

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Разложили 4900 на множители:
4900 = $2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$, тогда есть два
варианта набора чисел:

7 7 5 5 2 2 1 1 и 7 7 5 5 4 1 1 1

количество чисел из этих цифр:

$$C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2 \text{ и } C_8^2 C_6^2 C_4^1 C_3^3$$

$$\begin{aligned} \text{Всего чисел: } C_8^2 C_6^2 (C_4^2 + C_4^1) &= \frac{8!}{2!6!} \cdot \frac{6!}{2!4!} \left(\frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{1!3!} \right) \\ &= \frac{8!}{4} \cdot \frac{10}{4 \cdot 6} = \frac{10 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 4 \cdot 6} = 30 \cdot 20 = 600 \end{aligned}$$

Ответ: 600

№ 2

$$S = b_1 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}, \text{ где } q - \text{множитель прогрессии.}$$

Еще брать члены кратные трём и не
используем:

$$b_1 q^2, b_1 q^5, b_1 q^8, \dots, b_1 q^{2999} \text{ (1000 членов)}$$

- это новая геометрическая прогрессия,

сумма которой равна:

$$\begin{aligned} S_1 &= b_1 q^2 \frac{(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1} = b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} \cdot \frac{q^2}{q^2 + q + 1} \\ &= \frac{S q^2}{q^2 + q + 1} \end{aligned}$$

Еще брать все члены с чётными

иметт манулуем:

$$b, q, q^2, b, q^3, \dots, b, q^{2999} \quad (1500 \text{ чисел})$$

это новые геометрические прогрессии,
сумма которых равна:

$$S_2 = b, q \cdot \frac{(q^2)^{1500} - 1}{q^2 - 1} = \frac{b, (q^{3000} - 1)}{q - 1} \cdot \frac{q}{q + 1} =$$

$$= \frac{5q}{q + 1}$$

Т.о. манулуем:

$$5S = S + 39S_1 \quad \text{и} \quad xS = S + 2S_2$$

где x - некое число (во вставку)
(изменился)

$$\begin{cases} 5S = S + 39 \cdot S \cdot \frac{q^2}{q^2 + q + 1} \\ xS = S + 2S \cdot \frac{q}{q + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4q^2 + 4q + 4 - 39q^2 = 0 \\ x - 1 = 2 \cdot \frac{q}{q + 1} \end{cases}$$

$$35q^2 - 4q - 4 = 0 \Rightarrow q = \frac{-1 \pm \sqrt{16 + 16 \cdot 35}}{70} \Rightarrow \begin{cases} q = -\frac{2}{5} \\ q = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} q = -\frac{2}{5} \\ q = \frac{2}{7} \end{cases} \\ x = \frac{3q + 1}{q + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} q = -\frac{2}{5} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} q = \frac{2}{7} \\ x = \frac{13}{9} \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: сумма новой прогрессии будет
равна $-\frac{1}{3}S$ или $\frac{13}{9}S$.

✓ 7

Получим $|y + x + 8| + |y - x + 8| = 16$:

проведем прямые $y = -x - 8$ и $y = x - 8$

они разбивают плоскость на четыре части

там где где функции выше $y = x - 8$ модуль
 $y - x + 8$ раскрываем с плюсом, а там

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

В меру симметрии обеих функций, ^{ан. 8-16} для того, чтобы система имела 2 решения необходимо чтобы они пересекались один раз с каждой стороны.

(построим только правую часть второго функции).

Заметим что пересечение единственно только тогда окружности с центром в D касание прямой $x=8$, тогда:

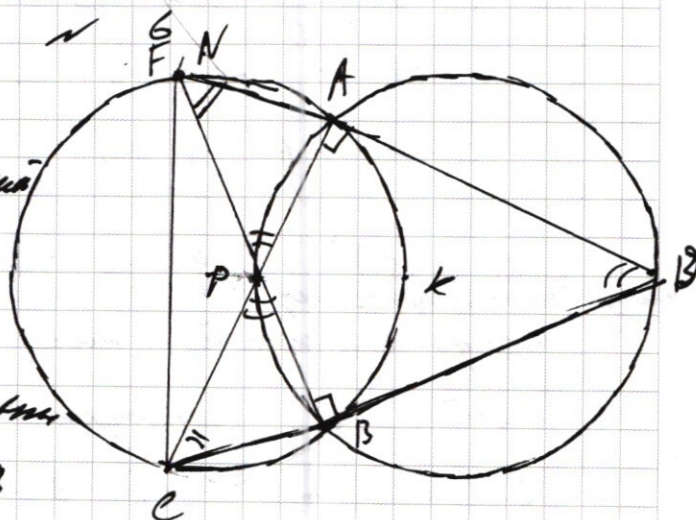
$$\sqrt{a} = x_D - 8 = 15 - 8 = 7 \Rightarrow (x_D - \text{абсцисса } D) \\ a = 49$$

