

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4900 \mid 2$$

$$2450 \mid 2$$

$$1225 \mid 5$$

$$245 \mid 5$$

$$49 \mid 7^2$$

$$4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

$$C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = 28$$

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

$$28 - 15 = 6$$

$$D = 1 - 4 = -3$$

$$b + qb + q^2b = b(1 + q + q^2) \quad C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$b_1; b_2; b_3$$

$$a^1b, a^2b$$

$$S_0 = b_3 \frac{(q^{2000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$$S = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$S_0 = b_1 q^2 \frac{(q^{2000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$$S_0 = \frac{39 b_1 q^2 (q^{2000} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{39 b_1 q^2 (q^{2000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$$\frac{S_0}{S} = 5 = \frac{39 b_1 q^2 (q^{2000} - 1)}{q^2 - 1} \cdot \frac{(q - 1)}{b_1 (q^{3000} - 1)} = \frac{39 q^2 (q^{1000} - 1)(q^{1000} + 1)}{q + 1}$$

$$q^{2000} - 1 = (q^{1000} - 1)(q^{1000} + 1)$$

$$q^{3000} - 1 = (q^{1000} - 1)(q^{2000} + q^{1000} + 1)$$

$$-q^{2000} + q^{1000} + 1 \mid q^{1000} + 1$$

$$= \frac{39 q^2 (q^{1000} + 1)}{(q + 1)(q^{2000} + q^{1000} + 1)}$$

$$\begin{array}{r} 118072 \\ 816 \\ \hline 416 \\ 612 \\ \hline 1028 \end{array}$$

$$36 + 4 - 40 = 0$$

$$x = -6 \pm 14 \quad x = -10$$

$$x = 4 \quad D = 4 + 4 \cdot 12 = 52$$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^4 + 6x - 40$$

$$\frac{x^{12}}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} x^{12\sqrt{2}} = \frac{2x+20}{4\sqrt{2}} = \frac{x+10}{2\sqrt{2}}$$

$$x^3 - 64x + 200$$

	1	0	-64	200
5	1	5		
6	1	6		
4	1	4		
8				
10	1	10		

64
16
-48
4

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5^2$$

1	0	0	6	-40
2	1	2	4	14
4	1	4	16	20
5	1	5	25	

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$x(x^2 - 64) = x(x-8)(x+8) \geq -200$$

4	3	-3	-2
2	4	11	1
-2	4	-5	7
-1	4	-2	0

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = \frac{(x^4 + 6x - 40)2\sqrt{2}}{x+10}$$

$$-1000 + 640 + 200$$

$$x^3 - 64x + 200 = \frac{(x^4 + 6x - 40)8}{x^2 + 20x + 100}$$

$$\frac{x^4 + 6x - 40}{x+10} \geq 0$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

16	4	-5	-9	4	4
2	1	4	-1	-10	
32	2	4	3	-3	-2

$$D = 1 + 4 \cdot 4 \cdot 2 = 33$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$(x-2)(4x^3 + 3x^2 - 3x - 2) \geq 0$$

$$(x-2)(x+1)(4x^2 - x - 2) \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

4	5	11	4	4
-1	4	1	10	-6
-2	4	-3	17	
-1/2	4	3	9,5	
-4	4	-11	-33	
-1/4	4	4	10	1,5

$$\begin{array}{r} 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \\ - 4x^2 - 1x^2 - 2x^2 \\ \hline 8x^3 + 9x^2 + 4x \\ - 8x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x \\ \hline 10,5x^2 + 10x + 4 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{4x^4 + x^2 + 4x + 4}{5x^2} \geq |x+2|$$

