

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{2b_1 \left(\frac{q \cdot (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} \right)}{4S_n} = \frac{2b_1 \left(\frac{q \cdot (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} \right)}{39b_1 \left(\frac{q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} \right)} =$$

$$= \frac{2 (q^3 - 1) q (q^{3000} - 1)}{39 (q^2 - 1) q^2 (q^{3000} - 1)} = \frac{2 (q^3 - 1)}{39 q (q^2 - 1)} = \frac{2 (q^3 - 1)}{39 q (q^2 - 1)} =$$

$$= \frac{2 \cdot (0,064 - 1)}{39 \cdot 0,410,16 - 1} = \frac{2 \cdot 0,936}{39 \cdot 0,4 \cdot 0,84} = \frac{1872}{13,104}$$

$$\begin{array}{r} 0,84 \\ \times 0,4 \\ \hline 0,336 \\ 35 \\ \hline 0,336 \\ \times 39 \\ \hline + 30,24 \\ 13108 \\ \hline 13104 \end{array}$$

$$3. \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 - 6x - 40$$

$$x^3 - 64x + 200 \geq 0$$

$$x^3 - 64x + 200 \geq 0$$

$$x(x-8)(x+8) + 200 \geq 0$$

$$x \rightarrow -10$$

$$\frac{x+510}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 - 6x - 40$$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = \frac{2\sqrt{2}(x^2 - 6x - 40)}{(x+10)}$$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = \frac{2\sqrt{2}(x+4)(x-10)}{(x+10)}$$

$$x^3 - 64x + 200 = \left(\frac{2\sqrt{2}(x+4)(x-10)}{x+10} \right)^2$$

$$13104 \mid 1872$$

$$\begin{array}{r} 1872 \mid 13104 \\ - 13104 \\ \hline 56160 \\ 52416 \\ \hline 37440 \end{array}$$

$$x \neq -10$$

$$13104 \mid 1872$$

$$\frac{(x+4)(x-10)}{x+10} \geq 0$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -10 \quad -4 \quad 10 \quad x \\ \hline -10 < x \leq -4 \vee x \geq 10 \end{array}$$

$$x^3 - 64x + 200 = \frac{8(x+4)^2(x-10)^2}{(x+10)^2}; \quad x^3 - 64x + 200 = \frac{8(x^2+8x+16)(x^2-20x+100)}{x^2+20x+100} =$$

$$= \frac{8(x^4 - 20x^3 + 100x^2 + 8x^3 - 160x^2 + 800x + 16x^2 - 320x + 1600)}{x^2 + 20x + 100} =$$

$$= \frac{8(x^4 - 12x^3 - 44x^2 + 480x + 1600)}{x^2 + 20x + 100} = 8x^2 - 96x - 352 + \frac{1120}{x^2 + 20x + 100}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \sin \frac{\pi}{4} \cos(\arcsin \frac{1}{3}) - \cos \frac{\pi}{4} \sin(\arcsin \frac{1}{3}) = \frac{x^4 - 16x^3 - 44x^2 + 480x + 1600}{x^4 + 20x^3 + 100x^2} - \frac{x^2 - 36x + 556}{x^2 + 20x + 100}$$

$$= 8(x^2 - 36x + 556 -$$

$$- 1740x + 54000$$

$$x^2 + 20x + 100)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{3} = -36x^3 - 144x^2 + 480x + 1600$$