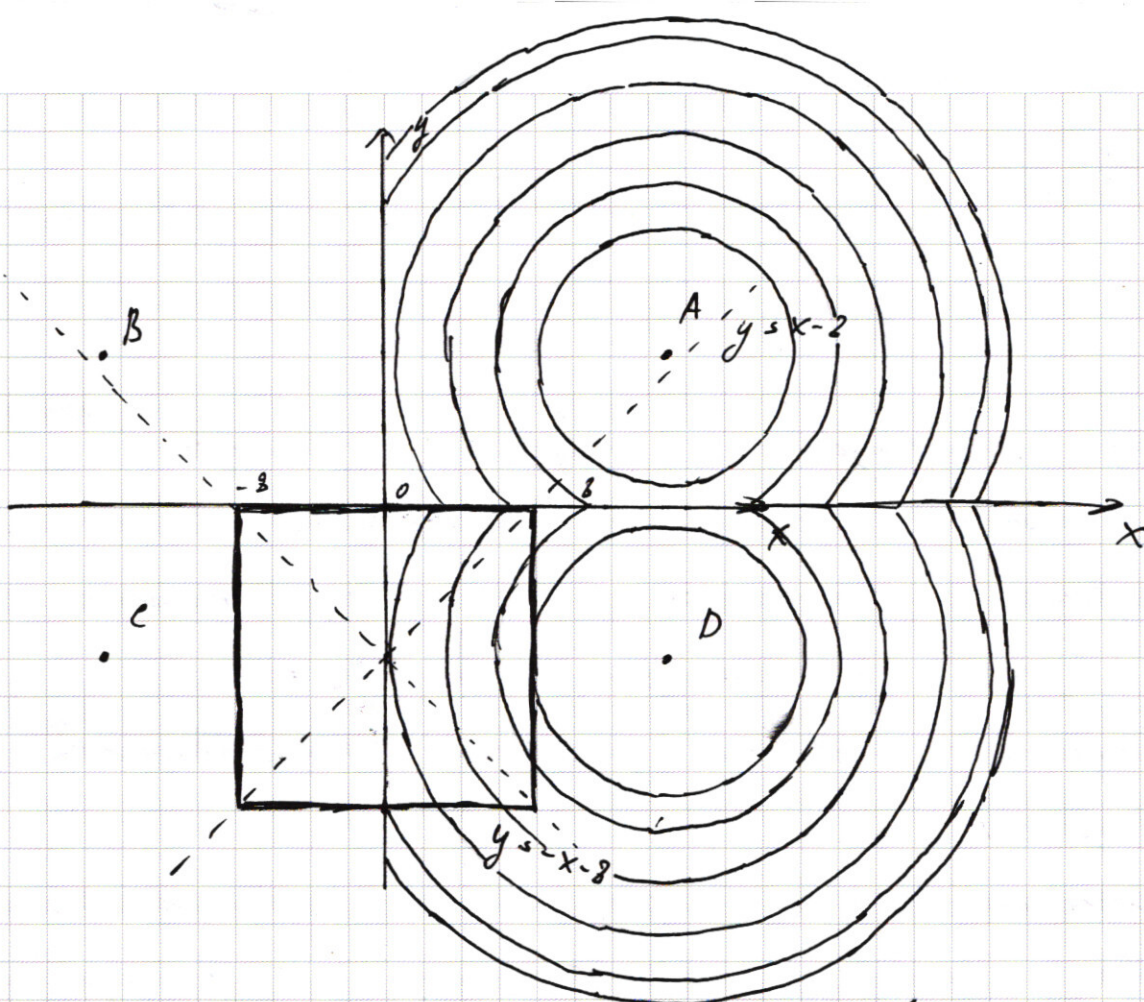
Ответ: , только при $a = 49$

Если же AC и AD не пересекаются дуги окружностей то они обе являются касательными.

