

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра-
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$a_1, \dots, a_8.$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_8 = 700 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Т.к. $0 \leq a_i \leq 9$, $i = 1, \dots, 8$, то возможны 2 случая:

- 1) В числе две двойки, две пятёрки, одна семёрка, 3 единицы.

~~Таких чисел:~~

~~Если бы все цифры были разными, то ~~каждое~~ число, удовлетвор. условию было бы $8!$. ~~но у нас есть эти цифры~~ есть т.к. не все цифры разные, то ~~нужно~~ ~~разделить $8!$ на факториалы~~ Но, заметим, что если у нас есть k одинаковых цифр, то $8!$ нужно разделить на $k!$, т.к. $k!$ - кол-во перестановок этих цифр.~~

Тогда чисел, в которых две двойки, две пятёрки, одна семёрка, три единицы:

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{8!}{4 \cdot 3 \cdot 2}$$

2) В числе одна четвёрка, две пятёрки, одна шестёрка, четыре единицы.

Таких чисел:

$$\frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{8!}{4 \cdot 3 \cdot 2^2}$$

Тогда всего чисел:

$$\frac{8!}{4 \cdot 3 \cdot 2^2} + \frac{8!}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{8!}{4!} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \overset{4}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} \cdot \frac{3}{2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \underline{2520}$$

Ответ: 2520

$$(x+6) \sqrt{x^3-4x+80} \stackrel{w3.}{=} (x+6)(x+4) \cdot \sqrt{2}$$

$$\boxed{x^3-4x+80 \geq 0}$$

$$(x+6)(\sqrt{x^3-4x+80} - (x+4)) = 0.$$

1) $x = -6$ Проверка: $(-6)^3 + 4 \cdot (-6) + 80 < 0$.

Тогда $x = -6$ не подходит.

2) $\sqrt{x^3-4x+80} = (x+4) \cdot \sqrt{2}$ $\boxed{x+4 \geq 0}$

$$x^3-4x+80 = 2x^2+16x+32$$

$$x^3-2x^2-20x+48=0.$$

По т. Безу: $x=4$. Проверка: $4^3-4 \cdot 4+80 \geq 0$ подходит.

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-20x+48 & x-4 \\ -x^3+x^2 & \hline 2x^2-20x & \\ -2x^2+8x & \\ \hline -12x+48 & \\ -12x+48 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} x-4 \\ \hline x^2+2x-12 \end{array}$$

Тогда $(x-4)(x^2+2x-12)=0$.
 $x^2+2x-12=0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x+1)^2 = 13.$$

$$x+1 = \pm \sqrt{13}.$$

$$x_1 = \sqrt{13} - 1 \quad ; \quad x_2 = -\sqrt{13} - 1 < -3 - 1 = -4.$$

$$\text{т.е. } -\sqrt{13} - 1 + 4 < 0.$$

Тогда $x = -\sqrt{13} - 1$ не подходит.

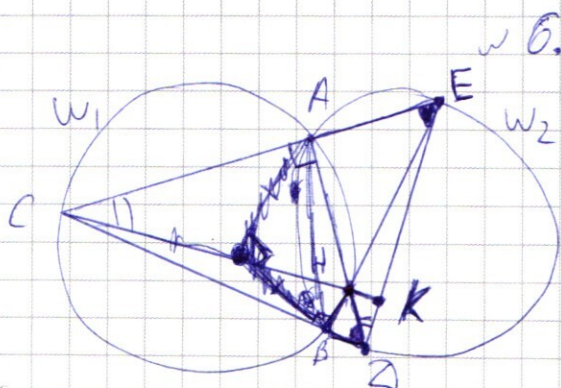
$$x = \sqrt{13} - 1$$

Проверка: $\sqrt{13} - 1 \geq 3 - 1 = 2.$

$$\sqrt{13} - 1 < 4 - 1 = 3.$$

$$(\sqrt{13} - 1)^3 - 4(\sqrt{13} - 1) + 80 > 2^3 - 4 \cdot 3 + 80 > 0.$$

Ответ: $x_1 = 4$; $x_2 = \sqrt{13} - 1.$



Нашли: а) CF.

