

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7.

$$4900 = 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5.$$

Цифры 8-значного числа должны содержать каждый из этих делителей, ~~при этом~~ при этом одна цифра содержит либо один из этих делителей либо две двойки — это 4. Остальные цифры — единицы. (так как $2 \cdot 5; 2 \cdot 7; 7 \cdot 5 \geq 70$).

Рассмотрим случай с 4. У нас есть 8 мест, куда её поставим. Остаётся 7 мест и следующий набор цифр: 7, 7, 7, 7, 7, 5, 5.

Если бы все эти цифры были разными, то расстановок было бы $7!$. Но у нас есть 3 единицы, две семерки и две пятёрки. Тогда расстановок будет

$$\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 7 \cdot 30 = 210.$$

$$\text{А всего: } 210 \cdot 8 = 1680$$

Когда нет четвёрки:

у нас следующий набор цифр:

7, 7, 2, 2, 5, 5, 7, 7.

значит, если разные, то $8!$

но они не разные $\Rightarrow$

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

~~720~~
~~2520~~

№ 1130 Тогда всего варматов $7680 + 2520 =$
 $= 4200$

Ответ: 4200.

№ 2.

Рассмотрим 3 последовательных числа, ^{каждое} из которых кратно 3. Пусть множитель прогрессии равен a :

Тогда эти числа равны:

$x \quad ax \quad a^2x$.

Отношение ^{сумме} к последнему к двум первым:

$$\frac{a^2x}{x+ax} = \frac{a^2}{a+1}$$

Тогда можно все такие тройки получить, что отнесем все суммы всех чисел, стоящих на крестных 3 местах к оставшимся равно $\frac{a^2}{a+1}$. Пусть сумма оставшихся чисел равна S_1 . Тогда:

$$\frac{40 \cdot \frac{a^2}{a+1} S_1 + S_1}{\frac{a^2}{a+1} S_1 + S_1} = 5 \Rightarrow 40 \frac{a^2}{a+1} + 1 = 5 \frac{a^2}{a+1} + 5$$

$$35a^2 - 4a - 4 = 0.$$

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{576}}{70}$$

$$a > 0 \Rightarrow a = \frac{4 + \sqrt{576}}{70} = \frac{4 + 24}{70} = \frac{28}{70} = 0,4.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Дано~~ Два последовательных числа на чётных местах:

$x, 0, 4x$.

Тогда сумма чётных S_2 , к сумме нечётных S'_2 : $\frac{S_2}{S'_2} = 0,4$.

Тогда ~~перенос~~ увеличился:

$$\frac{S_x}{S} = \frac{S'_2 + 1,2 \cdot S'_2}{S'_2 + 0,4 S'_2} = \frac{2,2}{1,4} = \frac{22}{14} = \frac{11}{7}$$

Ответ: увеличился в $\frac{11}{7}$ раз.
 $\sqrt[3]{3}$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40 = (x+10)(x-4)$$

$$\frac{(x+10)}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4)$$

$$x = -10$$

$$-1000 + 640 + 200 < 0 \Rightarrow x = -10 - \text{не корень.}$$

$$\frac{\sqrt{x^3 - 64x + 200}}{2\sqrt{2}} = x - 4.$$

$$\frac{x^3 - 64x + 200}{8} = x^2 - 8x + 76.$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 728$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0,$$

схема Горнера:

$$x = 6$$

1	-8	0	72
	6	-12	-12
6	1	-2	0

$$(x-6)(x^2 - 2x - 72) = 0.$$

$$x^2 - 2x - 72 = 0.$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 48}}{2} = 1 \pm \sqrt{73}.$$

$$1 - \sqrt{73}:$$

$$x^3 - 64x + 200 = 40 - 16\sqrt{73} - 64 + 64\sqrt{73} = 48\sqrt{73} - 24 > 0.$$

$$1 + \sqrt{73}:$$

$$40 + 16\sqrt{73} - 64 - 64\sqrt{73} + 200 = 176 - 48\sqrt{73} > 0.$$

$$6:$$

$$216 - 384 + 200 > 0.$$

$$\text{ответ: } x \in \{6; 1 - \sqrt{73}; 1 + \sqrt{73}\}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{4}$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 |x+2| + 4 \geq 0.$$