$$- 36x^3 - 420x^2 + 3600x$$

$$556x^2 + 4080x + 1600$$

$$- 556x^2 + 1120x + 55600$$

$$- 4040x - 54000$$

$$x^3 - 64x + 200 = x^3 - 64x$$

$$(x^3 - 64x + 200) / (x+10)^2 = 8(x+4)^2(x-10)^2$$

$$(x^3 - 64x + 200)(x^2 + 20x + 100) =$$

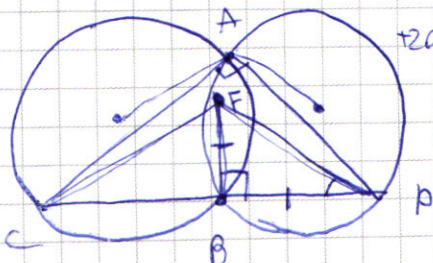
$$CF = ?$$

$$= x^5 + 20x^4 + 100x^3 - 64x^3 - 1280x^2 =$$

$$6400x + 200x^2 + 4000x + 20000$$

$$BF = BP$$

$$x^5 + 20x^4 + 36x^3 - 44x^2 + 480x - 2400x + 20000$$



$$\sin d = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\Delta \Phi = \omega_H \Delta t$$

$$\Delta \Phi + \pi = \omega_K \Delta t$$

$$\frac{\Delta \Phi + \pi}{\Delta \Phi} = 5$$

$$\Delta \Phi = \frac{\pi}{9}$$

$$\Delta \Phi_1 = \omega_H \Delta t_1$$

$$\Delta \Phi_1 + 2\pi = \omega_K \Delta t_1$$

$$\frac{\Delta \Phi_1 + 2\pi}{\Delta \Phi_1} = 5$$

$$\Delta \Phi + \pi = 2\pi \Delta \Phi$$

$$1.5 \Delta \Phi = \pi$$

$$\Delta \Phi = \frac{\pi}{1.5} = \frac{2\pi}{3}$$

$$R_K = \sqrt{1+8} = 3$$

$$R_H = \sqrt{4+32} = 6$$

$$\omega_K = 2.5 \omega_H$$

$$v = \omega R$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$\omega_K = 2.5 \omega_H$$

$$\omega_H \Delta t = \Delta \Phi$$

$$\omega_K \Delta t = (\Delta \Phi + \pi)$$

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta \Phi + \pi} = \frac{1}{2.5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$ $23^2 = 529$

4900

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = 4900$$

$$4900 = 7^2 \cdot 10^2 = 7^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

$$N = \frac{A_8}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 2} = 1105$$

$$= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 42 \cdot 20 \cdot 3 = 840 \cdot 3 = 2520$$

2. $b_n = b_1 q^{n-1}$

$$S_{3000} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} = S_n$$

$$5S_n = b_1 + b_2 + 40b_3 + b_4 + b_5 + 40b_6 + \dots + 40b_{3000} = S_n + 39(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) =$$

$$= S_n + 39(b_1 q^2 + b_1 q^5 + b_1 q^8 + \dots + b_1 q^{2999}) = S_n + 39b_1(q^2 + q^5 + q^8 + \dots + q^{2999}) =$$

$$= S_n + 39b_1 \cdot \left(\frac{q^2 \cdot ((q^3)^{1000} - 1)}{q^3 - 1} \right)$$

$$N_1 = S_n + 2(b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{3000}) = S_n + 2b_1(q + q^3 + q^5 + \dots + q^{2999}) =$$

$$= S_n + 2b_1 \left(\frac{q((q^2)^{1500} - 1)}{q^2 - 1} \right)$$

$$S_n = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$5S_n = S_n + 39b_1 \left(\frac{q^2 \cdot ((q^3)^{1000} - 1)}{q^3 - 1} \right) = S_n + 39b_1 \left(\frac{q^2 \cdot (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} \right)$$

$$N = S_n + 2b_1 \left(\frac{q \cdot ((q^2)^{1500} - 1)}{q^2 - 1} \right) = S_n + 2b_1 \left(\frac{q \cdot (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} \right)$$

$$4S_n = 39b_1 \left(\frac{q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} \right)$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

$$x \geq -2$$

$$S_n = b_1 \cdot \frac{(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$x = -1$$