$$x=0$$

$$(4x^4 + x^2 + 4x + 4 - 5x^2 - 10x^2)$$

$$f(x)^2 - |g(x)|^2 \geq 0$$

$$(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \geq 0$$

$$f(x) \in \mathbb{R}$$

$$|x+2| \leq \frac{4x^4 + x^2 + 4x + 4}{5x^2}$$

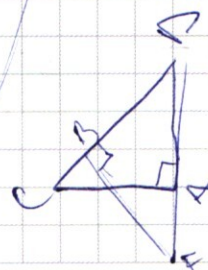
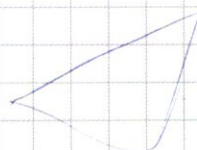
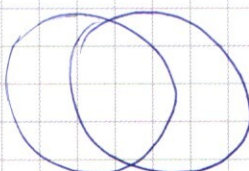
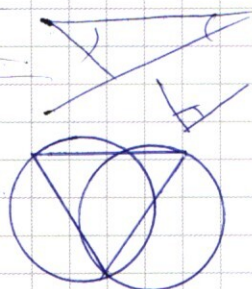
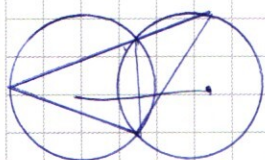
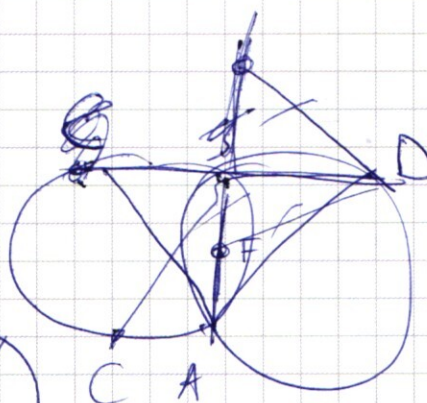
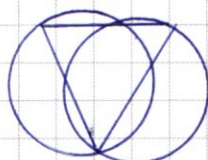
$$\begin{cases} \frac{4x^4 + x^2 + 4x + 4}{5x} \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ \frac{4x^4 + x^2 + 4x + 4}{5x} \geq 0 \\ x+2 \leq 0 \end{cases}$$

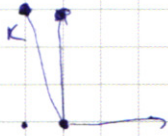
$$\begin{cases} x+2 \leq \frac{4x^4 + x^2 + 4x + 4}{5x^2} \\ x \geq -2 \\ -x-2 \leq \frac{4x^4 + x^2 + 4x + 4}{5x^2} \\ x < -2 \end{cases}$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 4 - 5x^3 - 10x^2 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

	4	5	11	4	4
-2	4	-3	17		
-1	4	1	10	-6	
0	4	-7	10		





$$J_k = 2,5 J_n$$

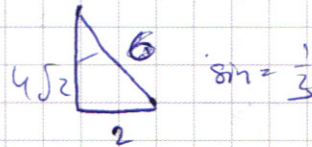
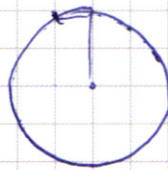
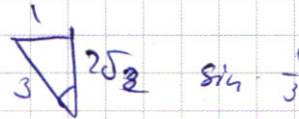
$$\omega_k^2 \frac{J_k}{R} = \frac{J_k}{3}$$

$$\omega_k = \frac{J_k}{2,5 \cdot 6} = \frac{J_k}{15}$$

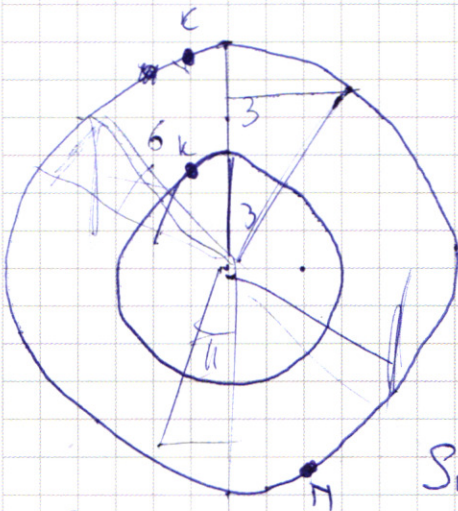
. n

$$R_k = \sqrt{1+8} = 3$$

$$R_n = \sqrt{4+32} = 6$$



$$\frac{\Delta \varphi}{\omega} = \frac{\Delta \varphi}{\omega}$$



$$S_k = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$$

$$S_n = 2\pi \cdot 6 = 12\pi$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\Delta \varphi + \pi}{\omega_k} = \frac{\Delta \varphi}{\omega_n}$$

$$\frac{\Delta \beta + \pi - 5\Delta \beta}{5\omega_n} = 0$$

$$\pi + 4\Delta \beta = 0$$

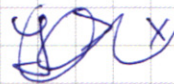
$$\Delta \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\Delta \varphi + \pi}{5\omega_n} = \frac{\Delta \varphi}{5\omega_n}$$