$$4x^4 + (x+2)^2 - 5x^2 |x+2| \geq 0$$

$$(x+2)^4 = |x+2|^2.$$

$$4x^4 - 5x^2 |x+2| + |x+2|^2 \geq 0.$$

$$(x^2 - |x+2|)(4x^2 - |x+2|) \geq 0.$$

$$x^2 - |x+2|:$$

$$x > -2:$$

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

$$x < -2:$$

$$x^2 + x + 2$$

$$D < 0$$

$$4x^2 - |x+2|:$$

$$x > -2:$$

$$4x^2 - x - 2 = 0$$

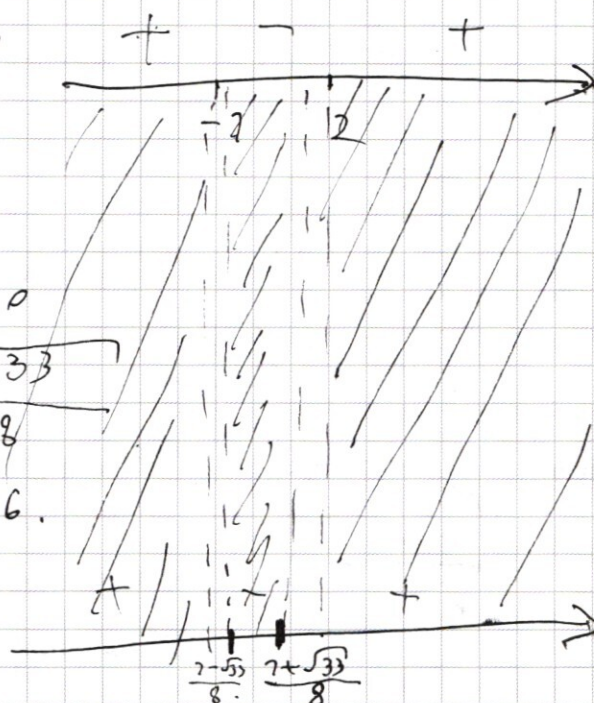
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$\sqrt{33} < 6.$$

$$x < -2:$$

$$4x^2 + x + 2$$

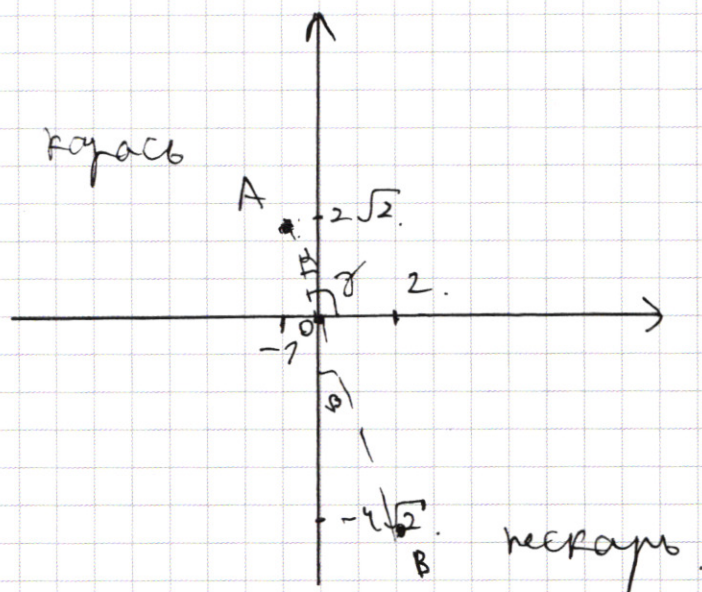
$$D < 0$$



Таким образом, нам подлежат заштрихованные области.

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1 - \sqrt{33}}{8}; \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty)$.

$\sqrt{5}$.



Найдем радиусы окружностей:

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{1 + 8} = 3$$

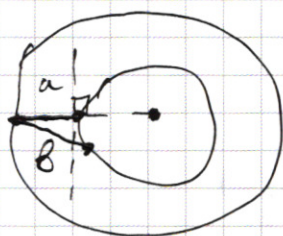
$$r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{4 + 32} = 6.$$

$$\tan \alpha = \frac{2}{2\sqrt{2}}$$

$$\tan \beta = \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow \angle AOB = 180^\circ.$$

~~Заметим~~



Заметим, что максимальное расстояние будет тогда, когда из радиусов отн. к. $(0; 0)$ лежат на одной прямой, так как $b > a$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть карась движется с угловой скоростью $\omega_1 = \frac{\omega}{R}$.