Т.к. дуги APB и AQB равны то углы $\angle ACP = \angle ADB$

Если AC - касат то центр окружности лежит на $AD \Rightarrow AD$ - диаметр, аналогично AC диаметр. тогда $\angle ABC = \angle ABD = 90^\circ$





где x и y — целые числа. Аналогично и для $y = -x - 8$

решим уравнение во всех областях

$$y + x + 8 + y - x + 8 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$$

$$-y - x - 8 - y + x - 8 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad y = -16$$

$$y + x + 8 - y + x - 8 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x = 8$$

$$-y - x - 8 + y - x + 8 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x = -8$$

рис. 1. $(|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a$ — сумма квадратов

окружностей или фрагментов окружностей с центрами в $A(8, 15)$ $B(-8, 15)$

$C(-8, -15)$ $D(8, -15)$. $A(15, 8)$ $B(-15, 8)$

$C(-15, -8)$ $D(15, -8)$ и радиус $\sqrt{a}$

и симметричны относительно осей $y = 0$ и $x = 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

тогда AB - вых. мед. бис. в $\triangle AEB$ $\angle CAB$
и т.а. совпадают с т. F
 $\rho(C; F) = CF = CA = 2 \cdot 13 = 26$
Если ~~одна~~ из отрезков AC или AD
пересекает одну из дуг $\angle APB$ или $\angle AQB$, то:

$\angle PAD = 30^\circ$ (по ум.) $\Rightarrow PD$ - диаметр $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle PBD = 90^\circ$, тогда $F \in PB$
 $\angle NBC = 90^\circ \Rightarrow NC$ - диаметр $\Rightarrow \angle NAC = 90^\circ$
 $\angle NAC = 90^\circ$ и $\angle CAP = 30^\circ \Rightarrow A \in \angle NAP = 120^\circ$
 $\Rightarrow A \in ND$

$\triangle CAD \sim \triangle DBN$ (по 2 ум.) $\Rightarrow \angle DNB = \angle ACD$
 $\angle APB = 180^\circ - 2 \angle APB$
 $\angle NAP = 180^\circ - \angle ABB = \angle ABB$

тогда $\triangle DBN$ - равнобедренный ($BD = BN$)

тогда $N \in F$.

$\rho(C; F) = \rho(C; N) = CN = 2 \cdot 13 = 26$

$$\begin{aligned} S_{AFc} &= \frac{1}{2} NA \cdot AC = \frac{1}{2} (ND - AD) AD = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} NB - \frac{CD}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} NB - \frac{BC + BD}{\sqrt{2}} \right) \cdot \\ &\cdot \frac{BC + BD}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} NB - \frac{BC + NB}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{BC + NB}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(NB - \frac{BC + NB}{2} \right) (BC + NB) = \frac{1}{2} \frac{NB - BC}{2} (NB + BC) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} (NB^2 - BC^2) = \frac{1}{4} (FC^2 - BC^2 - BC^2) = \\
 &= \frac{1}{4} (FC^2 - 2BC^2) = \frac{1}{4} (26^2 - 2 \cdot 100) = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot 476 = 119
 \end{aligned}$$

Ответ: 26; 119

№ 4

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 | x+2 | + 4 \geq 0 \quad (*)$$

$$(*) \quad 5x^2 | x+2 | \leq 4x^4 + x^2 + 4x + 4 \quad (**)$$

$$(*) \quad 5x^2 | x+2 | \leq x^2 (4x^2 + 1) + 4(x+1) \quad (**)$$

$$(*) \quad \begin{cases} 5x^3 + 10x^2 \leq x^2 (4x^2 + 1) + 4(x+1) \\ 5x^3 + 10x^2 \geq -x^2 (4x^2 + 1) - 4(x+1) \end{cases} \quad (***)$$

$$(*) \quad \begin{cases} 4x^4 - 9x^2 - 5x^3 + 4x + 4 \geq 0 \\ -4x^4 - 11x^2 - 5x^3 - 4x - 4 \leq 0 \end{cases} \quad (***)$$

$$(*) \quad \begin{cases} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0 \\ 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0 \end{cases} \quad (***)$$

