МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1;2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2;-4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC=10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}|y+x+8|+|y-x+8|=16,\\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a \geq 128$ $R_1 = \sqrt{1+8} = 3$ $4b_1 \frac{q^{3000}-1}{q-1} = 39b_1 q^2 \frac{q^{3000}-1}{q^3-1}$

$4900 = 7\cdot7\cdot10\cdot10 = 7\cdot7\cdot2\cdot5\cdot2\cdot5$

$R_2 = \sqrt{\text{если есть}}$ 4

$a = q^3$

$4(q^3-1) = 40q^2(q-1)$

263

$C_8^4 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2 +$

1, 2, 4, 5, 7 6

$\sqrt{8^2+8^2} = 8\sqrt{2} = R$

^{2} $4+32$

$R^2 = 128$

$1 + a + a^2 + \ldots + a^{999} = \frac{a^{1000}-1}{a-1}$

$\frac{2{,}5vt}{R_1} = $

$b_2 = b_1 q$ $= \frac{q^{3000}-1}{q^3-1}$

$\sqrt{7^2+8^2} = \sqrt{}$

56 + 30 = 00

168 → 1680; 49 + 64 = 113

28 + 90 = 00; 252 → 2520

$= \frac{vt}{R_2}$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$a > 289$ — нет решений

$128 \leq a \leq 289$ — одно решение

$0 \leq a < 128$ — нет решений

26 + 26 + 156 + 52 = 676

1680 + 2520 = 4200

$q^{..} = \boxed{8\sqrt{2}}$

$\boxed{\alpha = \frac{r}{R_1}}$

$S = b_1 + b_2 + \ldots + b_{3000} = b_1(1 + q + \ldots + q^{2999}) = \boxed{b_1 \cdot \frac{q^{3000}-1}{q-1}}$

289 + 2 = 578

676 − 578 = 98

$\frac{r_1}{2\pi R_1} = \frac{\alpha}{2\pi}$

$y^3 - 4y^2 \vee 0$

$y^2(y-4) \vee 0$

1315 | 5 → 263

6575 | 5 → 1315

$b_3 + b_6 + \ldots + b_{3000} = b_1 q^2 (1 + q^3 + q^6 + \ldots + q^{2997}) =$

0 49

128 289

$= b_1 \cdot q^2$ $5S = S + 39b_1 q^2 \left(\frac{q^{3000}-1}{q^3-1}\right)$

$4S = 39b_1 q^2 \left(\frac{q^{3000}-1}{q^3-1}\right)$

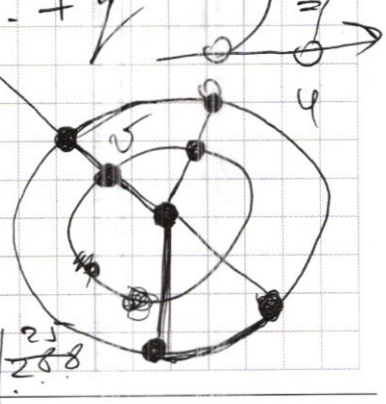
$[0 \ldots 128$

$128 \ldots 289$

$289 \ldots$

7200 − 625 = 6575

7200 | 25 → 288



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№1

Заметим, что $4900 = 7\cdot7\cdot2\cdot5\cdot2\cdot5$. Тогда в нашем числе могут быть только цифры 1, 2, 4, 5, 7.

Причём, если есть „4", то двоек нет, тогда у нас будет одна „4", две „5", две „7" и остальные „1".

Таких вариантов $C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2 = 8 \cdot \frac{7\cdot6}{2} \cdot \frac{5\cdot4}{2} = 8\cdot7\cdot3\cdot5\cdot2 =$

$= 1680$.

Если же у нас нет четвёрки, то есть две „2", две „5" и две „7", таких вариантов: $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 =$

$= \frac{8\cdot7}{2} \cdot \frac{6\cdot5}{2} \cdot \frac{4\cdot3}{2} = 28\cdot15\cdot6 = 2520$.

Всего вариантов: $1680 + 2520 = 4200$.

Ответ: 4200

№2

Пусть шаг геометрической прогрессии q, тогда $b_n =$
$= b_1 \cdot q^{n-1}$. Тогда $b_1 + .. + b_{3000} = b_1 \cdot (1 + q + .. + q^{2999}) =$
$= b_1 \cdot \frac{q^{3000}-1}{q-1} = S$.

Сумма членов с номерами, кратными 3 ($b_3 + b_6 + \ldots +$
$+ b_{3000}$) равна $S_2 = b_1 q^2 (1 + q^3 + .. + q^{2997}) = b_1 q^2 \cdot \frac{q^{3000}-1}{q^3-1}$.