Тогда карась движется с угловой скоростью $\omega_2 = \frac{2,5\omega}{\frac{R}{2}} = 5\omega_1$.

Вспомогательная формула, если $\omega_2 t - \omega_1 t = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$, где k — целое число. $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$.

$$5\omega_1 t - \omega_1 t = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$$

$$4\omega_1 t = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$$

$$t = \frac{180^\circ + 360^\circ \cdot k}{4\omega_1}$$

Тогда, на который провернется карась равен

$$\varphi = 5\omega_1 t = 5\omega_1 \cdot \frac{180^\circ + 360^\circ \cdot k}{4\omega_1} = \frac{5}{4} (180^\circ + 360^\circ \cdot k) =$$

$$= \frac{5}{4} \cdot 180^\circ + 360^\circ \cdot k \cdot \frac{5}{4} =$$

$$= 225^\circ + 360^\circ \cdot k \cdot \frac{5}{4} = 225^\circ +$$

$$\frac{5}{4} \cdot 180^\circ + 360^\circ \cdot 5 \cdot \frac{k}{4}$$

k даёт 4 остатка при делении на 4: 0, 1, 2, 3.

целая часть не важна, так как 360° — это полный оборот.

получаем φ угла: $\varphi = \frac{5}{4} \cdot 180^\circ$

$$\varphi = \frac{5}{4} \cdot 180^\circ + 360^\circ \cdot 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \cdot 180^\circ \cdot 3 = \frac{15}{4} \cdot 180^\circ$$

$$\varphi = \frac{5}{4} \cdot 180^\circ + 360^\circ \cdot 5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \cdot 180^\circ \cdot 5 = \frac{25}{4} \cdot 180^\circ$$

$$\varphi = \frac{5}{4} \cdot 180^\circ + 360^\circ \cdot 5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \cdot 180^\circ \cdot 7 = \frac{35}{4} \cdot 180^\circ$$

Вычисляем полные обороты и получаем

$$\varphi_1 = \frac{7}{4} \cdot 180^\circ$$

$$\varphi_2 = \frac{7}{4} \cdot 180^\circ$$

$$\varphi_3 = \frac{3}{4} \cdot 180^\circ$$

$$\varphi_4 = \frac{5}{4} \cdot 180^\circ$$

$$\cos \gamma = -\frac{1}{3} \quad \sin \gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin(\gamma + \varphi) = \sin \gamma \cos \varphi + \cos \gamma \sin \varphi$$

поэтому $\cos(\gamma + \varphi) = \cos \gamma \cos \varphi + \sin \gamma \sin \varphi$

$$\cos(\gamma + \varphi_1) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{2}{3}$$

$$\sin(\gamma + \varphi_1) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$x_1 = 6 \cdot \cos(\gamma + \varphi_1) = -\sqrt{2} + 4$$

$$y_1 = 6 \cdot \sin(\gamma + \varphi_1) = 4 + \sqrt{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos(\alpha - \varphi_2) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\sin(\alpha - \varphi_2) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{6} - \frac{2\sqrt{2}}{6}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 4 + \sqrt{2} \\ y_2 &= 4 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha - \varphi_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{4}{6}$$

$$\sin(\alpha - \varphi_3) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{4}{6} = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}$$