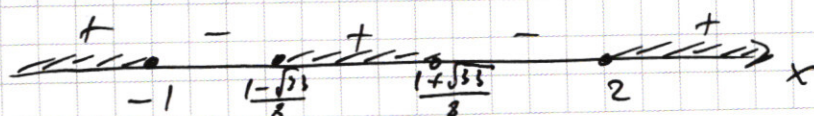
$$1) \quad 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 = 0$$

	4	-5	-9	4	4
-1	4	-9	0	4	0
2	4	-1	-2	0	

$$4x^2 - x - 2 = 0 \quad (*) \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8} \quad (**)$$

$$(*) \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$\begin{aligned}
 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 &= 4(x+1)(x-2)\left(x + \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \cdot \\
 &\quad \cdot \left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)
 \end{aligned}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}
 & \overline{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} \\
 & 4900 = 7^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \\
 & \begin{array}{ccc} 7 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 11 \end{array} \quad \text{or} \quad \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 11 \end{array} \\
 & \begin{array}{cc} C_8^2 & C_8^2 \\ C_8^1 & C_8^5 \end{array} \quad \begin{array}{cc} C_8^2 & C_8^2 \\ C_8^1 & C_8^3 \end{array} \\
 & N = C_8^2 C_6^2 (C_4^2 + C_4^1) = \frac{8!}{2!6!} \cdot \frac{6!}{2!4!} \cdot \left(\frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{1!3!} \right) \\
 & = \frac{8!}{(2!)^2} \left(\frac{1!3! + (2!)^2}{1!(2!)^3} \right) = \frac{8!}{2!} \left(\frac{6 + 4}{4 \cdot 6} \right) \\
 & = \frac{10 \cdot 8!}{96} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{24}{96} \\
 & = 10 \cdot 5 \cdot 12 = 600 \quad \text{Ans: } 600
 \end{aligned}$$

$$S = 6, \frac{9^{2000} - 1}{9 - 1}$$

$2 - 8$

$$2 \cdot \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = 5$$

$$5 \quad 2 \quad \frac{3}{9} \quad 5 \quad 6$$

$$2 \cdot \frac{2^2 - 1}{2 - 1}$$

$2 + 4$

2 5 2

6, 5, 2

2-5-4

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000}$$

$$+ 39 (b_3 + b_6 + \dots + b_{300}) \quad n=1000$$

$$h_2 = 1500$$

$$b_2 = 6,98$$

$$q_1 = q^3$$

$$a, \leq b, q^2$$

$$S_a = b \cdot q^2 \frac{(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1}$$

6, 5, 6, 9

$\frac{1}{2} = 0,5$

5 99 5 99

$$S_a = b_1 q^2 \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1}$$

$$S_c = b_1 q \frac{(q^2)^{1500} - 1}{q^2 - 1} =$$

$$= \frac{b_1 q}{q^2 - 1} (q^{3000} - 1)$$

$$S_a = \frac{b_1 q^2}{q^3 - 1} (q^{3000} - 1)$$

$$\begin{cases} c_1 = b_1 q \\ q_2 = q^2 \end{cases} \begin{cases} q = \frac{4 \pm 4.6}{2} \\ q = 2(1 \pm 6) \\ q = 14 \\ q = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5S = S + 39S_a \\ XS = S + 3S_c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4S = 39S_a \\ (X-1)S = 3S_c \end{cases}$$

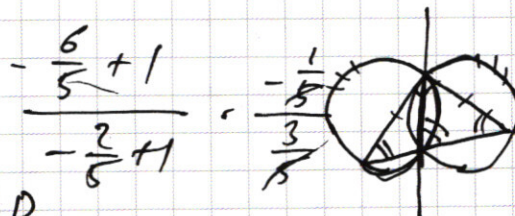
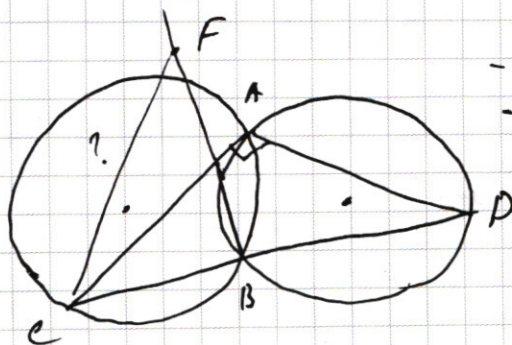
$$\Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} = 39 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} \\ (X-1) \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1} = 3 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{q^3 - 1} = \frac{39q^2}{q^3 - 1} \\ \frac{X-1}{q^2 - 1} = \frac{2q}{q^2 - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = \frac{39q^2}{q^3 + q + 1} \\ X-1 = \frac{2q}{q+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4q^3 + 4q + 4 - 39q^2 = 0 \\ X = \frac{3q+1}{q+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 35q^2 - 4q - 4 = 0 \\ X = \frac{3q+1}{q+1} \end{cases}$$