б) SACE.

(B. ~~AB~~ $\angle D =$

Решение: w_1 - первая окр. w_2 - вторая.

Пусть $w_1 \cap AD = H$. Вторично.

Проведем BH. Тогда CAHB - вписанный $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle CBH = 90^\circ.$$

Пусть $CA \cap w_2 = E$, вторично

~~Проведем~~ ~~НЕ~~. Пусть $ВН \cap \omega_2 = E$ вторично.
Проведем AE .

$\angle AEB = \angle ADB$. т.к. опр. ко $\overline{AB}$

$\angle AHE = \angle ADB$ и B , т.к. вертис.

Тогда $\angle EAH = \angle EBD = 90^\circ$.

Тогда $\angle EAC = 180^\circ$.

Проведем CH и DE .

CH - диаметр ω_1 , т.к. $\angle CAD = 90^\circ$.

DE - диаметр ω_2 , т.к. $\angle EBD = 90^\circ$.

т.к. радиусы ω_1 и ω_2 равны, то

$$CH = DE.$$

Рассм. $\triangle DCE$.

EB, DA - высоты.

$EB \cap DA = H$ - ортоцентр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow CH \perp DE$.

Пусть $CH \cap DE = K$.

Тогда $\angle ECK = \angle EDA$, т.к. $\angle CAD = \angle CAD$ и

$\angle AHC = \angle BHD$.

Рассм. $\triangle CAH$ и $\triangle DAE$:

1) обе прямоуг.

2) $CH = DE$.

3) $\angle ACH = \angle ADE$.

Тогда $\triangle CAH = \triangle DAE$ по второй гипот и острому углу.

Поэтому $AC = AD$, т.е. $\angle ACD = \angle ADC = \frac{180 - 90}{2} = 45^\circ$.

Рассм. $\triangle HBD$. $\angle BHD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle BDH$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда $BD = BH$, т.е. U и F одно и то же тогда.

2) т.е. $CF = CH = 10$.

3) Пусть $AE = x$; $BE = y$.

$$\angle CED = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle ECD. \quad \text{т.е.}$$

$$\angle CED = \angle CAE = 45^\circ.$$

Пусть $AE = x = AU$; $BH = BD = y$.

Тогда $UD = y\sqrt{2}$; $HE = x\sqrt{2}$.

$$CB = CE = BH + HE = y + x\sqrt{2};$$

$$CA = x\sqrt{2} \quad AB = AU + UD = x + y\sqrt{2}.$$

Заметим, что:

$$CU^2 = CB^2 + BU^2$$

$$CU^2 = AU^2 + AC^2$$

Тогда:

$$AU^2 + AC^2 = CB^2 + BU^2$$

$$x^2 + (x + y\sqrt{2})^2 = y^2 + (y + x\sqrt{2})^2$$

$$2x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 = 2y^2 + 2\sqrt{2}xy + 2x^2$$

$$(x-y)(x+y) + (x + y\sqrt{2}) - (y + x\sqrt{2}) + (y + x + y\sqrt{2} + x\sqrt{2}) = 0$$

$$(x-y)(x+y) + \frac{(x-y)(1+\sqrt{2})}{(\sqrt{2}-1)}(x+y) = 0$$

$$(x-y)(x+y) + (x-y)(x+y) = 0 \Rightarrow x=y.$$

см. рис. с л. стр.

$$8) BH = \sqrt{CH^2 - BC^2} = 8 = BD. \Rightarrow CD = 14.$$

тогда ~~2AC^2~~ $AC^2 + AD^2 = 14^2$

$$\cdot \quad \cancel{2AC^2 = 14^2}$$

$$2AC^2 = 14^2$$

$$\cancel{AC} \quad AC = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}.$$

$$\cancel{AH = \sqrt{CH^2 - AC^2} = \sqrt{93}.$$

$$\cancel{S_{AFC} = S_{AHC} = \frac{1}{2} \sqrt{83} \cdot 7 = \frac{1}{2} \sqrt{651}.$$

Ответ:

а) $CF = 10.$

б) $S_{AFC} = \frac{1}{2} \sqrt{651}.$

$$AC = AD = 7\sqrt{2}.$$

$$AH = \sqrt{CH^2 - AC^2} = \sqrt{100 - 98} = \sqrt{2}.$$

$$S_{AFC} = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 7.$$

Ответ: ~~а)~~ б) $CF = 10.$

б) $S_{AFC} = 7.$

Уч.