По условию S_2 увеличили в 40 раз, то есть новая сумма $5S = S - S_2 + 40S_2 \Rightarrow 4S = 39S_2 \Rightarrow$

$$4\cancel{b_1} \cdot \frac{\cancel{(q^{3000}-1)}}{q-1} = 39 \cdot \cancel{b_1} q^2 \cdot \frac{\cancel{(q^{3000}-1)}}{q^3-1}$$

$$\frac{4}{q-1} = \frac{39q^2}{q^3-1}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^3-64x+200=8(x-4)^2=8(x^2-8x+16)$

$q^3-1=10q^3-10q^2$

$x^3-8x^2+72=0$

$9q^3-10q^2+1=0$

$9q^3-10q^2+1 \,|\, q-1$

$9q^3-9q^2 \quad 9q^2-q-1$

$-q^2+1$

$-q^2+q$

$-1-q$

$1-q$

0

$16 \cdot 8 = 128$

$8-32+72$

$(q-1)(9q^2-q-1)=0$

64^2-800

$(q-1)\left(q-\frac{1-\sqrt{37}}{2}\right)=0$

$64 \cdot 64$: 256, 384, 4096

$-8-32+72$

$\wedge$ ~~$64+72-32$~~

0

$1-4(-1)9=37$

$\boxed{q=1}$

$D=(4)^2+16\cdot 35=$

$=16\cdot 36=4\cdot 9=36$

$-\cancel{x}(5x^2+4)\leq 4x^4+11x^2+4$

4096

$\sqrt{3296}$

$b_2+\ldots+b_{3000}=b_1 q(1+q^2+q^4+\ldots+q^{2998})=$

$=b_1 q\frac{q^{3000}-1}{q^2-1}$

$\frac{a^3}{b^3}-4\frac{a^2}{b^2}+9=0$

84

$54 \cdot 54$: 216, 270, 2916

$\frac{a^3-4a^2b+9b^3}{b^3}=0$

40

6

$\frac{S+S_3+3S_3}{S}=$

$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$

$a^3-4a^2b+9b^3=0$

$= \frac{S+2S_3}{S}= 1+2\cdot$

S_2

$56 \cdot 56$: 336, 280, 3136

$\cancel{x}(5x^2+4)+4x^4+11x^2+4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$4(q^3-1)=39q^2(q-1)$$

$$4(q-1)(q^2+q+1)=39q^2(q-1)$$

$$(q-1)(4q^2+4q+4-39q^2)=0$$

$$(q-1)(-35q^2+4q+4)=0$$

$$(q-1)(35q^2-4q-4)=0$$

$$(q-1)\left(q-\frac{4-\sqrt{16\cdot 36}}{70}\right)\left(q-\frac{4+\sqrt{16\cdot 36}}{70}\right)=0.$$

Заметим, что так как все члены положитель-ные и $q\neq 1$, то $q=\frac{4+24}{70}=\frac{28}{70}=\frac{14}{35}=\frac{2}{5}$

Сумма всех ~~четных чисел~~ членов с четными номерами $S_3=b_1q(1+q^2+\ldots+q^{2998})$
$=b_1q\cdot\frac{q^{3000}-1}{q^2-1}$.

~~$\frac{S_3}{S}=\frac{b_1q\cdot\frac{q^{3000}-1}{q^2-1}}{b_1\cdot\frac{q^{3000}-1}{q-1}}=\frac{q(q-1)}{q^2-1}$ и $q\neq 1$, поэтому $\frac{S_3}{S}=\frac{q}{q+1}$~~

Сумма новая всех элементов $S-S_3+3S_3=$
$=S+2S_3$, тогда $\frac{S+2S_3}{S}=1+2\cdot\frac{S_3}{S}=1+2\cdot\frac{b_1q\cdot\frac{q^{3000}-1}{q^2-1}}{b_1\cdot\frac{q^{3000}-1}{q-1}}=$
$=1+2\cdot\frac{q(q-1)}{q^2-1}$ и $q\neq 1$, поэтому $1+2\cdot\frac{q}{q+1}=1+2\cdot\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+1}=$
$=1+2\cdot\frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}}=1+2\cdot\frac{2}{7}=1+\frac{4}{7}=\frac{11}{7}$ раз.