$$X = \frac{42+1}{15} = \frac{43}{15} \quad \text{или} \quad X = \frac{-29}{-9} = \frac{29}{9}$$

Отв. $\frac{43}{15}$ / $\frac{29}{9}$



Отв. 26?



$$(q^3 + q + 1)4 = 39q^2$$

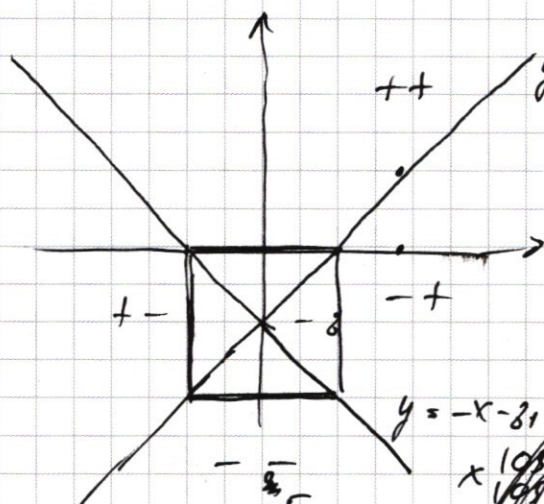
$$4(q+1) = 35q^2$$

$$(X-1)(q+1) = 2q$$

$$(X-1) = \frac{2q}{q+1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{6}{2} + 1}{\frac{2}{2} + 1} &= \\ &= \frac{13}{9} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{array}{r} x^2 \\ 23 \\ + 69 \\ \hline 1105 \end{array}$$

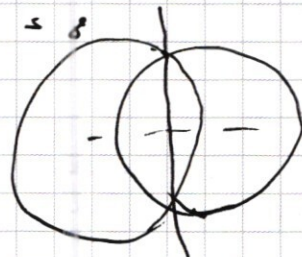
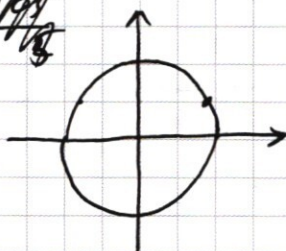
$$\begin{array}{r} 2y = 0 \\ y = 0 \\ -2y = 32 \\ y = -16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -y - x = 8 \\ +y - x = 16 \\ \hline -2x = 16 \end{array}$$