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^2|x-2| + (1-x-2)^2 \geq 0.$$

Пусть $|x-2| = t.$

$$2x^4 - 3x^2t + t^2 \geq 0.$$

$$2x^4 - 2x^2t - x^2t + t^2 \geq 0$$

$$2x^2(x^2 - t) - t(x^2 - t) \geq 0$$

$$(x^2 - t)(2x^2 - t) \geq 0.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) \begin{cases} x^2 \geq t. \\ 2x^2 \geq t. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 \geq |x-2| \\ 2x^2 \geq |x-2|. \end{cases}$$

~~для~~ ~~х=2~~

или

$$2) \quad x \geq 2.$$

$$\begin{cases} x^2 \geq x-2. \\ 2x^2 \geq x-2. \end{cases}$$

$$x^2 - x + 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 8 < 0 \Rightarrow x^2 - x + 2 > 0$$

$$2x^2 - x + 2 \geq 0$$

$$\Delta = 1 - 4^2 < 0 \Rightarrow 2x^2 > x - 2.$$

Таким образом для $x \geq 2$ выполняется
пер-во.

$$3) \quad x \leq 2.$$

$$x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$(x+2)(x-1) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -2] \cup [1; 2)$$

$$2x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 16 = 17.$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$(x + \frac{1 + \sqrt{17}}{4})(x - \frac{\sqrt{17} - 1}{4}) \geq 0.$$

$$x \in (-\infty; -\frac{\sqrt{17} - 1}{4}] \cup [\frac{\sqrt{17} - 1}{4}; 2)$$

$$x \in (-\infty; -\frac{\sqrt{17} - 1}{4}] \cup [\frac{\sqrt{17} - 1}{4}; 2)$$

$$\frac{-\sqrt{17}-1}{4} < -2.$$

$$\frac{\sqrt{17}-1}{4} < 1.$$

Тогда решением ~~системы~~ является

$$\begin{cases} x \in [2; +\infty) \\ x \in (-\infty; -2] \cup [1; 2) \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty).$$

$$2) \cdot \begin{cases} x^2 \leq t \\ 2x^2 \leq t \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 \leq |x-2| \\ 2x^2 \leq |x-2| \end{cases}$$

Возведём каждое ур-ние в квадрат,
т.к. обе т. неотриц.

$$\begin{cases} x^4 - (x-2)^2 \leq 0 \\ 4x^4 - (x-2)^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 - x + 2)(x^2 + x - 2) \leq 0 \\ (2x^2 - x + 2)(2x^2 + x - 2) \leq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 \leq 0 & ; (x+2)(x-1) \leq 0; x \in [-2; 1]. \\ 2x^2 + x - 2 \leq 0. \end{cases}$$

$$2x^2 + x - 2 = 0.$$

$$D = 1 + 16 = 17.$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1+\sqrt{17}}{4}, \frac{\sqrt{17}-1}{4} \right].$$

