-y+6-x=12 \Rightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y\in[0;12] \end{cases}$

г) $\begin{cases} y-6-x\leq 0 \\ y-6+x\leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\leq x+6 \\ y\leq 6-x \end{cases} \Rightarrow -y+6+x-y+6-x=12 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x\geq -6 \\ x\leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x\in[-6;6] \end{cases}$



3) если x_0, y_0 — решение системы, то $x_0\in[-6;6]$ $y_0\in[0;12]$

Пусть $x_0\geq 0$, тогда $(x_0-8)^2+(y_0-6)^2=a$, очевидно $a\geq 0$

Возможно 3 варианта поведения окружности.

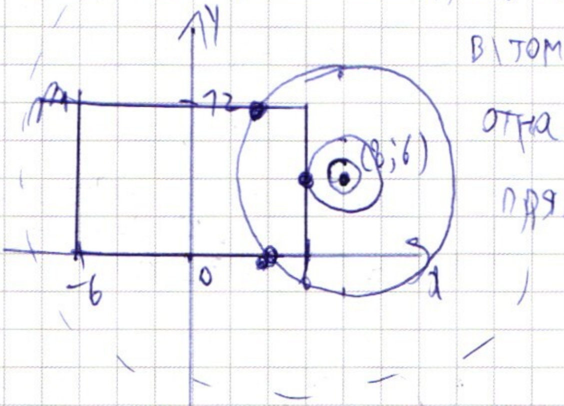
3.1.) Не имеет общих точек с границей прямоугольника $|y-6-x|+|y-6+x|=12$. Тогда нет решений

3.2.) Окружность пересекает в двух точках и более границу прямоугольника, тогда решений минимум $2\cdot 2=4$, так как если $(x_0;y_0)$ — решение, то и $(-x_0;y_0)$ — решение.

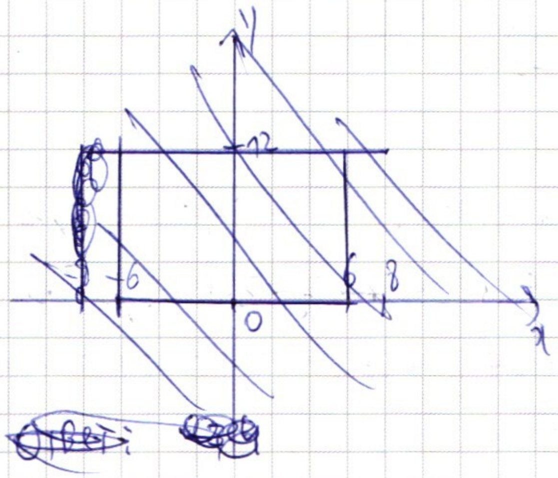
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

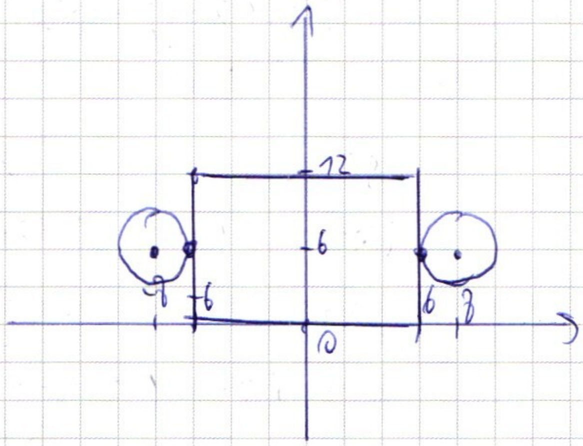
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.3) Окружность касается границы прямоугольника, тогда решений 2+1=2(?), что нам и нужно. Заметим, что такой эффект наблюдается в том числе в связи с симметрией решений, как относительно оси ординат, так и относительно прямой ~~x=0~~ $y=6$.



Значит ~~...~~ удовлетворяет всем условиям только один параметр $a = R^2 = (8-6)^2 = 4$. Тогда вид такой:





~~Ответ: ...~~

Ответ: $a=4$.