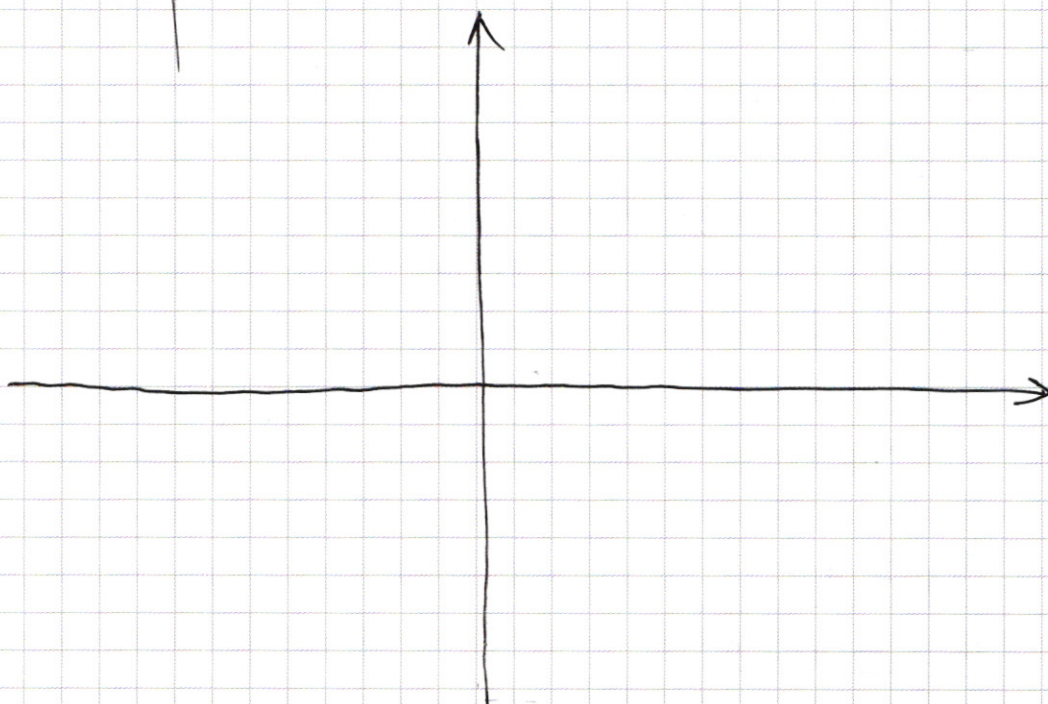
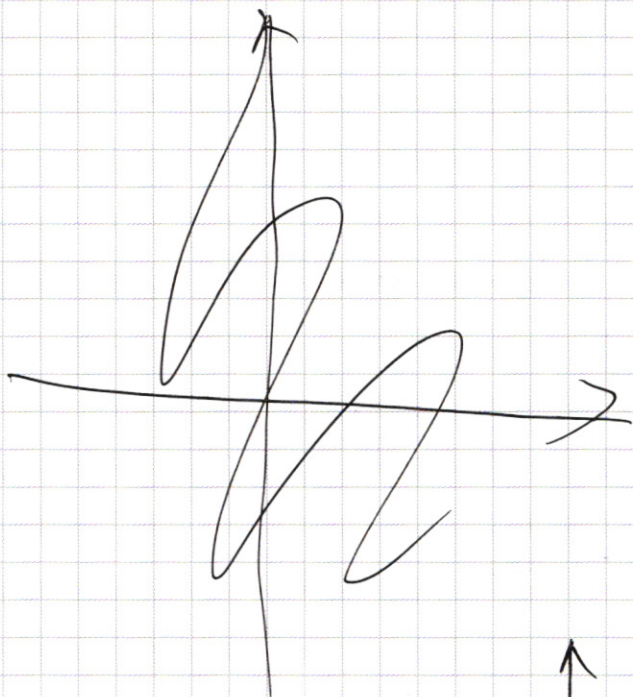
$$x_3 = 4 + \sqrt{2}$$

$$y_3 = 4 - \sqrt{2}$$

$$\text{аналогично } \begin{aligned} x_4 &= 4 - \sqrt{2} - 4 = -4 + \sqrt{2} \\ y_4 &= 4 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{Итого: } \begin{aligned} &(-4 - \sqrt{2}; 4 - \sqrt{2}) \\ &(4 - \sqrt{2}; 4 + \sqrt{2}) \\ &(4 + \sqrt{2}; 4 - \sqrt{2}) \\ &(-4 + \sqrt{2}; 4 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