$\boxed{\text{Ответ: в } \frac{11}{7} \text{ раз}}$

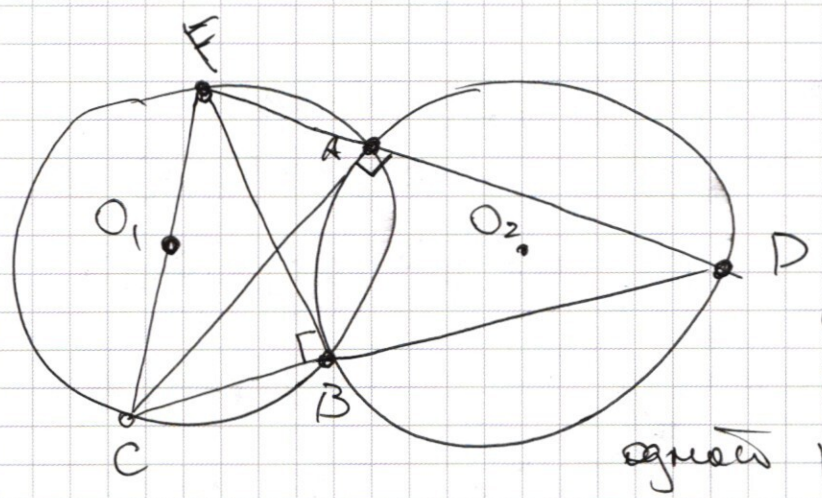
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6



Дано:

$R = 13$.

~~Д-ть, что~~

Решение:

Д-ем, что A, F, D - лежат на одной прямой, так радиусы у окружностей одинаковые, то $2R = \frac{AB}{\sin\angle ACB} = \frac{AB}{\sin\angle ADB} \Rightarrow \sin\angle ACB = \sin\angle ADB$ и $\angle ADB + \angle ACB = 180 - 90 = 90^\circ \Rightarrow \angle ADB = \angle ACB = 45^\circ \Rightarrow$ $AC = AD$. По условию $BF = BD \Rightarrow \angle BDF = \angle BFD = \frac{180-90}{2} = \frac{90}{2} = 45^\circ$, значит $\angle BDF = \angle BDA = 45^\circ \Rightarrow$ A, F, D - лежат на одной прямой. $\angle CBF = \angle CAF = 90^\circ$ и окружность с центром O_1 является описанной окружностью $\triangle ABC$, а так $\angle CBF = \angle CAF = 90^\circ$, то ABCF - вписанный и у $\triangle ABC$ и $\triangle AFC$ одна и та же описанная окружность, значит F лежит на окружности с центром O_1. Так как B лежит на этой окружности, а $\angle CBF = 90^\circ$, то CF - диаметр, значит $\boxed{CF = 2R = 26}$.

б) Так как $CF = 26$, $BC = 10$ и $\angle CBF = 90^\circ$, то по т. Пифагора: $BD = BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{24^2} = 24$, тогда $CD = BC + BD = 34$. Так как $AC = AD$ и $\angle CAD = 90^\circ$, то по т. Пифагора: $AC^2 + AC^2 = CD^2 \Rightarrow AC = \frac{CD}{\sqrt{2}} =$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

