МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1; 2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2; -4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16, \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$4900 = 49 \cdot 100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$ - разложение на простые множители.

~~Если в восьмизначном числе есть цифра x, такая что $2 \vdots x$, $5 \vdots x$, $7 \vdots x$ ($x \leq 2$, $x \leq 5$, $x \leq 7$), то $4900 \not\vdots x$ => 4900 не делится на x => такого x не существует.~~

~~если $x \in \mathbb{Z}$, $x \in [0; 9]$~~

~~Если $x \vdots 2$, $x \vdots 5$, $x \vdots 7$; $x > 2$, $x > 5$, $x > 7$~~

НОД$(2,5) = 1$ НОД$(2,7) = 1$ НОД$(5,7) = 1$, т.к. 2, 5, 7 - простые цифры.

Если в искомом восьмизначном числе есть x, при разложении которой на простые множители есть простой множитель y, отличный от 2, 5, 7 (кроме 1), то при умножении всех цифр числа полученное произведение будет делиться на y, $4900 \not\vdots y$ => такого быть не может. => x раскладывается на $\{1; 2; 5; 7\}$

$x = \{1; 2; 4; 5; 7\}$. $x \in [1; 9]$, больше возможных цифр нет.

Если x равен $\{3; 6; 9\}$, то $4900 \not\vdots x$, если $x = 8$, то $4900 \not\vdots x$

$4900 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$, или $4900 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$.

количество чисел: $\frac{8 \cdot 7}{2!} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 7 \cdot 360 = 2520$

кол-во чисел: $\frac{8 \cdot 7}{3!} \cdot \frac{6 \cdot 5}{1!} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = \cancel{560}\ 1680$

$2520 + 1680 = \cancel{3080}\ 4200$

Ответ: ~~3080~~ 4200

Задача 2

(1) $b_1+b_2+\ldots+b_{3000}=S$

(2) $40(b_3+b_6+\ldots+b_{3000})+b_1+b_2+b_4\ldots+b_{2999}=5S$ (2) − (1): $39(b_3+b_6+\ldots+b_{3000})=4S$

$b_3+b_6+\ldots+b_{3000}=\frac{4}{39}S \Rightarrow S-\frac{4}{39}S=\frac{35}{39}S=b_1+b_2+b_4+b_5+\ldots+b_{2999}$

K – коэффициент геометрической прогрессии. $b_{x+1}=K\cdot b_x$

$\frac{b_x+b_{x+1}}{b_{x+2}}=\frac{b_x+Kb_x}{K^2b_x}=\frac{b_x(K+1)}{b_xK^2}$ $b_x+b_{x+1}=\frac{K+1}{K^2}b_{x+2}$

$$\frac{\frac{35}{39}S}{\frac{4}{39}S}=\frac{(b_1+b_2)+(b_4+b_5)+(b_7+b_8)\ldots+(b_{2998}+b_{2999})}{b_3+b_6+b_9+\ldots+b_{3000}}$$

$$\frac{35}{4}=\frac{\frac{K+1}{K^2}b_3+\frac{K+1}{K^2}b_6+\ldots+\frac{K+1}{K^2}b_{3000}}{b_3+b_6+\ldots+b_{3000}}=$$ $K\neq0$, т.к. все члены больше 0 ~~$\frac{b_x+y\neq0}{b_1+0}=1\neq8$~~

$b_3+b_6+\ldots+b_{3000}>0$

$=\frac{K+1}{K^2}$ $35K^2=4K+4$

$35K^2-4K-4=0$ $D=16+560=576$ $\sqrt{D}=24$

$K_1=\frac{4-24}{70}=-\frac{2}{7}<0$ – не подходит, т.к. все члены больше 0.

$K_2=\frac{4+24}{70}=\frac{28}{70}=\frac{2}{5}=0,4$

$b_2+b_4+\ldots+b_{3000}=Kb_1+Kb_3+\ldots+Kb_{2999}=K(b_1+b_3+\ldots+b_{2999})$

$S=b_1+b_2+\ldots+b_{3000}=(b_2+b_4+\ldots+b_{3000})+\frac{b_2+b_4+\ldots+b_{3000}}{K}$

$S=3,5(b_2+b_4+\ldots+b_{3000})$ $\frac{2}{7}S=(b_2+b_4+\ldots+b_{3000})\Rightarrow b_1+b_3+\ldots+b_{2999}=\frac{5}{7}S$

Пусть $S_1=(b_2+b_4+\ldots+b_{3000})\cdot3+(b_1+b_3+\ldots+b_{2999})=$
$=3\cdot\frac{2}{7}S+\frac{5}{7}S=\frac{11}{7}S$ $\frac{S_1}{S}=\frac{\frac{11}{7}S}{S}=\frac{11}{7}$ Ответ: сумма увеличится в $\frac{11}{7}$ раз

☐ черновик ☑ чистовик Страница №2
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3

$$y = \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40$$

$$x^2+6x-40 = (x+10)(x-4)$$

Поменяем ~~x≠-10; x≠4~~.