№ 7



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

~~4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0~~

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0.$$

$$4x^4 + (x+2)^2 - 5x^2|x+2| \geq 0.$$

$$4x^4 - 5x^2|x+2| + (x+2)^2 \geq 0.$$

$$4x^4 - 4x^2|x+2| + |x+2|^2 - x^2|x+2| \geq 0.$$

$$(2x^2 - |x+2|)^2 - x^2|x+2| \geq 0.$$

$$(2x^2 - |x+2|)^2 \geq x^2|x+2|$$

$$4x^4 - 5x^2|x+2| + |x+2|^2 \geq 0.$$

$$a = x^2 \quad b = |x+2|$$

$$4a^2 - 5ab + b^2 \geq 0.$$

$$4(a - b)(a - \frac{b}{4}) \geq 0.$$

$$(a - b)(4a - b) \geq 0.$$

$$(x^2 - |x+2|)(4x^2 - |x+2|) \geq 0.$$

$$x^2 - x - 2 = (x+2)(x-2)$$

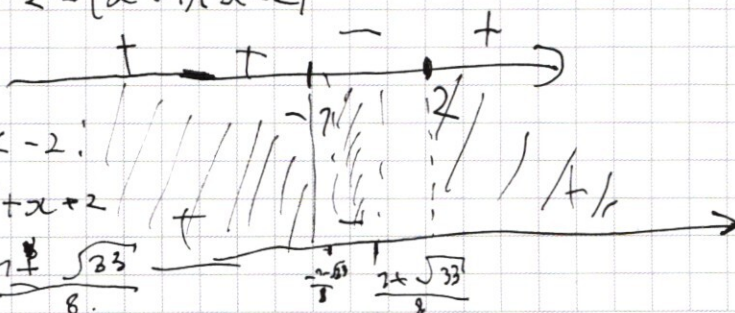
$$x > -2$$

$$x^2 - x - 2 = (x+2)(x-2)$$

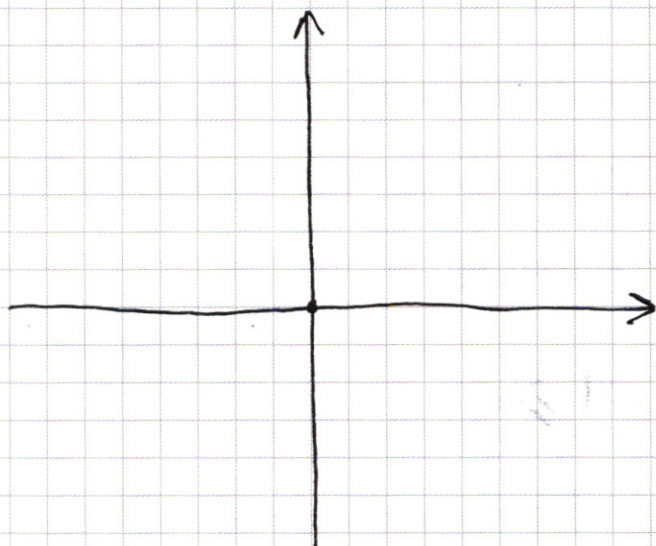
$$4x^2 - x - 2 \geq 0.$$

$$4x^2 - x - 2 \geq 0.$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$



№5.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 - 2x - 12 = 0.$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 48}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{2} = \cancel{\frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{2}} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 1 \pm \sqrt{13}.$$

$$(1 - \sqrt{13})^3 =$$

$$6: 2^6 - 384 + 200 > 0.$$

$$(1 + \sqrt{13})^3 = 1 + 3 \cdot 13 + 3 \cdot \sqrt{13} + 13 \sqrt{13} = 40 + 16 \sqrt{13}$$