$\boxed{№4}$

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\ge 0$

1) $2(x^2-4)^2 = 2x^4+32-16x^2$

2) $2(x^2-4)^2-32+16x^2+(x-2)^2-3x^2|x-2|\ge 0$

$2(x-2)^2(x+2)^2+16(x^2-4)+32+(x-2)^2-3x^2|x-2|\ge 0$

а) $x\ge 2$: $2(x-2)^2(x+2)^2+16(x-2)(x+2)+32+(x-2)^2-3x^2(x-2)\ge 0$

$(x-2)\left(2(x-2)(x+2)^2+16+x-2-3x^2\right)+32\ge 0$

$(x-2)\left(2(x^2+4x+4)(x-2)+16+(x-2)-3x^2\right)+32\ge 0$

$(x-2)\left(2x^2(x-2)+8x^2-16x+8x-\cancel{16}+\cancel{16}+x-2-3x^2\right)+32\ge 0$

$(x-2)\left(2x^2(x-2)+5x^2-7x-2\right)+32\ge 0$

$\underbrace{(x-2)}_{\ge 0}\left(\underbrace{2x^2(x-2)}_{\ge 0}+\underbrace{5x(x-2)}_{\ge 0}+\underbrace{3x-2}_{\ge 0}\right)+\underbrace{32}_{\ge 0}\ge 0$

Вывод: для любого $x\ge 2$ истина.

б) $x\le 2$: $2(x-2)^2(x+2)^2+16(x-2)(x+2)+32+(x-2)^2+3x^2(x-2)\ge 0$

$32+(x-2)\left(2(x-2)(x+2)^2+16(x+2)+x-2+3x^2\right)\ge 0$

$32+(x-2)\left(2(x-2)(x^2+4x+4)+16x+32+x-2+3x^2\right)\ge 0$

$32+(x-2)\left(2x^2(x-2)+8x^2-16x+8x\right.$

...

не успел

дальше аналогично пункту а.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

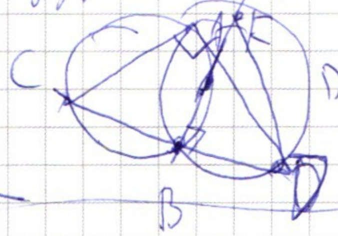
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$700 = 7\cdot 2^2\cdot 5^2$, заметим, что если число вида $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$, то $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8 = 7\cdot 2^2\cdot 5^2$, так как $1\le a_i\le 9$ (если $a_i=0$, то произведение 0), то 3 цифры это только 7, 5, 5, а дальше возможно 2 вар

7) цифры 7, 5, 5, 4, тогда остальные 1.



$D = 40^2 - 4\cdot 9\cdot 9 =$

$= 4(400-81) = 4\cdot 79$

1 1 2

1 1 2
1 2 1
2 1 1   3

1 1 2 2
1 2 1 2
1 2 2 1
2 1 1 2
2 1 2 1
2 2 1 1   6

$\frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6$

$S = b_1 + b_2 + \ldots + b_{3000}$

$b_n = b_1\cdot q^{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = b_1(q^0 + q^1 + \ldots + q^{2999}) =$

$= b_1\cdot \frac{q^{3000}-1}{q-1}$

$\times\begin{array}{r}84\\3\\\hline 252\end{array}$

$\frac{8!}{4!\cdot 4!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 2 = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2} =$

$= 5\cdot 3\cdot 7\cdot 8 =$

$=$

$240 + 16 = 256$

$S_3 = b_3 + b_6 + \ldots + b_{3000} =$

$= b_1\cdot q^2 + b_1\cdot q^5 + \ldots + b_1\cdot q^{2999} =$

$= b_1 q^2(q^0 + q^3 + q^6 + \ldots + q^{2997}) =$

$= b_1 q^2\cdot((q^3)^0 + (q^3)^1 + (q^3)^2 + \ldots + (q^3)^{999}) =$

$= b_1 q^2\cdot\frac{(q^3)^{1000}-1}{q^3-1} = b_1 q^2\cdot\frac{q^{3000}-1}{q^3-1}$

