

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа. 20160

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$. $x=6; x=1+\sqrt{13}$

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$. $(-\infty; -1] \cup [\frac{1-\sqrt{53}}{8}; \frac{1+\sqrt{53}}{8}] \cup [2; \infty)$

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF . $FC=26$ $S=119$

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16, \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$$x=0, y \in [-16; 0] \quad a=289$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

$$\begin{cases} |y-x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (x-15)^2 + (y-8)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow a \geq 0$$

$$\sqrt{6^3 - 64 \cdot 6 + 200} = 2\sqrt{16-4}$$

$$\sqrt{6(36-64)+200} = 4\sqrt{2}$$

$$y+x-6 = 4 \cdot 15 - 3 \cdot 14 = 4 \cdot 21 - 21 = 4 \cdot 7 = 4 \cdot 2 = 4\sqrt{2}$$

Если написать $y = -x$, $x = -x$ и $y = -x$

то $|y-x+8| + |y-x+8| = 16$

$|y-x+8| + |-y-x+8| = 16$

$|x+y+8| + |x-y+8| = 16 \Rightarrow y = x = -x = -y = 0$

$x = -x \Rightarrow x = 0$

$|y-x+8| + |y-x+8| = 16$

или $y = x = 8$

$|y+8| + |y+8| = 16$

$2|y+8| = 16$

$|y+8| = 8$

$y = 0$

$y = -16$

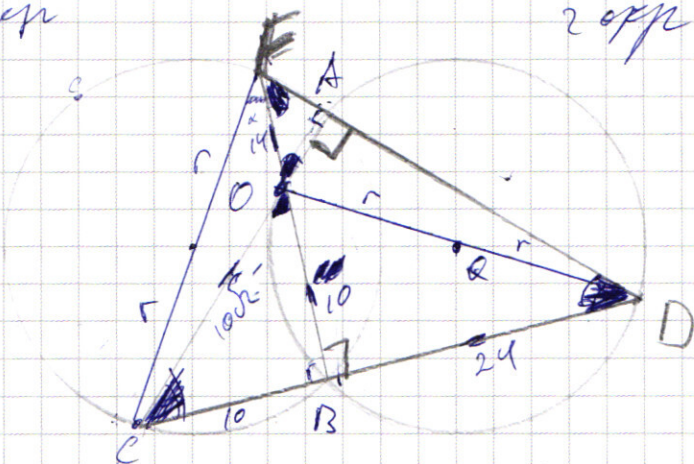
тогда $a = 15^2 + 0 = 225$

$a = 15^2 + 16^2 = 225 + 256 = 481$

$a = 8^2 + 7$

№6
1 окр

2 окр



Дано: окр 1 и окр 2
окр 1 и окр 2 = A и B
 $r = 13$

$CE \perp AD$

$DE \perp AD$

$BE \perp AD$

$\angle CAD = 90^\circ$

$FB \perp CD$

$BF = BD$

а) $CE = ?$

б) $BC = 10$ $S_{ACF} = ?$

Решение:

1) $BF \perp BD$

т.к. $B \in \text{окр 1 и окр 2}$

т.к. $BF = BD$

и $D \in \text{окр 2}$

$\Rightarrow F \in \text{окр 1}$

2) ~~$BF \perp BD$~~ $BF \cap AC = O$

т.к. $\angle CAD = 90^\circ$ (по условию) $\Rightarrow O \in \text{окр 2}$
и $\angle CBD = 90^\circ$ (по условию)

3) $\angle FBC = 90^\circ$ (по условию) $\Rightarrow \boxed{FC = 2r = 26}$

4) $CA \perp AD$; $AD \cap \text{окр 1} = F'$

$\angle F'AC = 90^\circ \Rightarrow F'C = \text{диаметр}$

по т.у. FC - диаметр $\Rightarrow F'$ и F совпадают, $\Rightarrow F \in AD$

5) ~~$S_{ACF} = S_{BCD} = S_{ABD} = S_{FBC} + S_{FBD}$~~

$FB = \sqrt{13^2 - 10^2} = \sqrt{69 - 100} = \dots = 2.12$ (по т.у. Пифагора)