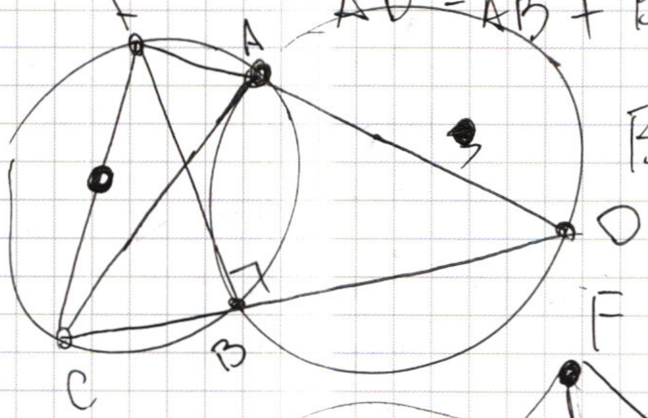
$y+x+8$

$y=-x-8$

$x=-y-8$

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\varphi$

$AD^2=AB^2+BD^2+2\cdot AB\cdot BD\cdot\cos\varphi$



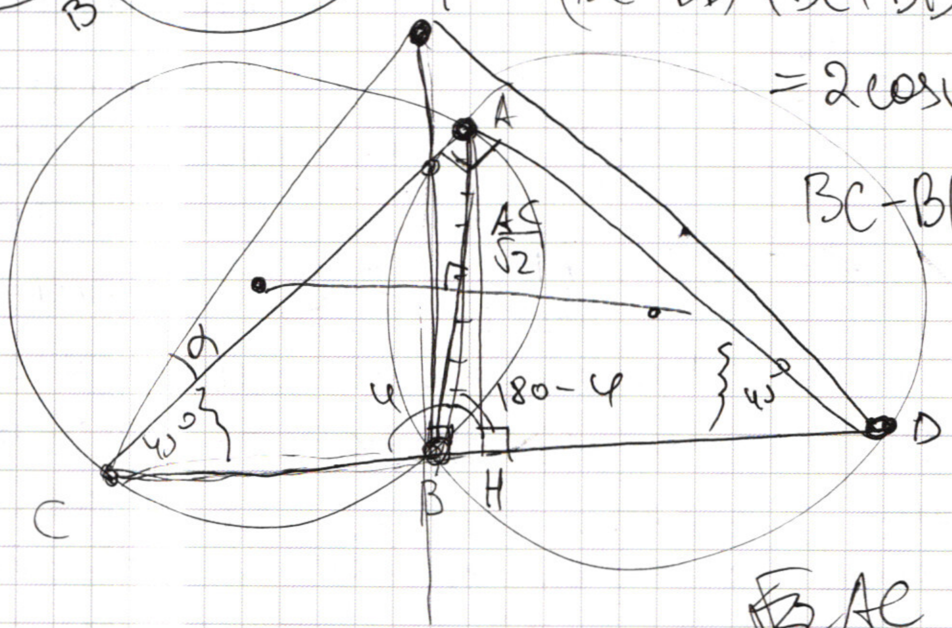
$BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\varphi=$