$$\frac{\Delta \varphi + 2\pi - 5\Delta \varphi}{5\omega_n} = 0$$

$$4\Delta \varphi = 2\pi$$

$$\Delta \varphi = \frac{\pi}{2}$$



$$-x - 8$$

$$-x - 8$$

$$J_2 = 26219 + 62416 = 640 = 2^6 \cdot 10$$

$$\frac{28}{2 \cdot 35} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$$

$$b, 96 \quad 9^2 6 \quad 9^3 6$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 89 \\ \times 16 \\ \hline 234 \\ 29 \\ \hline 234 \\ 29 \\ \hline 624 \\ 16 \\ \hline 640 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 35 \\ \times 16 \\ \hline 210 \\ 35 \\ \hline 560 \end{array}$$

$$576$$

$$640 = 2^6 \cdot 10$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\underline{13} \quad \left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4)$$

$$(x+10) \left(\frac{\sqrt{x^3 - 64x + 200}}{2\sqrt{2}} - x + 4 \right) = 0$$

$$\begin{cases} x+10=0 & x=-10 \\ x^3 - 64x + 200 \geq 0 \quad (*) \\ \frac{\sqrt{x^3 - 64x + 200}}{2\sqrt{2}} - x + 4 = 0 \quad (\Delta) \end{cases}$$

*) Проверим $x = -10$ в выражение
 $-1000 + 640 + 200 \geq 0$ - неверно $\Rightarrow x = -10$ не подходит

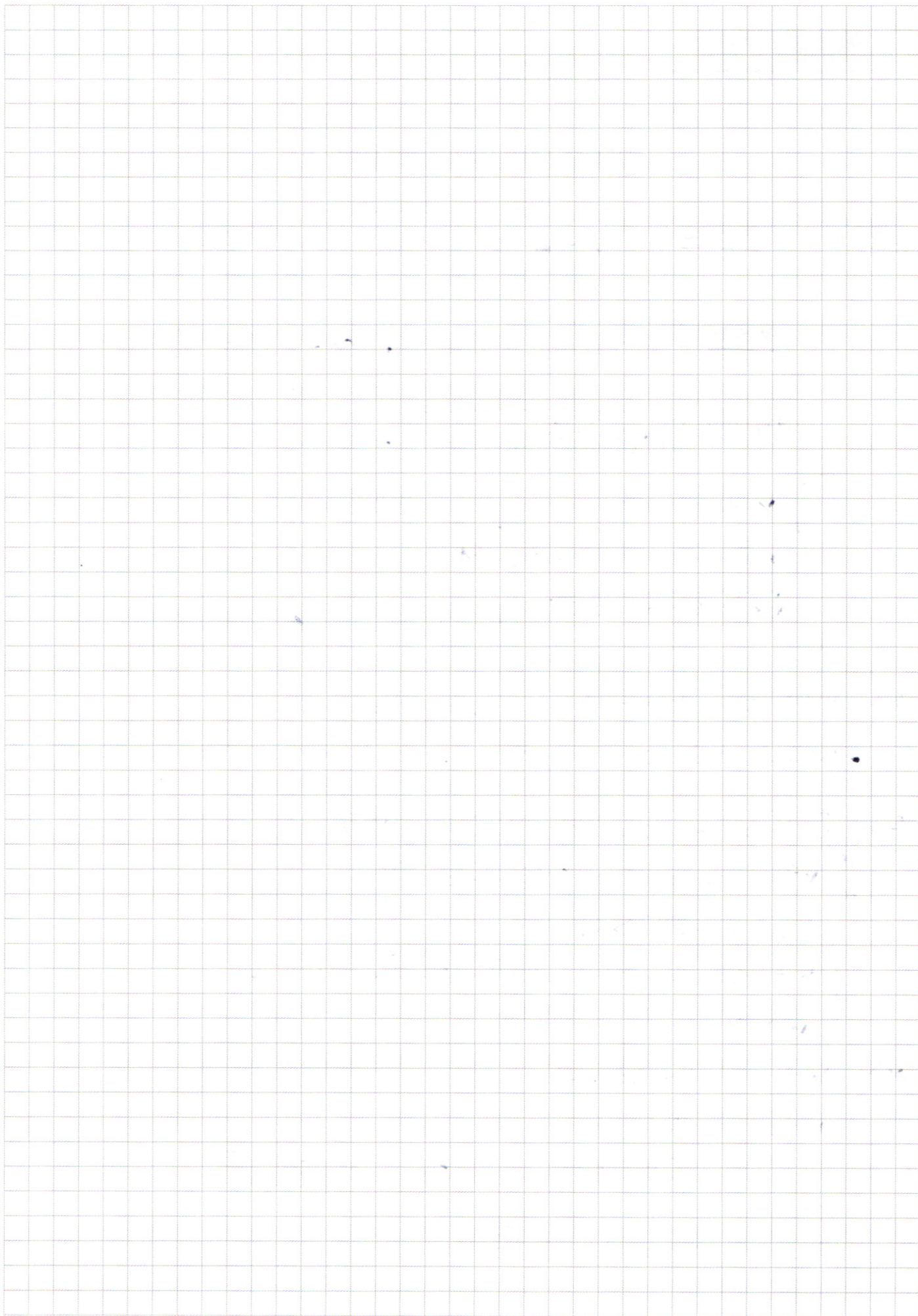
$$\begin{aligned} \Delta) \quad & \sqrt{x^3 - 64x + 200} = 2\sqrt{2}x - 8\sqrt{2} \\ & \begin{cases} x^3 - 64x + 200 = (2\sqrt{2}x - 8\sqrt{2})^2 \\ 2\sqrt{2}x - 8\sqrt{2} \geq 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128 \quad (*) \\ x \geq 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$*) \quad x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$x=6 \quad x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 12 = 52 \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{2}$$