$\frac{8!}{4!\cdot 4!}\cdot\frac{4!}{2^2}\cdot 2 =$

$= \frac{8!}{4!\cdot 2} = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2}$

$40\cdot 21 = 840$

$800 + 40$

$\frac{8!}{3!\cdot 5!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot 3\cdot 1$

$+\begin{array}{r}168\\84\\\hline 252\end{array}$

$\times\begin{array}{r}84\\2\\\hline 168\end{array}$

$= \frac{8!}{6\cdot 2\cdot 2}\cdot 3 =$

$= \frac{8!}{24} = \frac{8!}{4!} =$

$S \quad S + 4S_3 = nS$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

1 2 4 8 16 32

$(4+32)\cdot 50$ $\quad \to (4+32)\cdot 49$

$x=4$ $\quad -27-18+60+48$

$64-2\cdot 16-80+48 \quad 8-8-40+48$

$S_2 = b_2 + b_4 + \dots + b_{3000} = b_1 q^1 + b_1 q^3 + \dots + b_1 q^{2999} = b_1 q^1 (q^0$

A

$$\boxed{S = b_1 \cdot \frac{q^{3000}-1}{q-1}}$$

$49 S_3 = 9S$

3000

$3000 + 1000\cdot 49 = 52000$

$27-18-60+48$

$$S_3 = b_1 q^2 \cdot \frac{q^{3000}-1}{q^3-1}$$

$x=-2 \quad x=-3$

$-8-8+40+48$

$-1+\sqrt{13} \in [2;3]$

$$S_2 = b_1 q \cdot \frac{q^{3000}-1}{q^2-1}$$

$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{2^{3000}}$

$$S = A \qquad S_3 = A \cdot \frac{q^2}{q^2+q+1} \qquad S_2 = A\cdot\frac{q}{q+1}$$

$$S_3 = S \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}} \qquad S_2 = S\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{q}}$$

$5^3 = 25\cdot 5 = 125$

$125 - 4\cdot 5 = 105$

$4^3 = 16\cdot 4 = 64$

$\sqrt{81+160\cdot 9} =$

$= \sqrt{9(9+160)} =$

$= 3\cdot 13 = 39 \quad 13\cdot 3 = 39$

$\sqrt{9\cdot 9 + 9\cdot 160} =$

$= 3\sqrt{9+160} = 3\sqrt{169} =$

$= 3\cdot 13$

$$\frac{x+6}{\sqrt{2}}\sqrt{x^3-4x+80} = x^2+10x+24$$

$\frac{48}{80} = \frac{24}{40} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}$

$\frac{45}{80} = \frac{5\cdot 9}{80} = \frac{9}{16}$

$$\frac{-10\pm\sqrt{100-4\cdot 24}}{2} = \frac{-10\pm 2}{2} = -5\mp 1$$

$\frac{0{,}5}{1{,}5} = \frac{1}{3}$

$$\frac{x+6}{\sqrt{2}}\sqrt{x^3-4x+80} = (x+6)(x+4)$$

$x=-6$

$\frac{3}{5} : \frac{8}{5} = \frac{3}{8}$

$\frac{9}{16} : \frac{25}{16} = \frac{9}{25}$

$(-6)^3 - 4\cdot(-6)+80 =$

$=$

$\frac{0{,}6}{1{,}6} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \quad 25+9$

$64-16+80 = 128 =$

$= 2\cdot 64$

$36\cdot 6 =$

$4\cdot 8+4 = 52 =$

$= 2\cdot 26 = 4\cdot 13$

$(x-2)^2 + 2x^2 - 3x^2 + x - 2 \geq 0$

$180+36 = 216 \quad 216 : 6 = 36$

$9\cdot 13 = 90+27 = 117$

$3-\sqrt{13} < 0$

$(6;5)$

$|5-6-6| + |5-6+6|$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

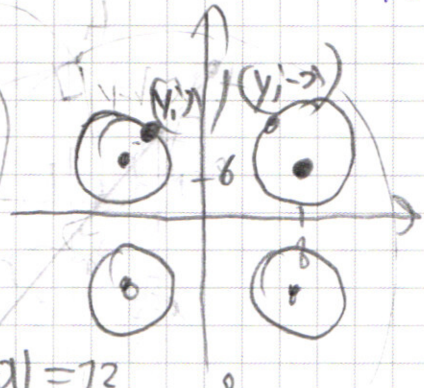
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12 \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=2 \end{cases}$$