$=BD^2+2AB\cdot BD\cdot\cos\varphi$

$(BC-BD)\cdot(BC+BD)=$

$=2\cos\varphi AB(BC+BD)$

$BC-BD=2\cos\varphi AB$

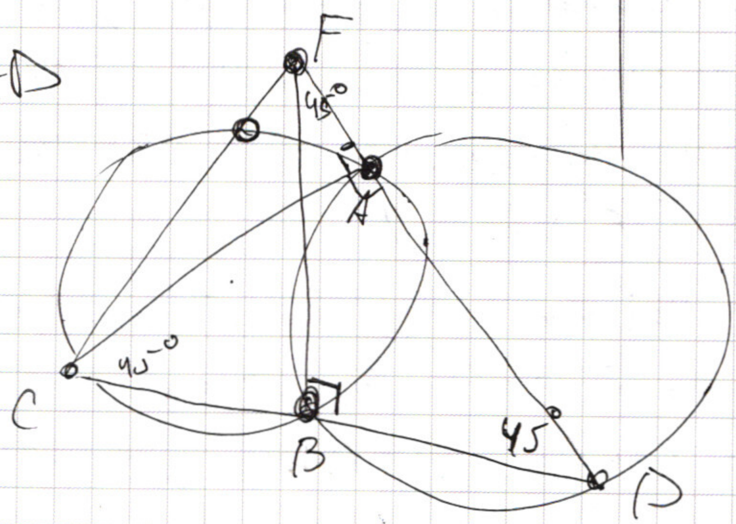


$\frac{AC}{\sqrt{2}}$

$\frac{AC}{\sin\varphi}=2\cdot13=\frac{AD}{\sin(180-\varphi)}$

$AC=AD$

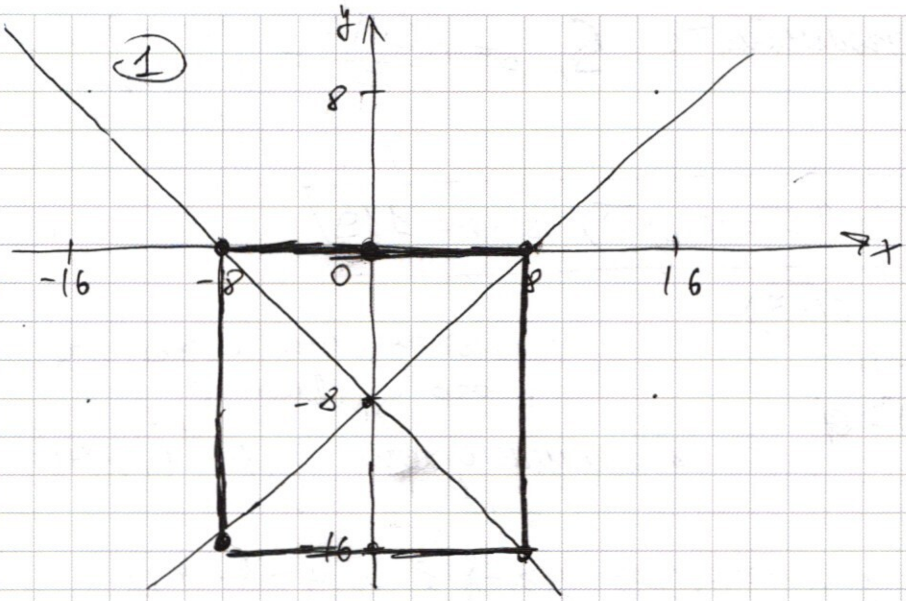
CF



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



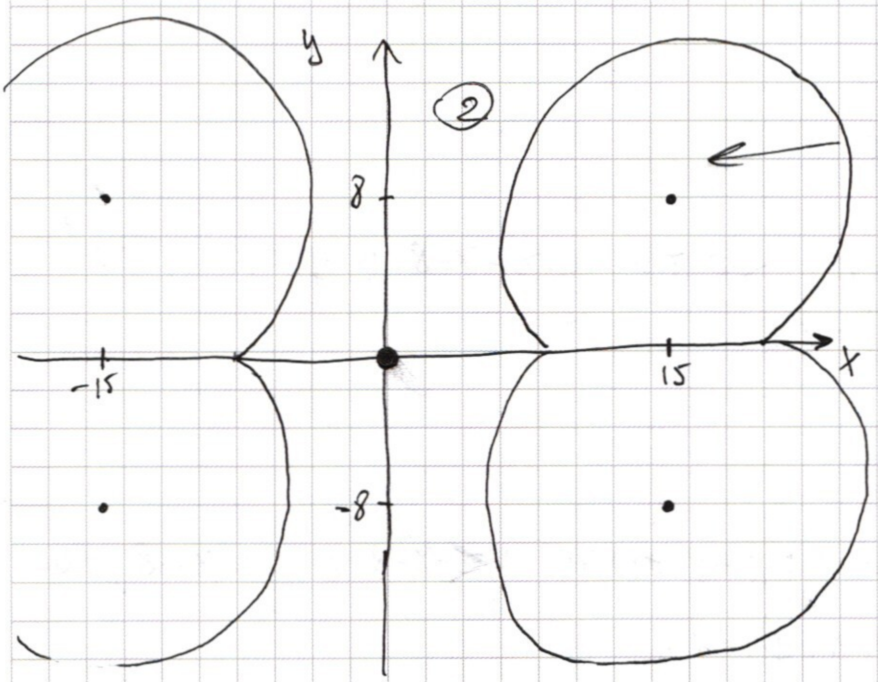
• Нарисуем график $(|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a$

1) Если $x\geq 0$ и $y\geq 0$, то $(x-15)^2+(y-8)^2=a$ – окружность с центром $(15;8)$ и радиусом $\sqrt{a}$

2) Если $x\geq 0$ и $y<0$, то $(x-15)^2+(y+8)^2=a$ – окружность с радиусом $\sqrt{a}$ и центром $(15;-8)$

3) Если $x<0$ и $y\geq 0$, то $(x+15)^2+(y-8)^2=a$ – окружность с центром $(-15;8)$ и радиусом $\sqrt{a}$

4) Если $x<0$ и $y<0$, то $(x+15)^2+(y+8)^2=a$ – окружность с центром $(-15;-8)$ и радиусом $\sqrt{a}$.



• Для двух верхних ~~частей~~ окружностей при $a>289$ пересечений с графиком на картинке 1 – нет, при $113\leq a\leq 289$ – одна точка, при $0\leq a<113$ – нету точек.

• Для двух нижних при $0\leq a<49$ – точек нету, при $a=49$ – одна точка, при $49<a\leq 289$ – две точки, при $a>289$ – нету точек, тогда ~~суммарно~~ при суммарно для всех окружностей $a>289$ – ноль решений. При ~~$128\leq a\leq 289$~~ $\boxed{a=289}$ – две точки, при $113\leq a<289$ – ~~две~~ четыре точки, при $49<a<113$ – четыре точки, при $\boxed{a=49}$ – две точки, при $a<49$ – нету точек

$= \frac{34}{\sqrt{2}} = \frac{17\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 17\sqrt{2}$

AF по теореме Пифагора из $\triangle CAF$: $AF = \sqrt{CF^2 - AC^2} =$

$= \sqrt{26^2 - 17^2\cdot 2} = \sqrt{98} = \sqrt{49\cdot 2} = 7\sqrt{2}$.

Так $\triangle CAF$ - прямоугольный, то $S_{ACF} = \frac{AC\cdot AF}{2} = \frac{17\sqrt{2}\cdot 7\sqrt{2}}{2} =$

$= 17\cdot 7 = 119$

$\boxed{\text{Ответ: а) } CF = 26;\ \text{б) } S_{ACF} = 119}$

№7

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

Заметим, что $a \geq 0$ из 2-ого уравнения.

• Нарисуем график $|y+x+8| + |y-x+8| = 16$.