Виета: $\begin{cases} x_1x_2 = -40 \\ x_1+x_2 = -6 \end{cases}$ $\quad x_1 = -10$, $x_2 = 4$.

$$y = \left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{x^3-64x+200}\right) = \cancel{x^2+6x-40} \quad (x+10)(x-4)$$

при $x = -10$ $\quad 0=0 \Rightarrow x = -10$ - корень уравнения.

$x = -10$: разделим на $x+10$. $\qquad$ ОДЗ: $x^3-64x+200 \geq 0$.

$\sqrt{x^3-64x+200} = 2\sqrt{2}(x-4)$ $\quad$ возведём в квадрат.

$x^3-64x+200 = 8x^2-64x+128$

$x^3-8x^2+72 = 0$. $\quad x^2(x-8)\cancel{+7} = -72$. $\quad x-8<0$ $\quad \cancel{x\in(-8}$ $\quad x<8$

Задача 4.

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$

$x \geq -2$: $x+2 \geq 0$.

$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$

$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 = 0$

$x = -1$ — корень, т.к. $4 + 5 - 9 - 4 + 4 = 0$

$$
\begin{array}{l|l}
4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 & x+1 \\
4x^4 + 4x^3 & 4x^3 - 9x^2 + 4 \\
-9x^3 - 9x^2 & \\
-9x^3 - 9x^2 & \\
0 + 4x + 4 & \\
4x + 4 & \\
0 &
\end{array}
$$

$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) = 0$

$x = 2$ — корень, т.к. $4 \cdot 8 - 9 \cdot 4 + 4 = 32 - 36 + 4 = 0$

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3 - 9x^2 + 4 & x-2 \\
4x^3 - 8x^2 & 4x^2 - x - 2 \\
-x^2 & \\
-x^2 + 2x & \\
-2x + 4 &
\end{array}
$$

$(x-2)(x+1)(4x^2 - x - 2) = 0$

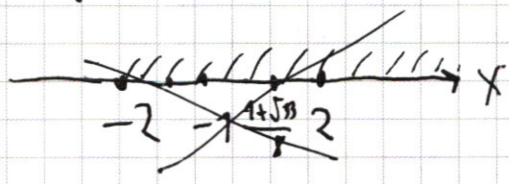
$D = 1 + 32 = 33$

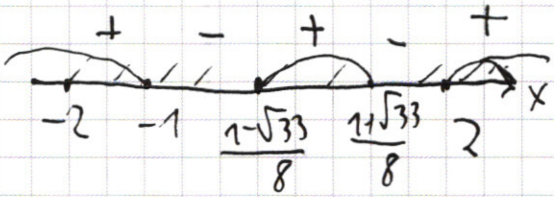
метод интервалов: $x_0 = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$

$\sqrt{33} < \sqrt{36} = 6$

$\sqrt{33} > \sqrt{25} = 5$

$\dfrac{6}{8} < \dfrac{1+\sqrt{33}}{8} < \dfrac{7}{8}$ | $\dfrac{-5}{8} < \dfrac{1-\sqrt{33}}{8} < \dfrac{-4}{8}$





$x \in [-2; -1] \cup \left[\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}; \dfrac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$

$x < -2$: $4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$

~~$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 = 0$~~

$x^3(4x+5) + x(11x+4) + 4 \geq 0$

при $x < -2$: $x^3 < 0$, $4x + 5 < -3 < 0$, $x < 0$, $11x + 4 < -18 < 0 \Rightarrow$

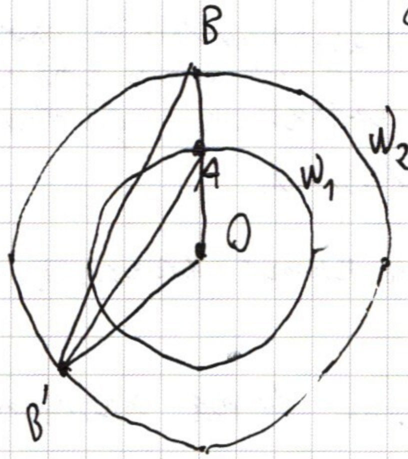
$\Rightarrow x^3(4x+5) > 0$, $x(11x+4) > 0 \Rightarrow x^3(4x+5) + x(11x+4) \geq 0$.