$$4 = \frac{39 \cdot \frac{q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}}{\frac{(q^{3000} - 1)}{q - 1}} = 39 \cdot \frac{q^2 \cdot (q - 1)}{q^3 - 1} = 4$$

$$\begin{array}{r} -135 \\ +99 \\ \hline -12 \\ +4 \\ \hline \end{array}$$

$$35q^2 - 4q - 4 = 0 \quad 4x^2 + 5x + 11 + \frac{4}{x} + \frac{439}{12} \cdot q^3 - 39q^2 = 4q^3 - 4$$

$$D_1 = 4 + 140 = 144 \quad 4(x^2 + \frac{1}{x}) +$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 12}{35}$$

$$x_1 = \frac{14}{35} = \frac{2}{5} = 0.4 = q_1$$

$$x_2 = -\frac{10}{35} = q_2$$

$$S = 3000 b_1$$

$$5S = 3000 b_1 +$$

$$4S = 39b_1 (1000)$$

$$q_3 = 1$$

$$\begin{array}{r} 35q^3 - 39q^2 + 4 \quad | \quad q-1 \\ -35q^3 + 35q^2 \\ \hline -4q^2 + 4 \\ -4q^2 + 4q \\ \hline -4q + 4 \\ -4q + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4$$

$$4x^4 + 11x^3 + 5x^2 + 4x + 4$$

$$4S = 39000 b_1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$ $0 \leq a_i \leq 8$ $\forall i \in \bar{8}$
 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 =$$

$$= 4900 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

Всего возможно $A_8 = 8!$ ^(поправимую произведение) чисел с 8-ми цифрами (чисел с 8-ми цифрами), чтобы посчитать каждое одно число $2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!$ раз. Т.к. у нас есть две 2, 5, 7, 1. $\Rightarrow$ общее число чисел

$$N = \frac{A_8}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{8!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} =$$

$$= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 42 \cdot 20 \cdot 3 = 840 \cdot 3 = 2520$$

Ответ: 2520

2. $S = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} = b_1 + b_2 + \dots + b_{3000}$ $b_n = b_1 q^{n-1}$

$${}^5S = b_1 + b_2 + 40b_3 + \dots + 40 \cdot b_{3000} = S + 39(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) =$$

$$= S + 39b_1(q^2 + q^5 + q^8 + \dots + q^{2999})$$

$q^2 + q^5 + q^8 + \dots + q^{2999}$ — геометрич. прогрессия со зн. q^3 и первым членом $q^2 = b_1$

Всего чисел $b_3, b_6, b_9, \dots, b_{3000}$ (1000) (Показив индекс на 3 поделить)

$(b_1, b_2, \dots, b_{1000}) \Rightarrow$ в сумме прогр $q^2, q^5, q^8 \dots q^{2999}$
1000 чисел

$$S'_{1000} = q^2 + q^5 + q^8 + \dots + q^{2999} = \frac{q^2((q^3)^{1000} - 1)}{q^3 - 1}$$

т. е.

$$5S = S + 39b_1 \cdot \left(\frac{q^2((q^3)^{1000} - 1)}{q^3 - 1} \right)$$

$$4S = 39b_1 \cdot \left(\frac{q^2((q^3)^{1000} - 1)}{q^3 - 1} \right)$$

$$N = b_1 + 3b_2 + b_3 + 3b_4 + \dots + 3b_{3000} = S + 2(b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) =$$

$$= S + 2b_1(q + q^3 + q^5 + \dots + q^{2999}) = \text{(используем сумму)}$$

~~$$S = b_1(q^2 + q^5 + \dots + q^{2999})$$~~

$$= S + 2b_1 \left(\frac{q((q^2)^{1500} - 1)}{q^2 - 1} \right) = S + 2b_1 \left(\frac{q(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} \right)$$

$$S = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$\frac{4S}{S} = \frac{39b_1 \cdot \left(\frac{q^2(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} \right)}{\frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}} = 4 = \frac{39 \cdot q^2 \cdot (q - 1)}{q^3 - 1}$$