Ответ: $x=6; \frac{2+\sqrt{52}}{2}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

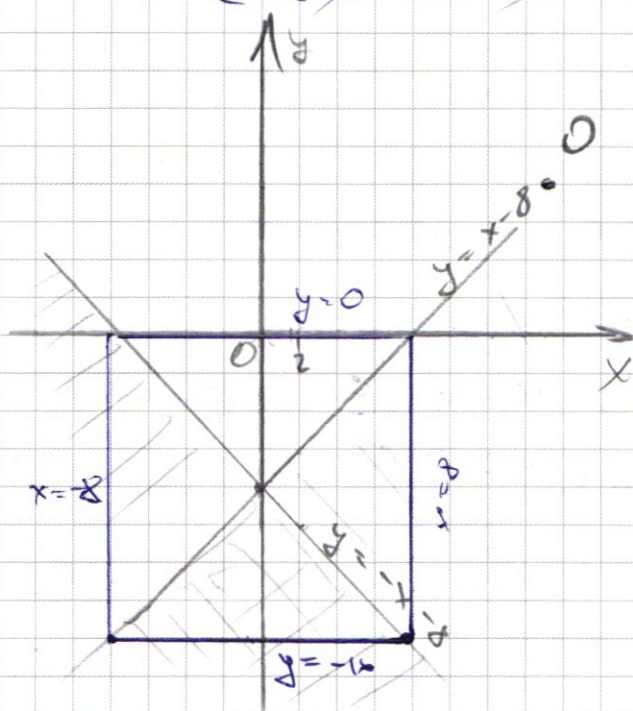
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16 & (*) \\ ((x) - 15)^2 + ((y) - 8)^2 = 9 & (\Delta) \end{cases}$$

*)

$$\begin{cases} y \leq -x - 8 \\ y \geq x - 8 \end{cases} \quad \begin{cases} -y - x - 8 - y + x - 8 = 16 \Rightarrow y = -16 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y \geq -x - 8 \\ y \leq x - 8 \end{cases} \quad \begin{cases} y + x + 8 - y + x - 8 = 16 \\ \Rightarrow x = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq x - 8 \\ y \geq -x - 8 \end{cases} \quad \begin{cases} y + x + 8 + y - x + 8 = 16 \\ \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > x - 8 \\ y < -x - 8 \end{cases} \quad \begin{cases} -y - x - 8 + y - x + 8 = 16 \\ \Rightarrow x = -8 \end{cases}$$

$$\Delta) - x^2 - 30|x| + 225 + y^2 - 16|y| + 64 = 9$$

Δ) Окружность с центром в т. О.