$$
\left[
\begin{array}{l}
x \in [-2; -1] \cup \left[\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}; \dfrac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty) \\
x < -2
\end{array}
\right.
$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup \left[\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}; \dfrac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5



~~OA и OB - совпадают, B' - произвольная.~~

~~Докажем, что. A~~

$A \in OB$, $B \in w_2$ $A \in w_1$, $B' \in w_2$.

O - центр. окр. w_1, w_2 $B \neq B'$

$r_{w_1} < r_{w_2}$

радиус. окр w_1 радиус. окр w_2

Докажем, что. $AB < AB'$

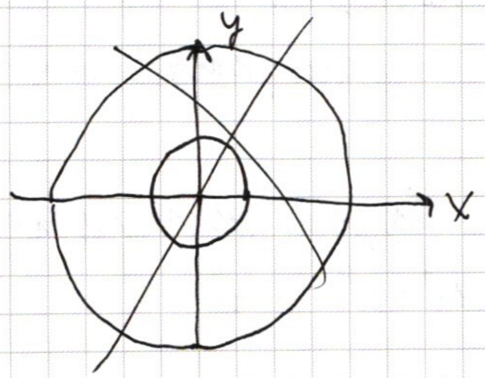
По неравенству треугольника для $\triangle OAB_1$

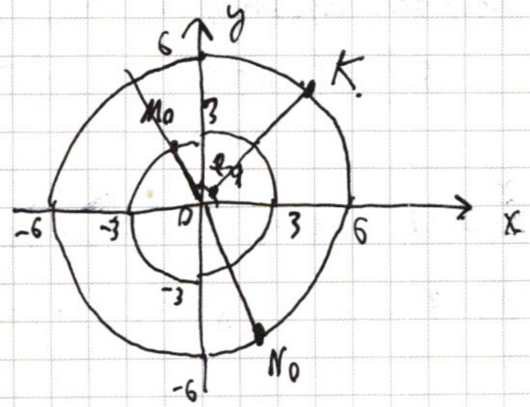
$OA + AB' > OB'$ $r_{w_1} + AB' > r_{w_2} = r_{w_1} + AB$

$AB' > AB \Rightarrow$ расстояние наименьшее, когда $A \in OB$

радиус окружности карася $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{2})^2} = \cancel{\sqrt{3}}\ 3$

радиус окр. пескаря $r = \sqrt{(2^2) + (-4\sqrt{2})^2} = 6$





прямая M_0N_0 $y = kx + b$

$2\sqrt{2} = -k + b$. $-2 = \frac{2k+b}{-k+b}$ $2k + b = 2k - 2b$. $b = 0$. $k = -2\sqrt{2}$.

$-4\sqrt{2} = 2k + b$.

$y(0) = 0$ $(0,0) \in M_0N_0 \Rightarrow \angle M_0ON_0 = 180^0$.

Задача 5 (начало на стр. 5)

длина окр. $2\pi l_{w_1} = 2\pi r_{w_1}$ $\quad l_{w_2} = 2\pi r_{w_2}$ $\quad \frac{l_{w_1}}{l_{w_2}} = \frac{r_{w_1}}{r_{w_2}} = 0,5$

$2,5 V_1$ – скорость карася. $\quad u_1$ – угловая скорость карася (угол, который он проходит за единицу времени по траектории движения)

V_1 – скорость пескаря.

u_2 – угловая скорость пескаря.

$\frac{l_{w_1}}{2,5V_1} = t_1$ – время прохождения круга карасем.

$\frac{l_{w_2}}{V_1} = t_2$ – время прохождения круга пескарём

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{l_{w_2}}{l_{w_1}} \cdot \frac{2,5V_1}{V_1} = 2 \cdot 2,5 = 5.$$

$u_1 \cdot t_1 = 360^\circ$ $\qquad \frac{u_1}{u_2} = \frac{t_2}{t_1} = 5$

$u_2 \cdot t_2 = 360^\circ$

Найдем момент, когда первый раз $M \in ON$

карась пройдёт $5l$, а пескарь l.