$$\downarrow$$

$$39q^3 - 39q^2 = 4q^3 - 4$$

$$35q^3 - 39q^2 + 4 = 0$$

$$q = 1$$

$$35 - 39 + 4 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} 35q^3 - 39q^2 + 4 & q - 1 \\ \hline -35q^3 + 35q^2 & 35q^2 - 4q + 4 \\ \hline 35q^2 - 4q + 4 & -4q + 4 \\ -35q^2 + 35q & -4q + 4 \\ \hline -4q + 4 & 0 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $35q^2 - 4q - 4 = 0$

$D = 4 + 140 = 144$

$q_{1,2} = \frac{2 \pm 12}{35} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ -\frac{10}{35} \end{bmatrix}$

(не подходит т.к. все члены
прогрессии по условию
положительные.)

$q = 0,4$

$S = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$

$N - S = 2b_1 \left(\frac{q(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} \right)$

$\frac{S}{N - S} = \frac{b_1(q^{3000} - 1)(q^2 - 1)}{2b_1 q(q^{3000} - 1)(q - 1)} = \frac{(q - 1)(q + 1)}{2q(q - 1)} = \frac{q + 1}{2q} = \frac{1,4}{0,8} = \frac{7}{4}$

$S = \frac{7}{4}(N - S) \Rightarrow 4S = 7N - 7S \Rightarrow 4N = 11S$

если $q = 1$, то

$S = 3000b_1$, а по условию

$4S = 39b_1(q^2 + q^5 + q^8 + \dots + q^{2999}) = 39000b_1$

тогда

$\begin{cases} 4S = 12000b_1 \\ 4S = 39000b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 0 \\ b_1 = 0 \end{cases}$

что противоречит
условию

$N = \frac{11}{4}S$

Ответ: $\boxed{\text{сумма увеличится в } \frac{11}{4} \text{ раз}}$

$$5. R_K = \sqrt{(-1)^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+8} = 3$$

радиус окр.
карася

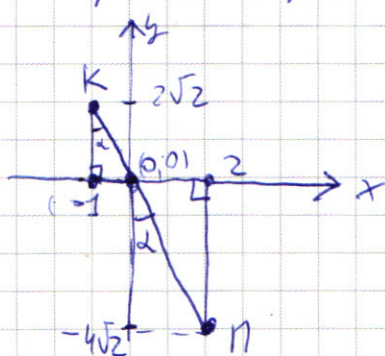
$$R_{\Pi} = \sqrt{(2)^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{4+32} = 6$$

радиус окр.
пешаря.

т.к. $\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$ и карасиката карася и пешаря

$M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соотв. То угол между радиусами рыб в начальный момент π

или рис



$$\sin \alpha = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\omega_K = 2.5 \omega_{\Pi}$$

ω_K - скорость карася; ω_{Π} - угл. скор.
 ω_{Π} - скорость пешаря.
 ω_K - угловая скорость карася

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$\omega_K = \frac{v_K}{R_K}$$

$$\omega_{\Pi} = \frac{v_{\Pi}}{R_{\Pi}} = \frac{v_{\Pi}}{6}$$

$$\frac{\omega_K}{\omega_{\Pi}} = 5$$

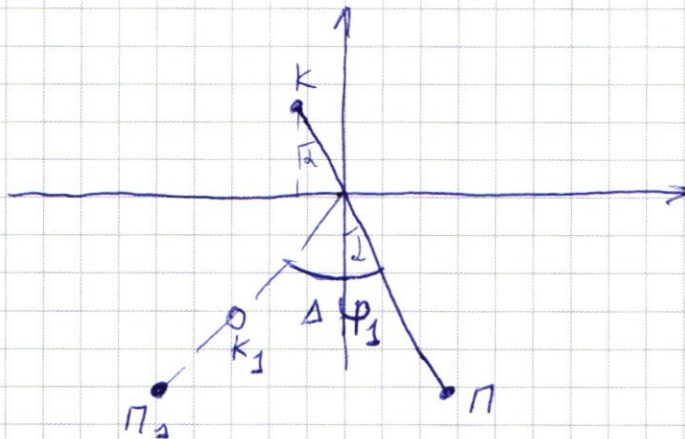
$$= \frac{2.5 v_{\Pi}}{3} = \frac{5 v_{\Pi}}{6}$$