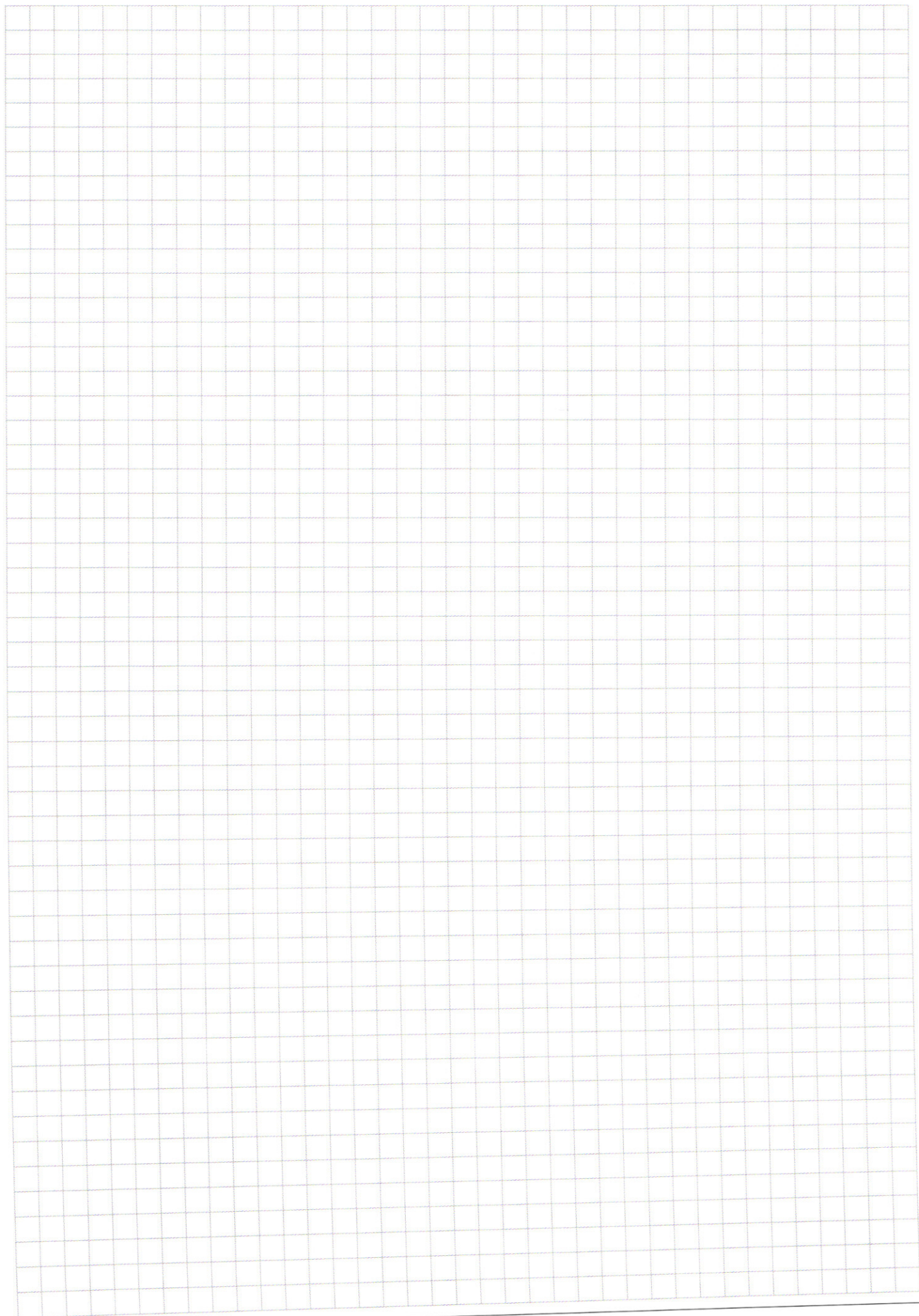
$$\begin{cases} x \in \left[-\frac{1+\sqrt{17}}{4}, \frac{\sqrt{17}-1}{4} \right] \\ x \in [-2; 1]. \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-\frac{1+\sqrt{17}}{4}, \frac{\sqrt{17}-1}{4} \right].$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда будем иметь следующие случаи:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty) \\ x \in \left[-\frac{1+\sqrt{17}}{4}; \frac{\sqrt{17}-1}{4} \right] \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{\sqrt{17}+1}{4}; \frac{\sqrt{17}-1}{4} \right] \cup [1; +\infty)$