$$x = -8$$

$$x + x + 2 - y + x - 2 = 16$$

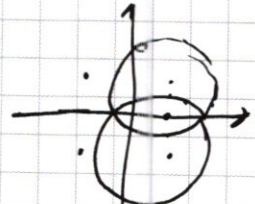
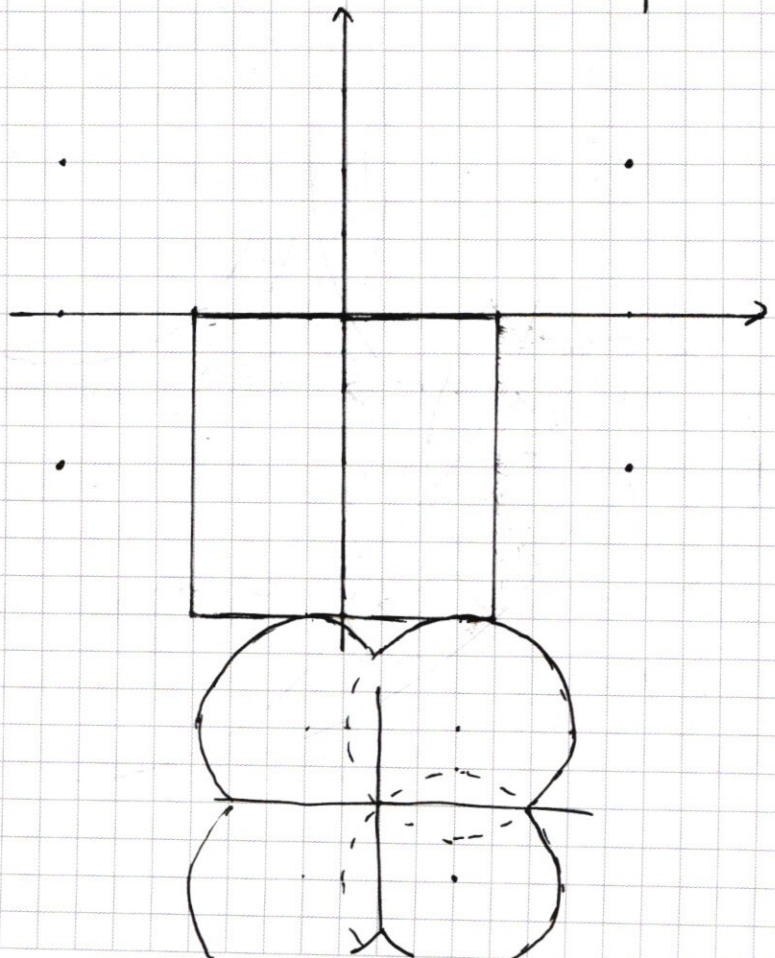
$$x = 8$$

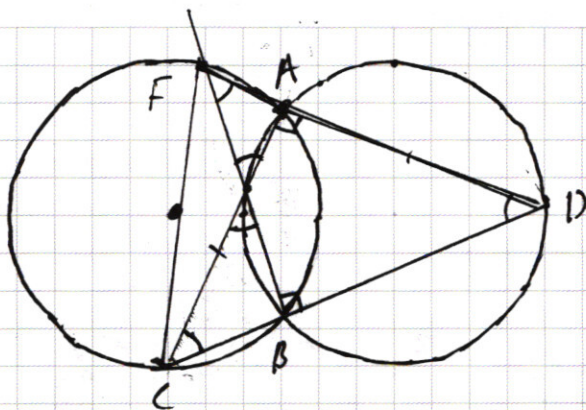


$$\begin{array}{r} x^2 \\ 35 \\ + 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$

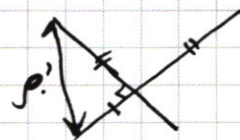
$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(15-2)^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{49 + 64} \\ &= \sqrt{113} \\ a &= \sqrt{23^2 + 24^2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} a = 7 \\ a = \sqrt{1105} \end{array}$$





N6



$$p = \sqrt{a^2 + b^2}$$

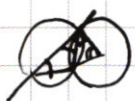
$$\angle CAB = \frac{1}{2} \angle COB$$

$$CB = 2 \cdot 13 \sin \angle COB \cdot \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} CB = 26 \sin \angle CAB \\ BD = 26 \sin \angle BAD \end{cases}$$

$$\frac{CB}{\sin \angle CAB} = \frac{AC}{\sin(180^\circ - \angle)} \\ \frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AC}{\sin \angle}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$



$$FC = 522$$



$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 26 \\ \times 26 \\ + 156 \\ + 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$776$$

$$80 - 4$$

$$20 - 1$$

$$AD = AC = \sqrt{26^2 + 10^2}$$

$$FD = \sqrt{2} FB$$

$$ED = 10 + FB$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 64 \\ 3 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$216$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 26 \\ \times 26 \\ + 156 \\ + 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$5x^2(x+2) \leq 4x^4 + x^3 + 4x + 4$$

$$5x^3 + 10x^2 \geq -4x^2 - x^3 - 4x + 4$$

$$\frac{1 - \sqrt{33}}{8} \approx \frac{6 - \dots}{8}$$

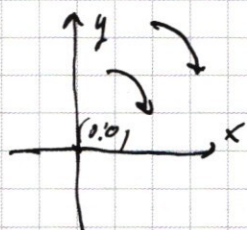
$$1 - 59$$

$$\pm$$

$$\frac{-49}{8}$$

$$-\frac{1}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$U_K = 25 \text{ V}_N$$