До встречи пешаря кратчайшее расстояние между ними будет, когда их углы относительно системы координат будут равны. Тогда карася до первой встречи пешаря изменит свой угол на $\Delta \varphi_1$ тогда

$$\Delta \varphi_1 = \omega_{\Pi} \Delta t_1 \Rightarrow \frac{\Delta \varphi_1 + \pi}{\Delta \varphi_1} = \frac{\omega_K}{\omega_{\Pi}} = 5 \Rightarrow \Delta \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.



см. рис.

Тогда
координаты
песчары
в этот
положении

$$(-R_n \cdot \sin(\Delta\varphi_1 - 2); -R_n \cdot \cos(\Delta\varphi_1 - 2))$$

т.е. $(-6 \sin(\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{3}); -6 \cos(\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{3}))$

(минусы т.к. ~~рысь~~ находится в III четверти)

$$\sin 2 < \frac{1}{2} \Rightarrow 2 < 30^\circ \Rightarrow 45^\circ - 2 > 0 \Rightarrow \text{рысь в III четверти}$$

Далее произойдет их вторая встреча (встреча - кратчайшее расстояние).

$$\Delta\varphi_2 = \omega_n \cdot \Delta t_2$$

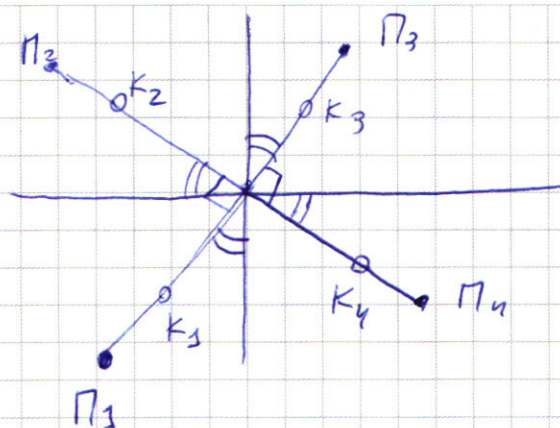
$$\Delta\varphi_2 + 2\pi = \omega_k \cdot \Delta t_2$$

$$\frac{\Delta\varphi_2 + 2\pi}{\Delta\varphi_2} = \frac{\omega_k}{\omega_n} = 5 \Rightarrow \Delta\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

т.е. Песчарь увеличит свой угол ещё на $\Delta\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ прежде чем встретиться с карасём. А т.к.

$$\frac{2\pi}{\Delta\varphi_2} = 4, \text{ то карась с песчарём будут встре-}$$

тываться находясь на кратчайшем расстоянии друг от друга только 4 раза (за один оборот песчаря) между ~~каждой~~ радиусами Песчаря будет по 90°



нельзя
найти
все координаты

$$P_1 = (-6 \sin(\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{3}); -6 \cos(\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{3}))$$

$$P_2 = (-6 \cos(\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{3}); +6 \sin(\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{3}))$$

$$P_3 = (+6 \sin(\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{3}); +6 \cos(\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{3}))$$

$$P_4 = (+6 \cos(\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{3}); -6 \sin(\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{3}))$$

$$\& \arcsin \frac{1}{3} = \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned} \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{4 - \sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) &= \cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{4 + \sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