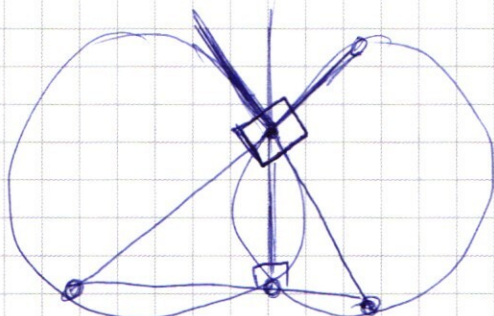


☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

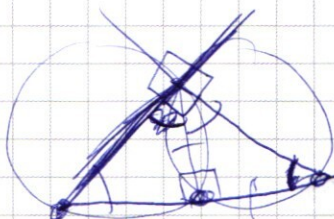
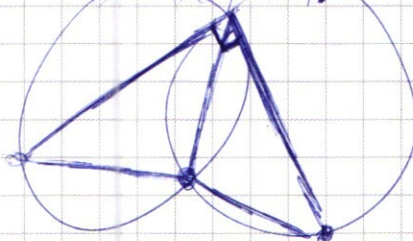
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 2 \\ 93 \\ \times 7 \\ \hline 651 \end{array}$$



$$(y-x) - \sqrt{2}(y-x) =$$

$$= (1 - \sqrt{2})(y-x)$$



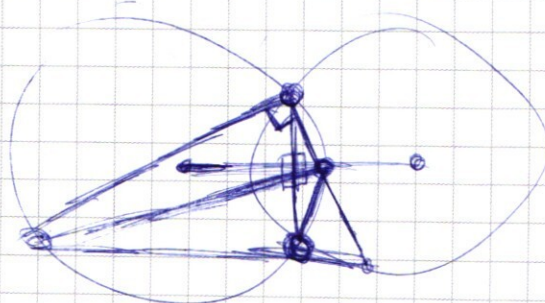
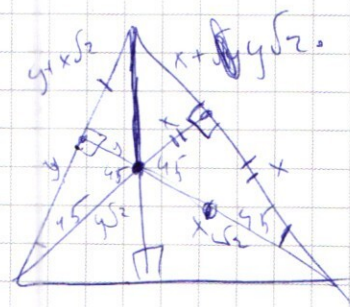
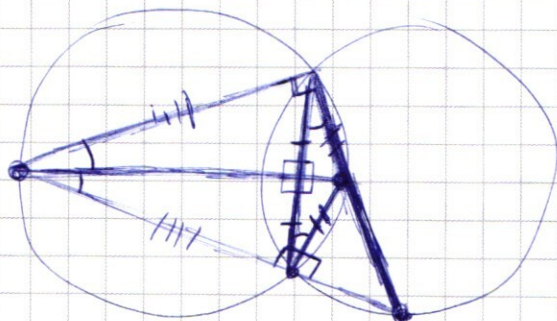
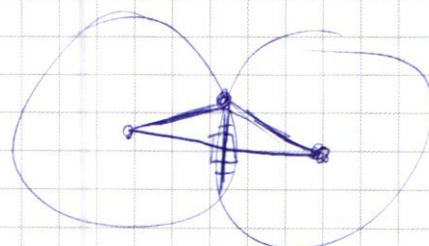
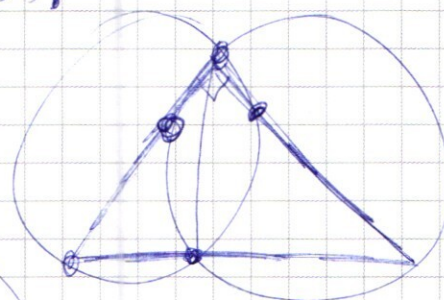
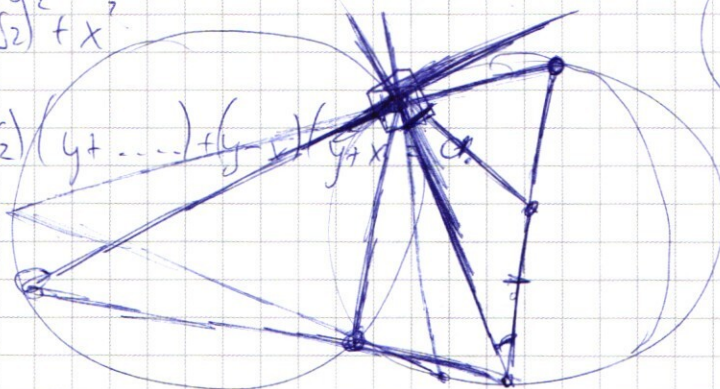
$$14/35$$