$\underset{\angle M_0 O N_0}{5l = l + 180^\circ}$ $\quad l = 45^\circ$. далее, когда они поравняются расстояние будет минимальным через каждые. $\quad 5\Delta l = \Delta l + 360^\circ \quad \Delta l = 90^\circ - 90^\circ$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7

$$\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16 = b. \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a. \end{cases}$$

Заметим, что $a(x)=a(-x)$, $b(x)=b(-x)$

если $x=0$, то $\begin{cases} |y+8|+|y+8|=16 \\ 225+(|y|-8)^2=a. \end{cases}$ $|y+8|=8$ $y=0; y=-16.$

$a=225+0=225$; или $a=225+(|-16|-8)^2=225+64=289$

~~когда $x\neq0$ y может принимать един~~

пусть $(x_0; y_0)$ - корень системы уравнений, тогда $(-x_0, y_0)$ - тоже корень => не существует корня $(x_1; y_1)$, т.к всего 1 корня. Пусть первое уравнение имеет корни (x_0, y_0), тогда $(|y_0|-8)^2=a-(|x_0|-15)^2$

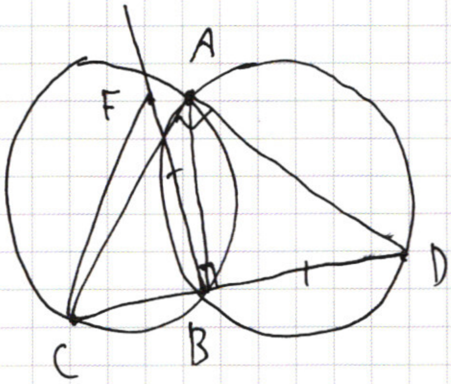
$|y_0|=8+\sqrt{a-(x_0-15)^2}$, или $|y_0|=8-\sqrt{a-(x_0-15)^2}$

одно из них должно быть верно => если $y_0\neq0$, то y_0 принимает 2 значения => корней больше чем 2 => ~~$y_0\neq0$~~ $y_0=0$.

$\begin{cases} |x+8|+|8-x|=16. \\ (|x|-15)^2=a-64. \end{cases}$ Если $x>8$ $2x>16$ $x<8$ $16-2x<16$ $x\in[-8;8]$

$a\in[49+64; 225+64]$ $a\in[113; 289]$

Задача 6.



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4900 = 2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7$

11 $\quad 8\cdot7$ $\quad \frac{8\cdot7}{2}\cdot\frac{6\cdot5}{8}\cdot\frac{4\cdot3}{8}\cdot\frac{8\cdot1}{2}$

$\frac{8\cdot7\cdot6}{3}\cdot\frac{5\cdot1}{2}\cdot\frac{3\cdot2\cdot1}{2}$ $\quad 56\cdot5$ $\quad 42\cdot5$ $\quad 210$

280 $\quad$ 840

1120 $\quad$ 2520

3360 $\quad$ 5880

$x+y=S$ $\quad 40x+y=5S$ $\quad 39x=4S$ $\quad S=\frac{39}{4}x$ $\quad x=\frac{4}{39}S$

$k^2b_1+k^5b_1 \ldots k^{2009}b_1$

$kb_1^2 \quad k^3b_1 \quad k^3b_1 \quad k^6b_1 \quad k^9b_1=$

$\frac{1}{3}S \quad S=$

$kb_1 \quad k^3b_1 \quad k^2b_1 \quad =4S$

$b_1 \quad kb_1+k \quad k^3b_1 \quad k^5b_1$

$kb_1 \quad k^2b \quad k\sqrt[3]{b_0} \quad k^3b_0+k^4b_0$

$39(b_3+b_6+\ldots+b_{2009})=4S$ $\quad \frac{4}{9}39S$

$b_1 \quad kb_y \quad k^2b_y$ $\quad 16$

$b_1+b_2+\ldots+b_{2009}=\frac{35}{39}S$ $\quad \frac{0{,}4}{1{,}4} \quad \frac{2}{7}$

$(1+k)(b_x=k^2b_x$

$1{,}4x_1=S$

24, 24, $\times$24, 96, 48, 576

$b_3+b_6 \quad b_9$

$\frac{35}{4}=\frac{1+k}{k^2}$ $\quad 35k^2=4+4k$

$b_1 \quad b_2+b_4+b_6+b_8+b_{10}+b_{12} \quad S$

$35k^2-4k-4=0$

$x \quad 44x \quad b_2+b_4 \quad b_1 \quad \frac{b_3}{94}+b_3\cdot94$

$D=16+560$

576

$1{,}4x=S$ $\quad 2{,}9b_3$ $\quad 24$

$0{,}4x \quad 1{,}2x$

$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot2\cdot2}$ $\quad \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot2\cdot2\cdot2}$ $\quad \frac{4+24}{70}=\frac{2}{5}$