$$(1 + \sqrt{13})^3:$$

$$40 + 16 \sqrt{13} - 64 - 64 \sqrt{13} + 200 = 200 - 24 - 48 \sqrt{13} =$$

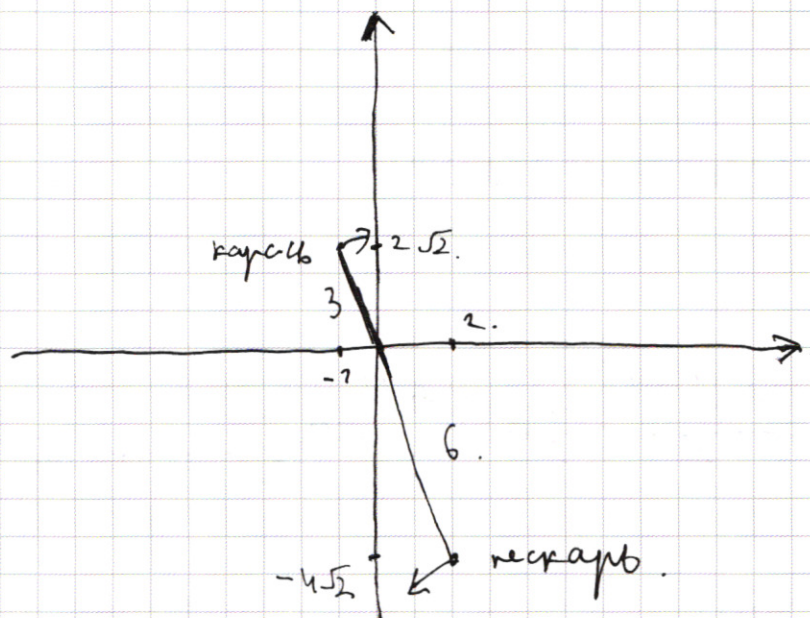
$$= 176 - 48 \sqrt{13} > 0$$

$$\cancel{1 + \sqrt{13}}$$

$$(1 - \sqrt{13})^3:$$

$$40 - 16 \sqrt{13} - 64 + 64 \sqrt{13} = 48 \sqrt{13} - 24 > 0.$$

$$= 1000 + 640 \sqrt{13} = 840 - 7000 < 0.$$



$$r_1 = \sqrt{1+8} = 3$$

$$r_2 = \sqrt{4+32} = 6.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4900 = 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

$$\begin{array}{cccccccc} & & & 5 & 3 & 4 & & \\ & & 5 & 3 & 4 & & & \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

8. 7.

56.
28.

$$\frac{ae}{ba} = \frac{cb}{bc} = \frac{720}{8} = \frac{6.5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8} = 90.$$

$$90.28 = \boxed{2520.}$$

$$x \quad ax \quad a^2 x$$

$$\frac{a^2 x}{x+ax} = \frac{a^2}{a+1}$$

$$S_2 = \frac{a^2}{a+1} S_1$$

$$\frac{40S_2 + S_1}{S_2 + S_1} = 5$$

$$40 \cdot \frac{0,16}{\frac{1}{4}} = 16$$

$$\frac{40 \cdot \frac{a^2}{a+7} \cancel{7} \cancel{7}}{a^2 \cancel{a+7} \cancel{7} \cancel{7}} = 5$$

$$\frac{3!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} \cdot \frac{8!}{40} \cdot \frac{a^2}{a+1} + 1 = \frac{64}{74} + 1 = 1.8648648648648648$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 24 \\ \hline 28 \\ 140 \\ \hline 168 \end{array}$$

226.

$$40 \frac{a^2}{a+7} + 7 = 5 \frac{a^{207.6}}{a+7} + 5$$

S_1 0, 4, 5, 1.

$$35 \frac{a^2}{a+1} = 4.$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{576}}{70} \Rightarrow \frac{4 \pm 24}{70}$$

$$\frac{S_2}{S} = \frac{S_1 + 7,2S_1}{S_1 + 0,4S_1} = \frac{22S_1}{7,6S_1} = \frac{22}{7,6} = \frac{11}{3,8} \quad 35a^2 - 4a + 4 \quad \cdot 35a^2 - 4a - 4 = 0.$$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} \stackrel{N3}{=} x^2 + 6x - 40 = (x+10)(x-4).$$

$$64 - 64 \cdot 4 + 200 = 200 - 64 \cdot 3 =$$

$$(x^3 - 64x)' = 3x^2 - 64.$$

$$x = \frac{64}{3}, \quad x = \pm \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

$$x(x^2 - 64)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{64}{3} - 64 \right) = \frac{64}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

$$\frac{72}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{5} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

$$-\frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{8}{\sqrt{3}} =$$

$$x = -10. \quad \text{— не так!!!}$$

$$\frac{(x+10)}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4).$$

$$-8 - 64 = -72.$$

$$\frac{\sqrt{x^3 - 64x + 200}}{2\sqrt{2}} = x - 4$$

$$72 = 8 \cdot 9.$$

$$\frac{x^3 - 64x + 200}{8} = x^2 - 8x + 25. \quad 64 - 8 \cdot 8 + 25 = 72.$$

$$6 \cdot 6 \cdot 6 - 8 \cdot 6 \cdot 6 = 25;$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128 = -2 \cdot 6 \cdot 6;$$