$49+4\cdot 5\cdot 2=89$

$y;x$ $\quad$ $-y;x$

$y;-x$ $\quad$ $-y;-x$



$=8x^2=76-8x^2$

$|-y-6-x|+|y-6+x|=12$

$|y+6+x|+|y+6-x|=12$

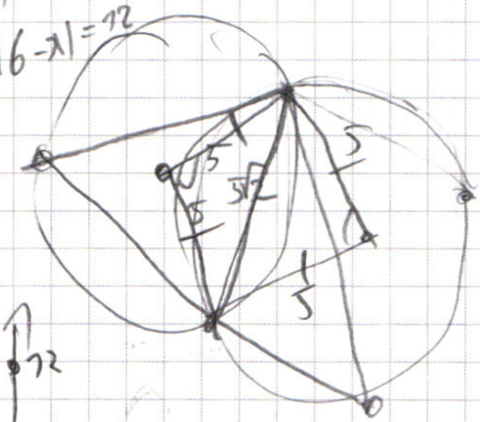
$(\sqrt{2}y-x)^2+x^2=y^2+(y-\sqrt{2}x)^2$

$y=0$

$|6+x|+|6-x|=12$

$x=0$

$2|y-6|=12$



$y^2-6\sqrt{2}y-14=0$

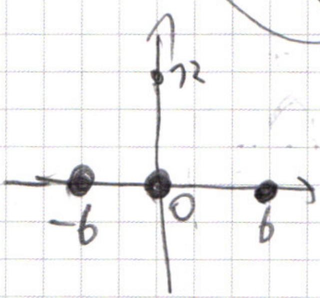
$y=\dfrac{6\sqrt{2}\pm\sqrt{6^2\cdot 2+14\cdot 4}}{2}=$

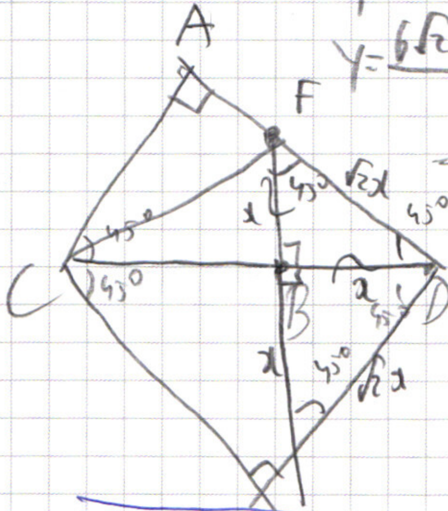
$=3\sqrt{2}\pm\sqrt{14+18}=$

$=3\sqrt{2}\pm\sqrt{32}=$

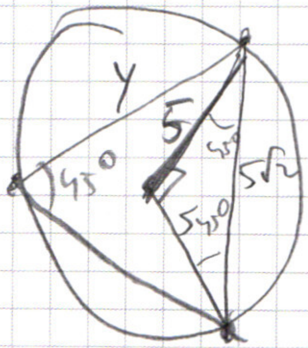
$=3\sqrt{2}\pm 4\sqrt{2}=$

$=7\sqrt{2}$





$$\boxed{\begin{aligned}50&=36+4\cdot 43+\cancel{24\sqrt{43}}+\\&+72+86+\cancel{12\cdot 2\sqrt{43}}-2\cdot(16+2\sqrt{43})(16+\sqrt{43})\end{aligned}}$$