ответ:

$$P_1 = (+\sqrt{2} - 4; -4 - \sqrt{2})$$

$$P_3 = (4 - \sqrt{2}; 4 + \sqrt{2})$$

$$P_2 = (-4 - \sqrt{2}; 4 - \sqrt{2})$$

$$P_4 = (4 + \sqrt{2}; \sqrt{2} - 4)$$

$$4. 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 |x+2| + 4 \geq 0$$

$$x \geq -2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. $4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$

$x = -1$

$4 + 5 - 9 - 4 + 4 = 0$

$4x^4$

$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0$

$4x^3 - 9x^2 + 4 = 0$ при $x = 2$

$32 - 36 + 4 = 0$

$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0$

$4x^2 - x - 2 = 0$

$D = 1 + 32 = 33$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$

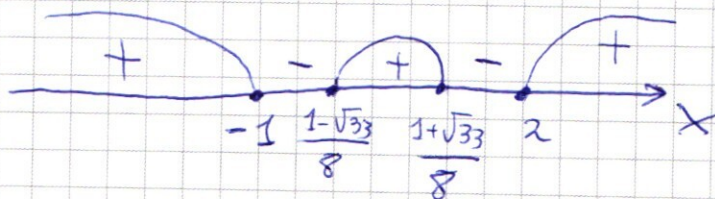
$x \geq -2$

$(x+1)(x-2) \left[(x+1)(x-2) \left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right) \left(x + \frac{\sqrt{33}-1}{8} \right) \right] \geq 0$

$5 < \sqrt{33} < 6$

$\frac{6}{8} < \frac{1+\sqrt{33}}{8} < \frac{11}{8}$

$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{33}-1}{8} < \frac{5}{8}$



$\begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{1-\sqrt{33}}{8} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{33}}{8} \\ x \leq -1 \\ x \geq -2 \end{cases}$

$$\boxed{-2 \leq x \leq -2 \vee \frac{1-\sqrt{33}}{8} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{33}}{8} \vee x \geq 2}$$

при

$$x \leq -2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 10x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$\text{при } x \leq -2$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$\text{т.к. } x \leq -2$$

$$4x^4 > 15x^3$$

$$11x^2 > 14x$$

$$\Downarrow$$

$$x \leq -2 \quad 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$\boxed{x \leq -2}$$

$$\text{Ответ: } \boxed{x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}, \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty)}$$

$$7. \begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (x-15)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} 1. \begin{cases} y+x \geq -8 \\ y-x \geq -8 \end{cases} & 2. \begin{cases} y+x \geq -8 \\ y-x \leq 8 \end{cases} \\ 3. \begin{cases} y+x \leq -8 \\ y-x \geq -8 \end{cases} & 4. \begin{cases} y+x \leq -8 \\ y-x \leq 8 \end{cases} \end{array}$$

$$1. y+x+8 + y-x+8 = 16$$

$$2y = 0$$

$$y = 0$$

$$x \geq -8$$

$$-x \leq -8$$

$$\begin{cases} x \leq -8 \\ x \geq 8 \end{cases} \quad \boxed{\text{несущ.}}$$

$$2. y+x+8 - y+x-8 = 16$$

$$x = 8$$

$$y \geq -16$$

$$y \leq 16$$

$$\boxed{-16 \leq y \leq 16 \\ x = 8}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7.
3.

$$-y - x - 8 + y - x + 8 = 16$$

$$-2x = 16$$

$$x = -8$$

$$y \leq 0$$

$$y \geq -16$$

$$-16 \leq y \leq 0$$

$$x = -8$$

4.