1) Если $y+x+8 \geq 0$ и $y-x+8 \geq 0$, то $y \geq -x-8$ и $y \geq x-8$ и

$y+x+8+y-x+8 = 16$

$2y = 0$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y \geq -x-8 \\ y \geq x-8 \end{cases}$$

2) Если $y+x+8 \geq 0$ и $y-x+8 < 0$, то $y \geq -x-8$ и $y < x-8$, то

$y+x+8 - (y-x+8) = 16$

$2x = 16$

$$\begin{cases} x = 8 \\ y \geq -x-8 \\ y < x-8 \end{cases}$$

3) Если $y+x+8 < 0$ и $y-x+8 \geq 0$, то $y < -x-8$ и $y \geq x-8$, то

$-(y+x+8) + (y-x+8) = 16$

$-2x = 16$

$$\begin{cases} x = -8 \\ y < x-8 \\ y \geq x-8 \end{cases}$$

4) Если $y+x+8 < 0$ и $y-x+8 < 0$, то $y < -x-8$ и $y < x-8$, то

$-(y+x+8) - (y-x+8) = 16$

$-2y = 32$

$$\begin{cases} y = -16 \\ y < -x-8 \\ y < x-8 \end{cases}$$

окружности, а именно $\cos(\alpha_{0кар} + \alpha_{кар} t) = \cos(\alpha_{0пес} + \alpha_{пер} t)$ и $\sin(\alpha_{0кар} + \alpha_{кар} t) = \sin(\alpha_{0пес} + \alpha_{пер} t)$, тогда $\alpha_{0кар} + \alpha_{кар} t + 2\pi n =$ ~~$\alpha_{0пес} + \alpha_{пер} t$, $n \in \mathbb{Z}$ и $\alpha_{0кар} + \alpha_{кар}$~~

$= \alpha_{0пес} + \alpha_{пер} t$, $n \in \mathbb{Z}$, тогда $t = \dfrac{\alpha_{0пес} - \alpha_{0кар} - 2\pi n}{\alpha_{кар} - \alpha_{песк}} =$

$$= \frac{\arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) - 2\pi n}{\arccos\left(\frac{17}{18}\right) - \arccos\left(\frac{263}{288}\right)}, \ n \in \mathbb{Z},$$

тогда координата пескаря $(R_2 \cos(\alpha_{0пес} + \alpha_{пер} t);\ R_2 \sin(\alpha_{0пес} + \alpha_{пер} t)) =$

$$= \boxed{\left(6\cos\left(\arccos\left(\tfrac{1}{3}\right) + \frac{\arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) - 2\pi n}{\arccos\left(\frac{17}{18}\right) - \arccos\left(\frac{263}{288}\right)} \cdot \arccos\left(\tfrac{263}{288}\right)\right);\ 6 \cdot \sin\left(\arccos\left(\tfrac{1}{3}\right) + \frac{\arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) - 2\pi n}{\arccos\left(\frac{17}{18}\right) - \arccos\left(\frac{263}{288}\right)} \cdot \arccos\left(\tfrac{263}{288}\right)\right)\right), n \in \mathbb{Z}}$$

Ответ:

$$\boxed{\text{Ответ: } a = 289 \text{ и } a = 49}$$

№5

Найдём радиус окружности, по которой двигается карась: $R_1 = \sqrt{1 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+8} = 3$, а пескаря: $\sqrt{2^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{4+32} = \sqrt{36} = 6$.

Рассмотрим на какой угол успевает повернутся карась за 1 усл. ед. времени, если его скорость 1 усл. ед. скорости:

$l_{кар} = 1$ усл. ед. вр. $\cdot$ 1 усл. ед. скорости $= 1$ усл. ед. расстояния, а по теореме косинусов $l_{кар}^2 = R_1^2 + R_1^2 - 2R_1^2 \cos\alpha \Rightarrow$

$\cos\alpha = \dfrac{2R_1^2 - l_{кар}^2}{2R_1^2} = \dfrac{18-1}{18} = \dfrac{17}{18}$, а $\alpha_{кар} = \arccos\left(\dfrac{17}{18}\right)$,

для пескаря $l_{песк} = 1 \cdot 2{,}5 = 2{,}5$, а $\cos\alpha_{песк} =$

$= \dfrac{2R_2^2 - l_{песк}^2}{2R_2^2} = \dfrac{72 - 6{,}25}{72} = \dfrac{7200-625}{7200} = \dfrac{263}{288} \Rightarrow \alpha_{песк} = \arccos\left(\dfrac{263}{288}\right)$

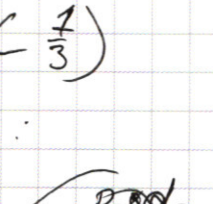
Тогда изначально угол карася:

$\alpha_{0кар} = \arccos\left(\dfrac{2R_1^2 - d_1^2}{2R_1^2}\right)$, где

$d_1 = \sqrt{(-1-3)^2 + (2\sqrt{2}-0)^2} = \sqrt{16+8} = \sqrt{24}$, тогда $\alpha_{0кар} =$
$= \arccos\left(\dfrac{18-24}{18}\right) = \arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

Угол изначально пескаря:

$\alpha_{0песк} = \arccos\left(\dfrac{2R_2^2 - d_2^2}{2R_2^2}\right)$,



где $d_2 = \sqrt{(2-6)^2 + (-4\sqrt{2}-0)^2} = \sqrt{16+32} = \sqrt{48}$

$\alpha_{0песк} = \arccos\left(\dfrac{72-48}{72}\right) = \arccos\left(\dfrac{24}{72}\right) = \arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$

Условие, когда они на кратчайшем расстоянии, что прямая, соединяющая двух рыб, пересекает центр

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{x+10}{2\sqrt2}\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$

$64-64\cdot4+200$

$x=2k$

$(x+10)\sqrt{x^3-64x+200}=(2\sqrt2)\cdot(x+10)(x-6)$

$\sqrt{x^3-64x+200}=2\sqrt2\cdot(x-6)$

$x^3-64x+200=8x-38$

$x^3-72x+248=0$

$64^2-800=$

$=8\cdot(8\cdot64-100)=$

$=8\cdot4\cdot(4\cdot64-25)=$

$1048:4=262$

$262:2=131$

$256-25=231$

$231:3=77$

$=8\cdot4\cdot3\cdot7\cdot11$

$32\cdot3\cdot7\cdot11$

$\left(x-\frac{72\pm4\sqrt{262}}{2}\right)=0$

$x=36\pm2\sqrt{262}$

$64\cdot6=384$

$72\cdot72=5184$

$y^3-4y^2+9 \mid y-3$

y^3-3y^2 ; y^2-y-3

$-y^2+9$

$-y^2+3y$

$9-3y$

$248\cdot4=992$

$5184-992=4192$

$4192:4$

$26\cdot26=676$

576

$24\cdot24=576$

232

$116\cdot2$

$2\cdot2\cdot58=$

$=2\cdot2\cdot2\cdot29$

$x^3-72x+ax^2-ax^2+232=0$

$x(x^2-36+ax)+ax^2-36x+\boxed{232}=0$

$131\cdot2$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt2}+\frac{5\sqrt2}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x+10}{2\sqrt2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=(x+10)(x-4).$$ Если $x=-10$, то обе части зануляются, значит этот корень подходит.

Если $x\neq-10$, то

$$\sqrt{x^3-64x+200}=(2\sqrt2)\cdot(x-4) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\begin{cases} x+10\neq0 \\ x^3-64x+200=8(x-4) \Leftrightarrow \\ x\geq4 \end{cases}}$$

$$\cancel{\begin{cases} x-10\neq0 \\ x^3-72x+232=0 \\ x\geq4 \end{cases}}$$

Пусть $x=2y$, тогда

$$\sqrt{8y^3-8^2\cdot2y+8\cdot25}=\sqrt8\cdot(2y-4)$$

$$\sqrt8\cdot\sqrt{y^3-16y+25}=\sqrt8\cdot(2y-4)$$

$$\sqrt{y^3-16y+25}=(2y-4) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2y-10\neq0 \\ y^3-16y+25=(2y-4)^2=4y^2-16y+16 \Leftrightarrow \\ 2y-4\geq0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\neq5 \\ y^3-4y^2+9=0 \Leftrightarrow \\ y\geq2 \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} y\neq5 \\ y^3-6y^2+9+2y^2=0 \Rightarrow \\ y\geq2 \end{cases}}$$
$$\cancel{\begin{cases} y\neq5 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} y\neq5 \\ (y-3)(y^2-y-3)=0 \Leftrightarrow \\ y\geq2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\neq5 \\ (y-3)\left(y-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\left(y-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \\ y\geq2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=1+\sqrt{13} \end{array}\right.,$$ а

также $x=-10$.