$$x^3 + 200 = 8x^2 + 728. \quad = -x^2.$$

7	-8	0	72
6	1	-2	-72
0	7	-10	20

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$x = 6$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 8x^2 + 72 \\ - x^3 + 2x^2 \\ \hline -10x^2 + 72 \\ -10x^2 - 20x \\ \hline 20x + 72 \end{array}$$

$$(x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0.$$



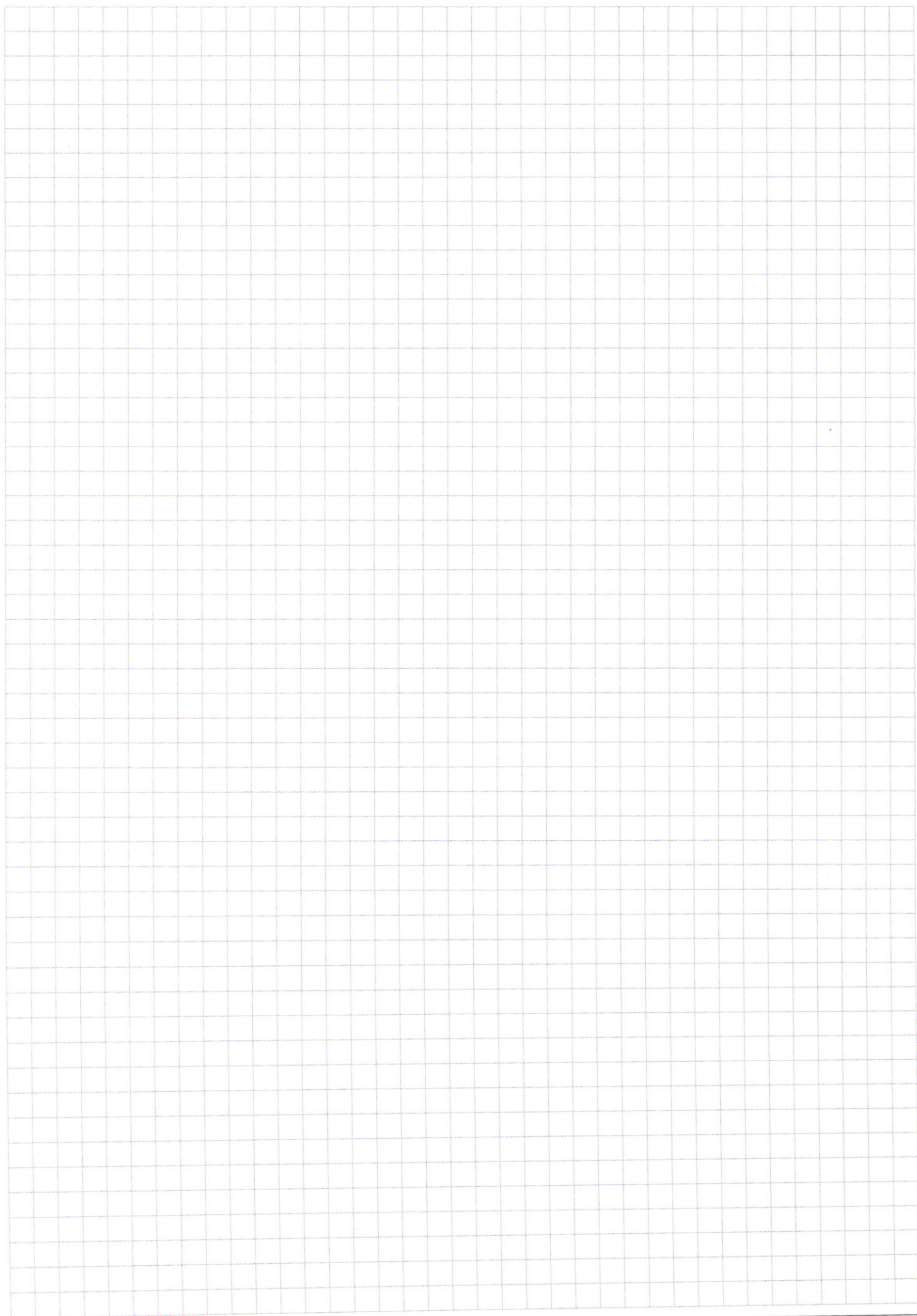
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)