$FB = BD = 2.12$

$OB = \sqrt{13^2 - BF^2} = 2.5 = 10 \Rightarrow \triangle EPO \sim \triangle FBO$; $FO = BF = BO = 14$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$OC = \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2}$$

$$b) AO^2 + Af^2 = .14^2$$

$$\angle AFB = 2 \angle ACB$$

$$\cancel{A} \cap B = \emptyset \cup B$$

$$\angle COB = \angle FOA$$

Тогда

$$2 \cdot OA^2 = 19^2$$

$$OA = \sqrt{2 \cdot 14} = 2\sqrt{2} = 1F$$

7) $AC = 10\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

$$S_{\Delta FAC} = \frac{1}{2} AC \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 12 \cdot 2 = 24$$

Answer: $S = 119$

$$CF = 26$$

$$P_2: |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \quad (1)$$

$$(x-15)^2 + (y-8)^2 = 0 \Rightarrow x=15, y=8 \quad (2)$$

npn $x = -x$

при $x = -x$
~~то~~ $x(1)$ утв не находится $\Rightarrow$ если x и $-x$ $\neq 0$
 то у нас получится 2-й случай решения.

7.10. $X = -X$ т.е. $\text{бюджет. corner} \Rightarrow X = 0$

$$\text{tang } y = 0$$

$$V_f = -16$$

$$r^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$$

$$a = 15^2 + 8^2 = 289$$

Answer: $a = 289$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200}} = x^2 + 6x - 40$$

$$\text{ОДЗ: } x^3 - 64x + 200 \geq 0$$

$$x^2 + 6x - 40 = 0$$

$$D = 36 + 160 = 196$$

$$x_{1,2} = -3 \pm 7$$

$$x_1 = -10$$

$$x_2 = 4$$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4)$$

~~$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4)$$~~

$$\left(\frac{x+5\cdot 2}{2\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4)$$

$$x = -10 - \text{исключаем}$$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = 2\sqrt{2}(x-4), \quad x-4 \geq 0$$

$$x^3 - 64x + 200 = 2 \cdot 4 (x^2 - 8x + 16)$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 8 \cdot 16$$

$$x^3 - 8x^2 + 200 - 8 \cdot 16 = x^3 - 8x^2 + 4 \cdot (50 - 32) = 0$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -8 \quad 0 \quad 72 \\ 2 \quad 1 \quad -6 \quad -12 \\ 6 \quad 1 \quad -2 \end{array}$$

$$x^2(x-6) - 2(x^2-36) = 0$$

$$x^2(x-6) - 2(x-6)(x+6) = 0$$

$$(x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0$$

$$x=6$$

$$D = 4 + 12 \cdot 4 = 4 \cdot 13$$

$$x_{0,2} = 1 \pm \sqrt{13}$$

но $\sqrt{13}$ не подходит по ОДЗ

Ответ: $x=6$; $x=1 \pm \sqrt{13}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

~~$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$~~

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

при $x \leq -2$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

~~$$x^3(4x+5) + x(9x+4) + 4 = x^3(4x-5) + 1$$~~

~~$$x^3(4x+5) + x(9x+4) + 4 \geq 0 \text{ для } x \leq -2$$~~

~~$$x^3(4x^2+4) + x^2(5x)$$~~

$$4x^4 + x^2(5x+11) + 4x+4 \geq 0 \text{ для } x \leq -2$$

$$\Rightarrow x \leq -2$$

при $x > -2$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

при $x = -1$

$$4 + 5 - 9 - 4 + 4 = 0$$

$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) = 0$$

$$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) = 0$$

продолжение на 5 стр.

$$N1 \quad 4900 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

$$7521$$

$$\text{когда 4 цифры} \quad 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

когда 5 цифр.

ссу кандидатурисел
т.о. на 1 место 4 цифры
на 2 уже 3 и т.д.

$$24 \cdot 4 = 96 \quad \underline{7521}$$

$$\underline{75211}$$

$$5 \cdot 96 = 480$$

$$\underline{775211}$$

$$480 \cdot 6 = 2880$$

$$\underline{7755211}$$

$$2880 \cdot 7 = 20160$$

Ответ; 20160

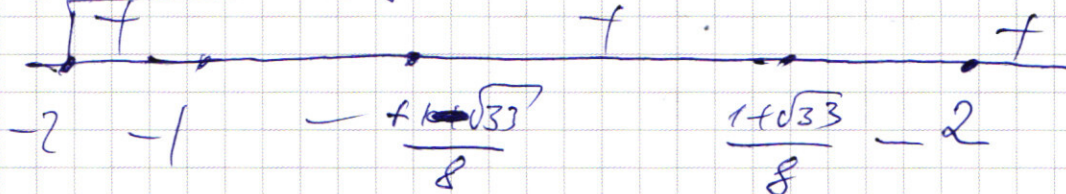
N4 (продолжение)

$$(x+1)(x-2)(4x^2-x-7)=0$$

$$(x+1)(x-2)=0 \quad D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 4 = 1 + 32 = 33$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