$$(y+x\sqrt{2})^2 + y^2 =$$

$$= (x^2 + y^2) + x^2$$

$$(y+x\sqrt{2} - x-y\sqrt{2})(y+...)+ (y-x)(y+x)$$

$$(y-x)^2$$



$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{3}{2} =$$

$$= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$\frac{8!}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{8!}{4 \cdot 3 \cdot 2^2} =$$

$$= \frac{8!}{4!} \left(1 + \frac{1}{2} \right)$$

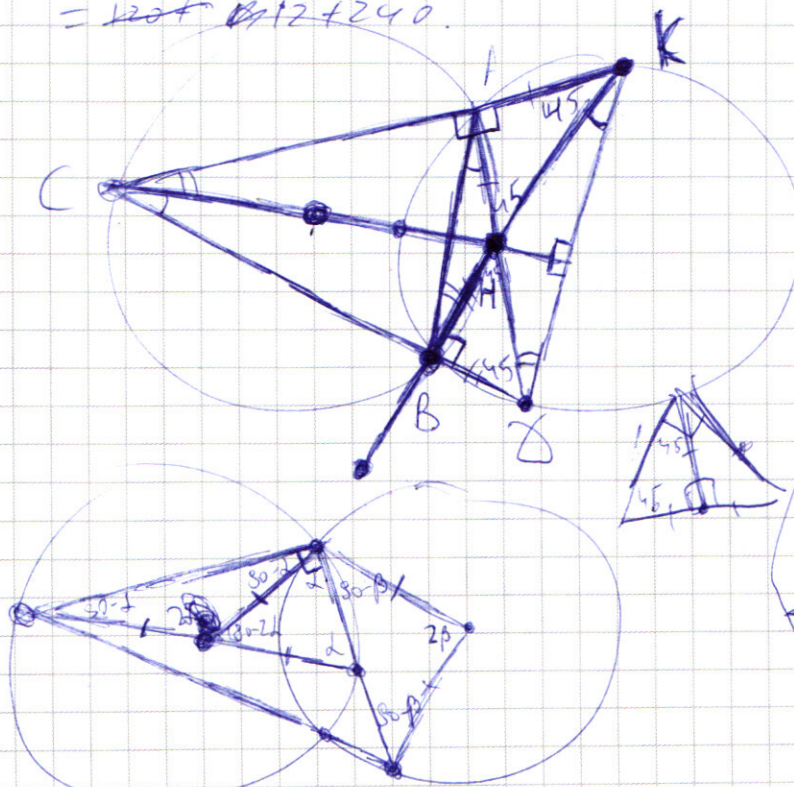
$$42$$

$$\frac{210}{12}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$21 \cdot 12 =$$

$$= 120 + 12 + 240$$



$$CK = \frac{1}{2} \cdot CD$$

$$KB^2 + BD^2 = BC^2 + BH^2 = 100$$

$$KH \cdot (KB + BH) = (BC - BD) \cdot BH = CD$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $x \geq 2$.

$$2x^4 + x^2 - 9x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0.$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 9x + 4 \geq 0.$$

$$x \neq \pm 2; \neq 4.$$

$$48/b_3 + \dots + b_{3000} = 95.$$

$$32 - 24 + 28 - 8 + 4.$$

$$32 + 24 + 28 + 8 + 4.$$

$$2 \cdot 4^4 - 3 \cdot 4^3 + 7 \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 + 4 =$$

$$= 4(2 \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 7 \cdot 4 - 9 + 1) =$$