№2

$$S = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

 b_1 - первый элемент

$$S_3 = \frac{39b_3 ((q^3)^{1000} - 1)}{q^3 - 1}$$

$$S + S_3 = 5S$$

$$S_3 = 4S$$

$$\frac{39 \cdot q^2 b_1 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{4 b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} \quad \text{т.к. } b_1 \neq 0$$

$$\frac{39 q^2 (q^{1000} - 1)(q^{1000} + 1)}{(q - 1)(q + 1)} = \frac{4 (q^{1000} - 1)(q^{2000} + q^{1000} + 1)}{q - 1}$$

$$\frac{39 q^2 (q^{1000} + 1)}{q + 1} = 4 (q^{2000} + q^{1000} + 1) \quad \text{т.к. } q \neq 1$$

$$\frac{39 \cdot q^2}{q^2 + q + 1} = 4 \Rightarrow 39q^2 = 4q^2 + 4q + 4$$

$$35q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 35 \cdot 4 = 576$$

$$q = \frac{4 \pm 8\sqrt{9}}{2 \cdot 35} = \frac{2 \pm 4\sqrt{9}}{35} \quad q = \frac{4 \pm 24}{2 \cdot 35} =$$

т.к. все члены $> 0 \Rightarrow q = \frac{28}{35} = \frac{4}{5}$

$$S_2 = \frac{2b_2 ((q^2)^{1500} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{2b_1 q (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} \quad q = \frac{4}{5}$$

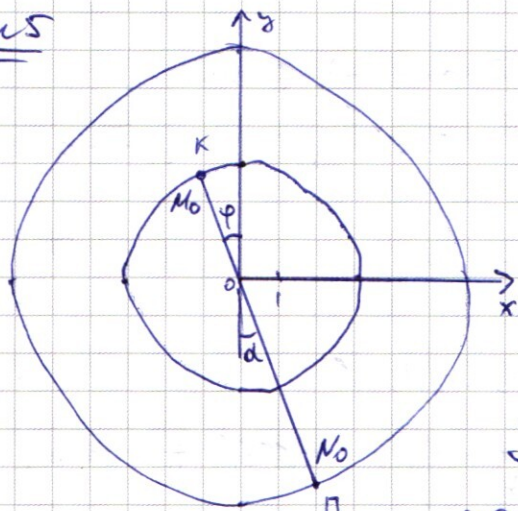
$$\frac{S + S_2}{S} = 1 + \frac{2b_1 q (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} \cdot \frac{q - 1}{b_1 (q^{3000} - 1)} =$$

$$= 1 + \frac{2q}{q+1} = 1 + \frac{28}{35} \cdot \frac{35}{48} = \frac{11}{7}$$

Обес. увеличится в $\frac{11}{7}$ раз

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

25



$$\delta_k = 2,5 \delta_n$$

1. $R_k = \sqrt{1+8} = 3$ (по т. Пифагора)
радиус караса

$R_n = \sqrt{4+32} = 6$ (по т. Пифагора)
радиус и скара

Угловыи скорости

$$\omega_k = \frac{\delta_k}{R_k} = \frac{2,5 \delta_n}{3} = \frac{\delta_k}{3}$$

$$\omega_n = \frac{\delta_n}{R_n} = \frac{\delta_k}{2,5 \cdot 6} = \frac{\delta_k}{15}$$

$$\frac{\omega_k}{\omega_n} = 5$$

2. В начальный момент времени sin угла между прямой MoO и осью y равен $\sin \varphi = \frac{1}{3}$

Аналогично sin угла между прямой MoO и осью x равен $\sin \alpha = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Т.к. оба угла принадлежат I четверти эк. окружности $\Rightarrow \alpha = \varphi \Rightarrow$ угол между т.О и карасем и скаром равен π

3. $\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t_k = \frac{\Delta \beta + \pi}{\omega_k} = \frac{\Delta \beta + \pi}{5 \omega_n}$
 $\Delta t_n = \frac{\Delta \beta}{\omega_n}$

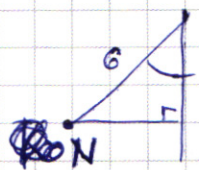
$$\Delta t_k = \Delta t_n \text{ (место встречи)}$$

$$\frac{\Delta \beta + \pi}{5 \omega_n} = \frac{\Delta \beta}{\omega_n} \Rightarrow \Delta \beta = \frac{\pi}{4} \text{ - т.е. скара пройдет еще } \frac{\pi}{4} \text{ до встречи}$$

Далее они будут векторами

$$\frac{\Delta \varphi + 2\pi}{5\omega n} = \frac{\Delta \varphi}{\omega n} \Rightarrow \Delta \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ - через каждый } \frac{\pi}{2}$$

4. Первая ветвь, положение скары:



$$\Rightarrow N(6 \cos(\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{3}); 6 \sin(\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{3}))$$

Далее ветви проходят через каждый $\frac{\pi}{2}$

Ответ: $(6 \sin(\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{3}); 6 \cos(\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{3}))$