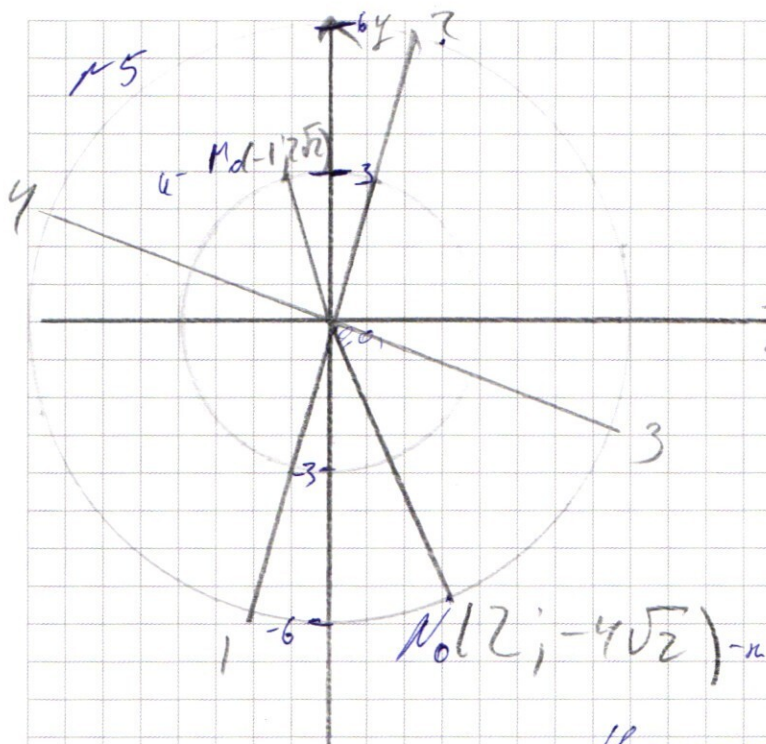
$$(x+1)(x-2)\left(x + \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0$$



$$x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty)$$

$$\text{Ответ; } x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$V_k = 2,5 V_n, \text{ где } V - \text{ скорость вращения}$$

Тогда, т.е. M_0 и N_0 в одной плоскости

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$R_k = \sqrt{1+8} = 3$$

$$R_n = \sqrt{4+32} = 6$$

Изначально от начальной в диаметры противоположных полостей

$$\text{т.е. } \frac{2\sqrt{2}}{-1} = \frac{-4\sqrt{2}}{2}$$

$6-3=3$ - ~~расстояние~~ расстояние между ними. (разность радиусов)

$$\text{угл. скорость } - \omega = \frac{v}{R}$$

$$\omega_k = \frac{2,5 v}{3}$$

$$\omega_n = \frac{v}{6}$$

$$\omega = \omega_k - \omega_n = \frac{5v}{6} - \frac{v}{6} = \frac{2}{3} v$$

- др. угл. скор. кар.

Представим что палец стоит тогда угл. убит. (угл. скоростью ω_0)

$$t = \frac{\pi}{\omega_0} - \text{время до разл. между ними}$$

$$t = \frac{3\pi}{2v}; S_n = t \cdot v = \frac{3\pi}{2v} \cdot v = \frac{3}{2} \pi; \frac{S_n}{2\pi R_n} = \frac{\frac{3}{2} \pi}{2\pi \cdot 6} = \frac{3}{8}$$

значит перенос в т. с координатами,
 $(-1; -4\sqrt{2})$ и воданерма $(-1; -2\sqrt{2})$

Далее ветви будут проходить с периодичностью
 $2t = \frac{3\pi}{5}$ в т. 1, 2, 3, и далее)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$4900 = 10 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 4 = 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1$$

11 22 55 77
11 22 5 75 7
11 22 5 7 55
11 22 7 55 7
11 22 7 5 75
11 22 7

~~5. 2. 5. 2. 4. 4. 1. 1~~

4. 4. 4 - 100 - 4. 4
(10 + 50) - 4 - 4. 4

№2. $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000} =$

$$b_1 \frac{(\frac{b_2}{b_1})^n - 1}{\frac{b_2}{b_1} - 1}$$

$$b_1 + b_2 + 40b_3 + b_4 + \dots + 40b_{3000} = 5S$$

$$b_1 + 3b_2 + b_3 + 3b_4 + \dots + 3b_{3000} = 5S = S + 2 \cdot (b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{3000}) =$$