$$= \cancel{4kx + 6kx} kx; kx^2; \dots kx^{3000}.$$

$$b_1 + \dots + b_{3000} = 95. \quad \cancel{k + kx + \dots + kx^{2999}}.$$

$$b_1 + \cancel{10b_2 + \dots} + b_2 + 50b_3 + \dots + 50b_{3000} = 1095.$$

$$b_1 + 2b_2 + \dots + \cancel{4b_{2999}} + 2b_{3000} = ?$$

$$\cancel{kx} + kx^2 + \dots + kx^{3000} = 95.$$

$$kx + kx^2 + 50kx^3 + \dots + \cancel{40kx^{2999}} + 50kx^{3000} = 1095.$$

$$kx + 2kx^2 + \dots + 2kx^{3000} = ?$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$0 \leq x_8 \leq 9$$

$$x_1, \dots, x_8 = 700 = 7 \cdot 5^2 \cdot 2^2.$$

$$1) \quad 7, 5, 2, 2, 5, 2, 2, 1; \quad 1; \quad 1; \quad 1.$$

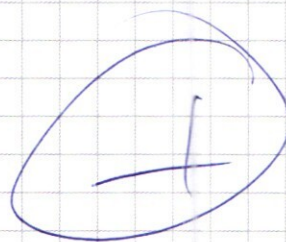
$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 5!}$$

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!}$$

$$2) \quad 2, 5, 5, 4, 1, 1, 1, 1.$$

$$\frac{8!}{2! \cdot 4!}$$

$$1) + 2).$$



$$(x+6)\sqrt{x^3-4x+80} = \sqrt{2}(x+6)\sqrt{x+4}.$$

$$1) \quad x = -6. \quad \text{Проверка } (-6)^3 - 4 \cdot (-6) + 80 < 0.$$

$$2) \quad \sqrt{x^3-4x+80} = \sqrt{2}(x+4). \quad \boxed{x \geq -4.}$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 8x + 32.$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0.$$

$$x = 1; \quad x = 2; \quad x = 4; \quad x = 6; \quad x = 12; \quad x = 24.$$

$$64 - 32 - 80 + 48 = 0.$$

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 2x^2 - 20x + 48 & x-4 \\
 \underline{x^3 - 4x^2} & \\
 2x^2 - 20x & \\
 \underline{-2x^2 + 8x} & \\
 -12x + 48 & \\
 \underline{-12x + 48} & \\
 0 &
 \end{array}$$

$x_1 = 4$. Проверка: $4^3 - 4 \cdot 4 + 80 > 0$. +

$$x^2 + 7x - 12 = 0$$

$$(x+1)^2 = 13 \Rightarrow x+1 = \pm \sqrt{13}$$

$$x+1 = \pm \sqrt{13}$$

$x_2 = \sqrt{13} - 1$; $x_3 = -\sqrt{13} - 1 < -3 - 1 = -4$.
не подх.

Проверка:

$$(\sqrt{13}-1)^3$$

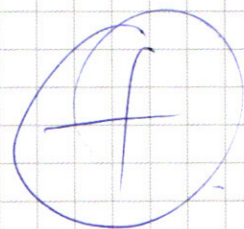
$$(\sqrt{13}-1)((\sqrt{13}-1)^2 - 4) + 80$$