$x^2+x+8 \quad x^2+9 \quad -27$ $\quad 240\cdot7$ $\quad 360\cdot7$

1680 $\quad$ 2520

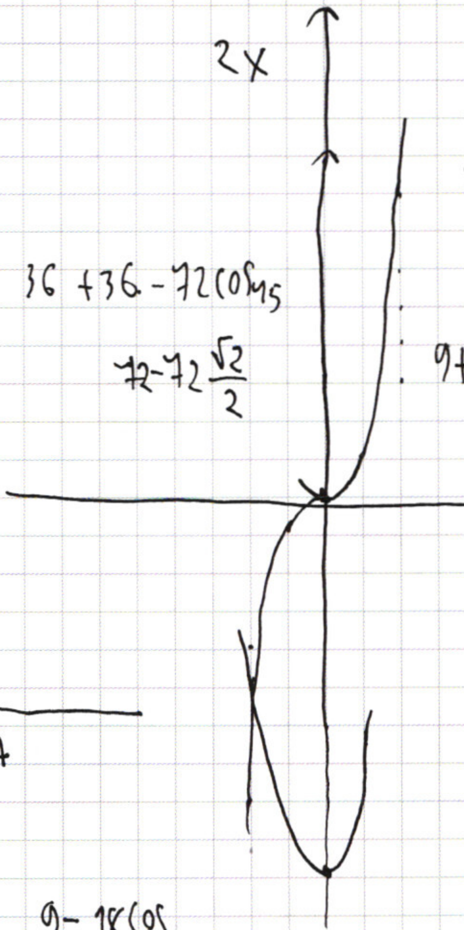
$(-9-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})$ $\quad (1-\sqrt{2})$ $\quad 1+\sqrt{2}$ $\quad 8\,4n\cdot3$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\frac{\sqrt{2}x}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}x+10\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(x+10)$

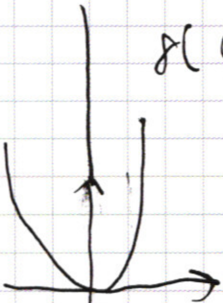
$(x+10)(x-4)$



$2x$

$-2 \quad 4\sqrt{2}$

$2 \quad -4\sqrt{2}$



$8(9-x^2) = x^3 \qquad x^3 = 8(x^2-9)$

$9 - x^2 = x^3$

$36+36-72\cos 45$

$x \qquad 72 - 72\frac{\sqrt{2}}{2}$

$9+9$

$40 \quad 8$

8

4

$x^2 + 8x^2 = 36$

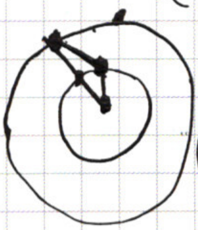
-2

$64-$

$9^3 = 81 = 729$

$(-2; 4\sqrt{2})$

$(4\sqrt{2}; 2)$



$x^2(x-8) = -72$

$\sqrt[3]{17+}$

$(-1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^2$

$x^3 + 8x^2 = -72$

$2+1-2\sqrt{2} \qquad x^3 \quad 2+1+2\sqrt{2}$

$x^2(x+8) = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3$

$9 - 18\cos x$

$x_1 x_2 x_3 = -72$

$64 + x^2$

$x_1 + x_2 + x_3 = 8$

$x^3 - 64x + 200 \geq 0$

1

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 0$

$x(x^2-64) = -200$

$2\sqrt{2}$

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 0$

$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0 \qquad 2x_1x_2 \quad 8 = x_1(1-2x_1) \qquad 3x^2 =$

$4 + 5 - 9 - 4 + 4 \qquad 16 \qquad x_2 = \frac{8}{1-2x_1}$

$x_1^2 x_2 = -72$

$x_1^2 + x_2 = 8$

$64 - 40 + 44 - 8 + 4 \qquad (-2; 4\sqrt{2})$

$x_1^2 + 2x_1x_2 = 0$

$(2; -4\sqrt{2})$

$324-$

$x_2(8-x_2) = -72$

8

$\sqrt{D} = 2\sqrt{88}$

$x_2^2 - 8x_2 - 72 = 0$

$x^3(4x+5)$

$\frac{8 \pm 4\sqrt{22}}{2}$

$64 + 288 \quad 352$

$x(4x+4$

$4 \pm 2\sqrt{22}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)