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 = b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 = b_1 (q + q^2 + q^3) = b_1 q^2 (1 + q^{-1} + q^{-2}) = b_1 q^2 (1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}) = b_1 (q^2 + q + 1)$$

$$\frac{b_2}{b_1} = q$$

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$b_1 (q - 1) (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1) =$$

$$\frac{b_3}{b_2} = q = \frac{b_4}{b_3} = \frac{b_5}{b_4} = \frac{b_6}{b_5}$$

$$= b_1 (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1) = b_1 (q^2 + q + 1)$$

$$S = \frac{b_1 [\frac{b_2}{b_1} - 1]}{\frac{b_2}{b_1} - 1}$$

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$5S = \frac{b_1 [\frac{b_2}{b_1} - 1]}{\frac{b_2}{b_1} - 1} + 3q(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) =$$

$$b_6 = b_5 q = b_4 q^2 = b_3 q^3 = b_2 q^4 = b_1 q^5$$

$$= S + 3q \cdot (b_1 q^2 + b_1 q^5 + \dots + b_1 q^{2994}) = S + 3q \cdot b_1 q^2 (1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{2994}) = S + 3q^3 b_1 (1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{2994}) = S + 3q^3 b_1 \frac{(1 - q^{3000})}{1 - q^3}$$

$$\frac{1}{q^3} = \frac{q^8}{q^5} = \frac{q^8}{b_1} = \frac{q^8}{4900} = \frac{1}{4900} \cdot q^8 = \frac{1}{4900} \cdot 4900 = 1$$

$$9 \cdot 8 = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 = 128$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

~~$$S = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000} = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$~~

~~$$5S = S + 39(b_2 + b_3 + \dots + b_{3000}) = S + 39 \cdot b_1 q^2 (1 + q + q^2 + \dots + q^{2999})$$~~

~~$$xS = S + 2(b_2 + b_3 + \dots + b_{3000}) = S + 2 \cdot b_1 q (1 + q + q^2 + \dots + q^{2999})$$~~

~~$$5S = S + 39 \cdot b_1 q^2 \cdot \frac{(\frac{1}{q^3})^{1000} - 1}{\frac{1}{q^3} - 1} = S + 39 b_1 q^2 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{\frac{1}{q^3} - 1}$$~~

~~$$xS = S + 2 b_1 q \cdot \frac{(\frac{1}{q^2})^{1500} - 1}{\frac{1}{q^2} - 1} = S + 2 b_1 q \cdot \frac{q^{3000} - 1}{\frac{1}{q^2} - 1}$$~~

~~$$4S = 39 b_1 \cdot q^2 \cdot \frac{1 - q^{3000}}{1 - q^3} = 39 b_1 q^2 \cdot \frac{(1 - q^{3000}) \cdot q^3}{(1 - q^3) q^{3000}}$$~~

~~$$xS = S + 2 b_1 q \cdot \frac{(1 - q^{3000}) \cdot q^2}{(1 - q^2) q^{3000}} = S + 2 b_1 q \cdot \frac{48 \cdot (1 - q^3)}{39 q^2 \cdot q^3}$$~~

~~$$= S + 4S \cdot 2 \cdot \frac{(1/q)(1 + q + q^2)}{(1/q)(1 + q) \cdot 39 q^2} = S + 8S \cdot \frac{q^2 + q + 1}{(q + 1) \cdot 39 q^2}$$~~

~~$$x = 1 + 8 \left(\frac{1}{39 q^2} + \frac{1}{39 q + 39} \right) = 1 + 8 \frac{(1 - q^3) \cdot \frac{1}{39 q^2} + \frac{1}{39 q + 39}}{q^2 (1 - q^3) \cdot 39} = 1 + \frac{8}{39} \cdot \frac{b_3 + b_2 + b_1}{(b_2 + b_3)}$$~~

~~$$\frac{4S}{39} = b_3 + b_2 + b_1 + b_{3000}$$~~

~~$$S = (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000})$$~~

~~$$\frac{(x-1)S}{2} = b_2 + b_3 + \dots + b_{3000}$$~~

~~$$\frac{b_1 \cdot (q^3 - 1)}{q^3 \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1}} = 1 + \frac{8}{39} \cdot \frac{b_1}{b_3} \cdot \frac{q^3 - 1}{q^2 - 1}$$~~

~~$$= 1 + \frac{8}{39}$$~~

☒ черновик

☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 8

(Нумеровать только чистовики)