$$U_M = 25 \text{ V}_N$$

$$\tau_M = \sqrt{1 + 4 \cdot 2} = 3$$

$$\tau_N = \sqrt{4 + 16 \cdot 2} = 6$$

$$\omega = \frac{U}{\tau}$$

$$\rho = \min \text{ при } \varphi_M = \varphi_N$$

$$\omega_M = \frac{U_M}{\tau_M} = \frac{25 \text{ V}_N}{3} = \frac{5}{6} \text{ V}_N$$

$$\omega_N = \frac{U_N}{6} = \frac{1}{6} \text{ V}_N$$

$$\varphi_0 = \pi$$

$$\Delta\omega = \frac{2}{3} \text{ V}_N$$

$$\varphi = \Delta\omega \cdot t$$

$$\varphi = \frac{2}{3} \text{ V}_N \cdot t$$

$$\frac{1}{6} \text{ V}_N t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{2}{3} \text{ V}_N t = \varphi + 2\pi n = \pi + 2\pi n; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\varphi_M = \varphi_{M0} + \frac{5}{6} \text{ V}_N t$$

$$\varphi_{M0} = \pi \left(\frac{n}{4} + \frac{\pi n}{2} \right) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\varphi_N = \varphi_{N0} + \frac{1}{6} \text{ V}_N t$$

$$\varphi_{N0} = \pi \left(\frac{n}{4} + \frac{\pi n}{2} \right) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$5x^2|x+2| \leq 4x^4 + x^2 + 4x + 4$$

$$5x^2|x+2| \leq 4(\cancel{x^4 + x^2 + 1}) + x^2$$

$$\begin{cases} 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x + 4 \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

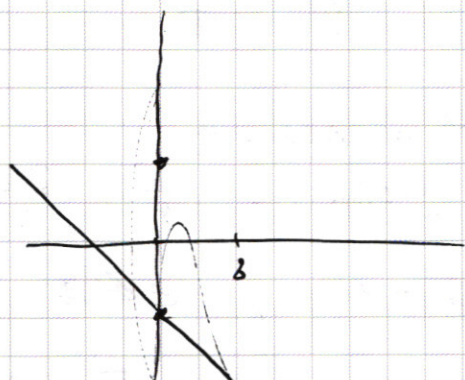
$$\begin{cases} 4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x + 4 \geq 0 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ 4x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x + 4 \geq 0 \end{cases}$$

	4	-5	1	-6	4
-2	4	3	7		
-3	4	7	22		

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = 2 \end{cases}$$

1) реш.



$$1) \begin{cases} y+x+8 \geq 0 \\ y-x+8 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -8 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

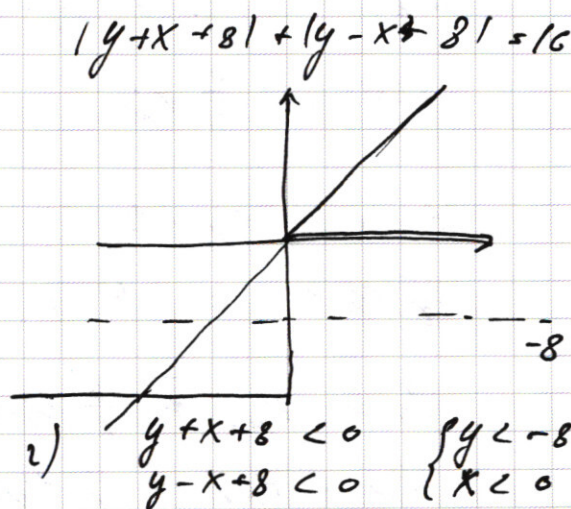
$$2y + 16 = 16 \Rightarrow y = 0$$

$$2) \begin{cases} y+x+8 \geq 0 \\ y-x+8 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -x-8 \\ y < x-8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y+8 &\geq -x \\ -y+8 &\leq x \end{aligned}$$

$$-x-8 \leq y < x-8$$

$$-x < x \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$$



$$2) \begin{cases} y+x+8 < 0 \\ y-x+8 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < -8 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$-y-x-8 = -y-x-8 = 16$$

$$-2y - 16 = 16$$

$$y = -\frac{32}{2} = -16$$