$$-y - x - 8 - y + x - 8 = 16$$

$$-2y = 32$$

$$y = -16$$

$$x \leq 8$$

$$x \geq -8$$

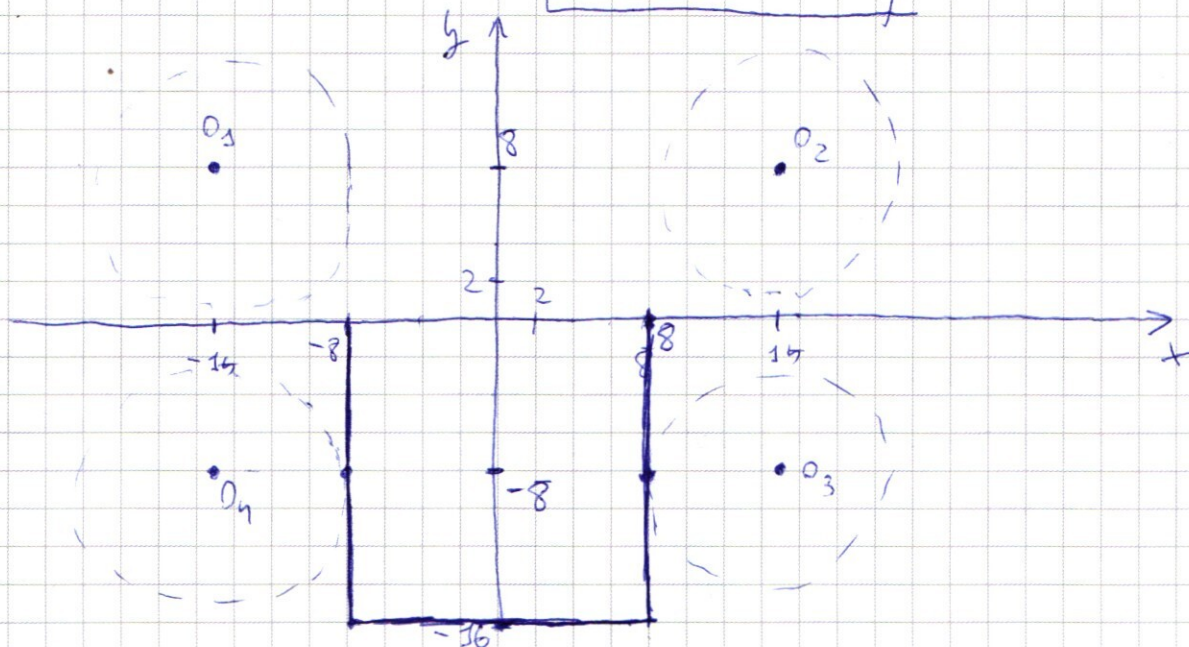
$$x \geq -8$$

Построим график

$$|y + x + 8| + |y - x + 8| = 16$$

$$-8 \leq x \leq 8$$

$$y = -16$$



$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ - центры окружностей ур-ия

$$(x-15)^2 + (y-8)^2 = a$$

из рисунка видно, что при $a=49$ ~~система~~

ур-ия $(x-15)^2 + (y-8)^2 = a$

$$|y+x+8| + |y-x+8| = 16$$

пересекаются в двух точках $\Rightarrow$

$\left. \begin{array}{l} \text{имеет система} \\ \dots \end{array} \right\} \dots$ имеет два решения

$\boxed{a=49}$ - 2 р-ия

$0 \leq a < 49$ - нет решений
(летовидека изрис.).

($a < 0$ не сумм)

т.к. сумма квадратов ≥ 0

далее очевидно, что

при $a \leq 23^2 + 8^2$ (при $a > 23^2 + 8^2$ нижние окр. больше не будут пересекаться ^{т.е. "квадратика"})
система имеет 4 или больше решений.

но при

$\boxed{a = 23^2 + 24^2}$

система тоже

имеет $\neq 2$ решения

При других a система не имеет 2 решений.

Ответ: $\boxed{a=49 ; a=1105}$

при $a \in [23^2+8^2, 23^2+24^2]$ система

система

всегда будет

иметь минимум 3 решения.

(Верхние окр будут пересекаться с другим ур-ием в ^{четырёх} точках начиная с $a = 24^2 + 4^2 > 23^2 + 8^2$)