$50=$

$\cancel{2y^2}+36-18\sqrt{2}y+y^2-$

$-\cancel{2y^2}+6\sqrt{2}y=$

$(36+83+3\cdot 6\sqrt{43})\cdot 2$

$4\cdot 43+72+86-83\cdot 2-36$

$86=2\cdot 43$

$(4x+4)(x-2)\cdot 2=$ $\quad =y^2-12\sqrt{2}y+36$

$y^2-12\sqrt{2}-14=0$

$=6\sqrt{2}\pm\sqrt{86}=$

$y=\dfrac{12\sqrt{2}\pm\sqrt{12^2\cdot 2+4\cdot 14}}{2}=$

$120+12+72+3-83-36-36$

$132 \quad 204 \quad 207 \quad 103-14$

$=\dfrac{12\sqrt{2}\pm\sqrt{4(72+14)}}{2}=$

черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x-2|=t$

$(x-2)^2=t^2$

1) $x\geq 2$: $2x^4+(x-2)^2-3x^2(x-2)\geq 0$

$2x^4+(x-2)(x-2-3x^2)\geq 0$

$2x^4-(x-2)(3x^2-x+2)\geq 0$

$\frac{25}{4}=3\frac{3}{4}$

$2(x^2-4)^2=2x^4+32-16x^2$

$\frac{5}{2}\pi$

$\frac{1}{2}\pi$

$2(x^2-4)^2-32+16x^2+(x-2)^2\geq 0$

1) $x\leq 2$: $2x^4+x^2-4x-3x^2(x-2)+4\geq 0$

$2x^4-3x^3+7x^2-4x+4\geq 0$

$x=2$: $32-24+28-8+4$

$2x^4+(x-2)^2-3x^2(x-2)\geq 0$

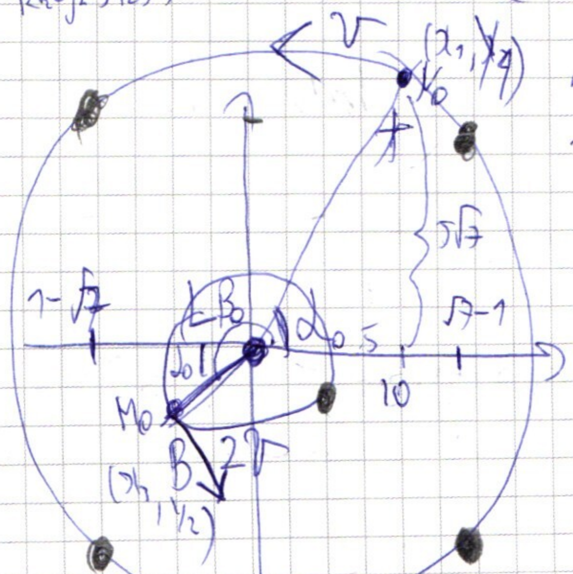
$2(x^2-4)^2+16x^2-32+(x-2)^2-3x^2(x-2)\geq 0$

$2(x-2)^2(x+2)^2+16(x^2-4)+32+(x-2)^2-3x^2(x-2)\geq 0$

$(x-2)\left(2(x-2)(x+2)^2+16(x+2)+x-2-3x^2\right)+32\geq 0$

$R_1=\sqrt{4+4\cdot 7}=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$

$R_2=\sqrt{25+25\cdot 7}=5\sqrt{8}=10\sqrt{2}$



$2(x^2+4x+4)(x-2)+32x+32+x-2-3x^2$

$V_B=2V_A$

$\alpha(t)=\alpha_0+\omega_1 t$

$\beta(t)=\beta_0+\omega_2 t$

$\alpha(t)=\beta(t)+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$\alpha_0+\omega_1 t=\beta_0+\omega_2 t+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$

$\alpha_0-\beta_0=(\omega_2-\omega_1)t+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$

$t=\frac{\alpha_0-\beta_0}{\omega_2-\omega_1}-\frac{2\pi n}{\omega_2-\omega_1}, n\in\mathbb{Z}$

$V=\omega_1 R_1$ $\quad 2V=\omega_2 R_2$

$\omega_2=\frac{2\omega_1 R_1}{R_2}=\omega_1\cdot\frac{4\sqrt{8}}{5\sqrt{8}}=0{,}8\,\omega_1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)