$\boxed{\text{Ответ: } x=-10 \text{ или } x=6 \text{ или } x=1+\sqrt{13}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x \geq -2$

$(x+1)(x-2)(4x^2-x-2)$

$4x^4+x^2+4x-5x^2(x+2)+4 \geq 0$

$4x^4+x^2+4x-5x^3-10x^2+4 \geq 0$

$4x^4-5x^3-9x^2+4x+4 \geq 0$

$4x^4+5x^3+10x^2$

$x^2(4x^2+5x+10)$

$x(5x^2+3x+4)$

$5x^3+3x^2+4x$

$\cancel{4-5-9+4+4}$

$4x^4-5x^3-9x^2+4x+4 \;|\; x+1$

$4x^4+4x^3 \qquad 4x^3-9x^2+4$

$-9x^3-9x^2+4x+4$

$(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f)$

$-9x^3-9x^2$

$4x+4$

$4x+4$

0

$4x^3-9x^2+4 \;|\; x-2$

$4x^3-8x^2 \qquad 4x^2-x-2$

$-x^2+4$

$-x^2+2x$

$4-2x$

$4-2x$

0

x^2+4x+4

$4x^4+(|x+2|)^2-5x^2|x+2|$

$k^3+2a=0$

$k^3-2k+25=2\sqrt{5}-4$

$\sqrt{8}\left(k^3-2k+25\right)=2\sqrt{2}(2k-4)$

$8k^3-8\cdot 2k+8\cdot 25=2\sqrt{2}\cdot(2k-4)$

$4x^2-x-2$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+32}}{8}=\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{8}$

$16x^3+15x^2+22x+4=0$

$4x^4+|x+2|\cdot\left(|x+2|-\sqrt{5}x\right)^2$

x^3

$0\cdot(5+x+5)c^3$

$5x-5x^3$

$4x^4+8x^3$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№4

Если $x \geq -2$, то $|x+2| = x+2$, тогда

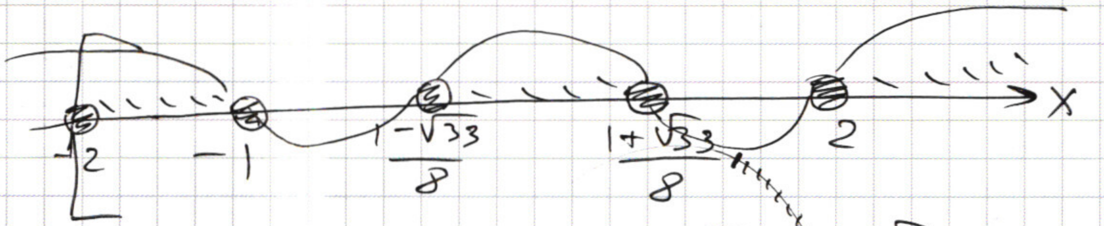
$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$

$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$

$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0$

$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0$

$(x+1)(x-2)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0$



$x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$

Если $x < -2$, то $|x+2| = -x-2$, тогда

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(-x-2) + 4 \geq 0$

$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$

$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$, то при ~~$x \leq -2$~~ любом ~~$4 \cdot (-2)^4 +$~~ x, эта функция положительна,

значит $x \in (-\infty; -2)$.

$\boxed{\text{Ответ: } x \in (-\infty; \cancel{-2}\ -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$4x^4 + (|x+2|)^2 - 5x^2|x+2| \geq 0$

$4x^4 + |x+2| \cdot (|x+2| - 5x^2) \geq 0$

$-0{,}5$

-3

$|x+2| \geq 5x^2$ $\wedge 0$

$|a| \geq b$

$a \in (-\infty; -b] \cup [b; +\infty)$

$16x^3 + 15x^2 + 22x + 4 = 0$

$x \geq -2$

$\cancel{x+2 \geq 5x^2}$

$x < -2$

$-x-2 \geq 5x^2$

$-\frac{15}{16}$

$5x^2 + x + 2 \geq 0$ – всегда

$x + 2 \leq -5x^2$

$5x^2 + x + 2$

$|x+2| \geq 5x^2$, при $x \leq -2$

-3

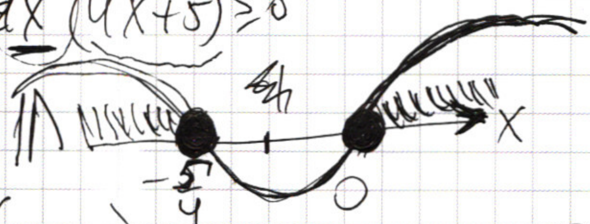
$\left|\frac{5}{4} \cdot -\frac{15^3}{16^3}\right| \leq 1$

$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$

$4x^4 + 5x^3 \geq 0$

$-\frac{5}{4}; 0$

$x^3(4x+5) \geq 0$



$11x^2 + 4x + 4 \geq 4$

$x^3(4x+5)$

$-\frac{15}{4} + 5 = \frac{5}{4}$

$3x^2(4x+5) + x^3 \cdot 4$

$12x^3 + 15x^2 + 4x^3$

$\cancel{x^2 + 4x}$ $(x+2)^2 + 10x^2 \geq 2$

$x = -\frac{15}{16}$

$16x^3 + 15x^2 = 0$

$16x + 15 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)