$ВН = 8 = ВД. \Rightarrow$
 $\Rightarrow$

$$\sqrt{13} - 1 > 3 - 1 = 2.$$

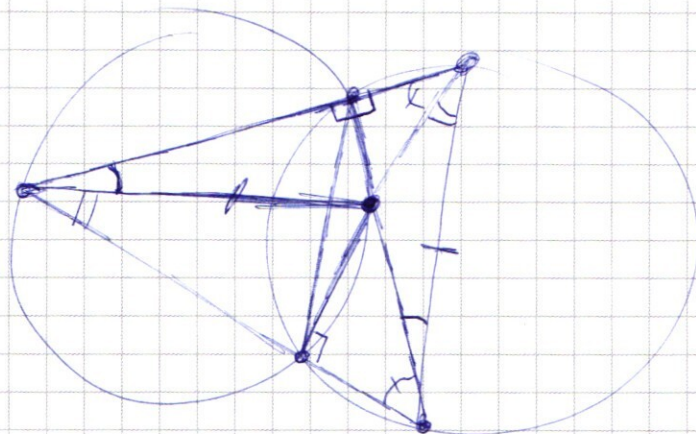
$$\sqrt{13} - 1 < 4 - 1 = 3.$$

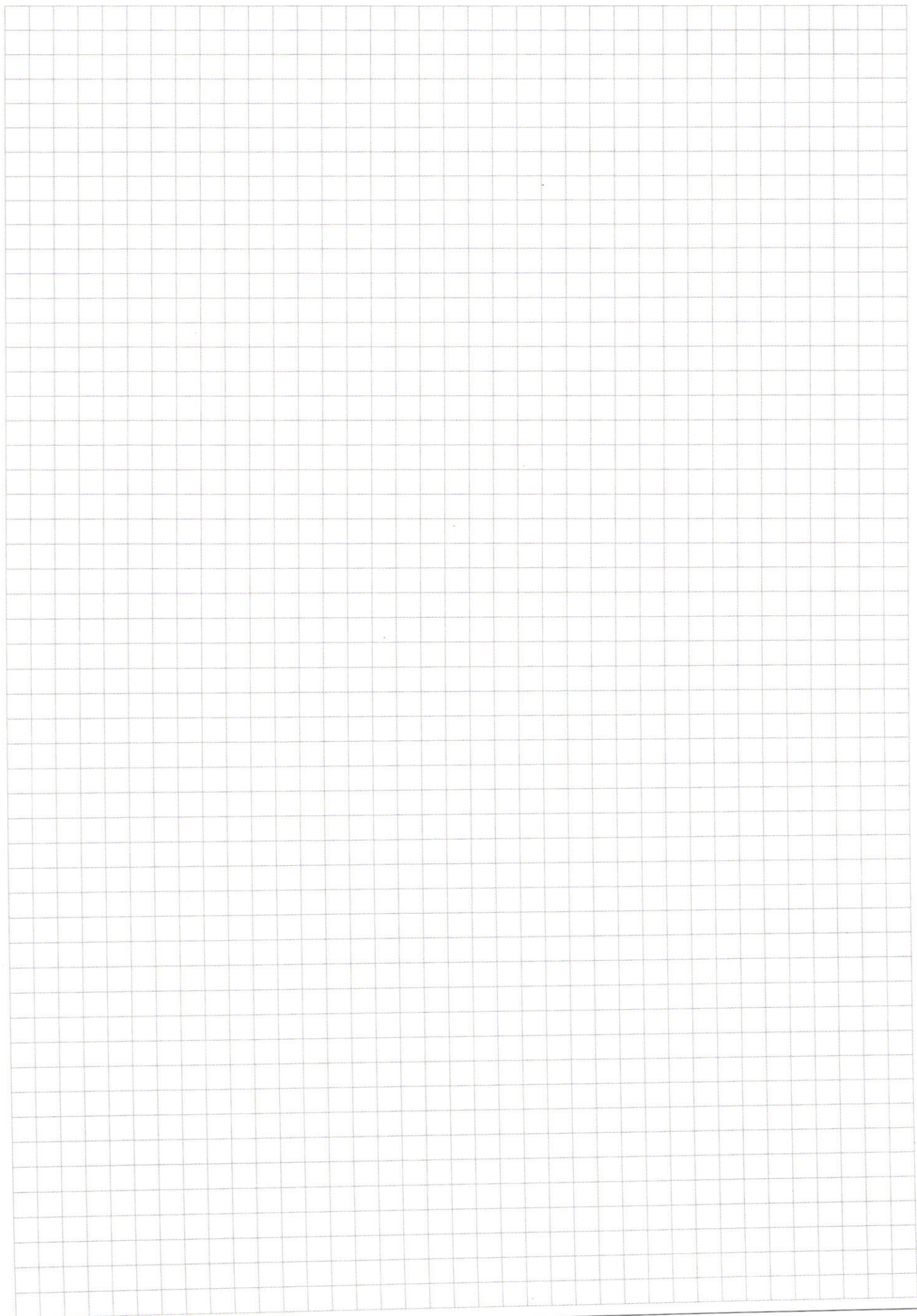
$> 2^3 - 4 \cdot 3 + 80 > 0$.



Отв: $x_1 = \sqrt{13} - 1$; $x_2 = 4$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)