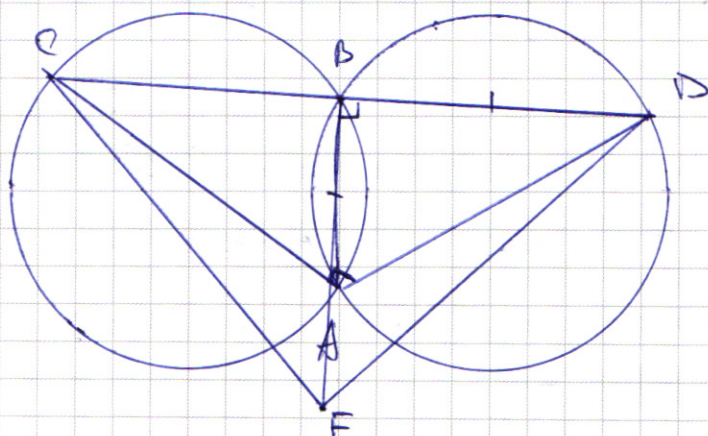
Ответ: $(6 \sin(-\frac{3\pi}{4} + \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k); 6 \cos(-\frac{3\pi}{4} + \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k))$

$(6 \sin(-\frac{5\pi}{4} + \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k); 6 \cos(-\frac{5\pi}{4} + \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k))$

$(6 \cos(-\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k); 6 \sin(-\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k))$

при $k \in \mathbb{Z}$

6



1. т.к. $\angle DBF = 90^\circ$
 $BD = BF$

$\Rightarrow \angle BDF = \angle BFD = 45^\circ$

2. Соединим B и A

2.1. $\angle CBA + \angle DBA = 180^\circ \Rightarrow \angle CA + \angle AD = 360^\circ$

$\Rightarrow CA = AD \Rightarrow \angle CDA = \angle DCA = 45^\circ$ (т.к. $\triangle CAD$ - н/у)

3. т.к. $\angle BDF = 45^\circ$ и $\angle BDA = 45^\circ \Rightarrow$ ~~FFFF~~ $F \in AD$
 (н.1) (н.2)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1
$$4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

1. Если брать набор цифр 2, 2, 5, 5, 7, 7, 1, 1

$$C_8^2 = \frac{8!}{6!2!} = 28 - \text{вариантов расположения двух 2.}$$

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15 - \text{вариантов расположения двух 5.}$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6 - \text{вариантов расположения двух 7.}$$

$$C_2^2 = \frac{2!}{2!} = 1 - \text{варианта расположения двух 1.}$$

$$1 \cdot 28 \cdot 15 \cdot 6 = 2520 - \text{количество 8-значных чисел с таким набором цифр.}$$

2. Если брать набор цифр 4, 5, 5, 7, 7, 1, 1, 1

$$C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = 56 - \text{вариантов расположения трех 1}$$

$$C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ вариантов расположения двух 5.}$$

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3 \text{ варианта расположения двух 7.}$$

$$C_1^1 = 1 - \text{варианта расположения 4.}$$

$$56 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 1 = 1680 - \text{кол-во 8-значных чисел с таким набором цифр.}$$

3. Всего чисел: $2520 + 1680 = 4200$

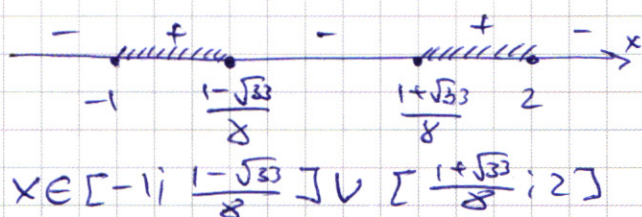
Ответ: 4200 чисел.

4

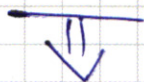
$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 |x+2| + 4 \geq 0$$

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0 \quad (*) \end{cases}$$
$$\begin{cases} x+2 < 0 \\ 4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0 \quad (\Delta) \end{cases}$$

$$*) \quad 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$
$$(x-2)(x+1)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0$$



~~а) на всех $x \in (-\infty; -2)$ нерав-во выполняется~~



$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \in [-1; \frac{1-\sqrt{33}}{8}] \cup [\frac{1+\sqrt{33}}{8}; 2] \end{cases} \Rightarrow x \in [-1; \frac{1-\sqrt{33}}{8}] \cup [\frac{1+\sqrt{33}}{8}; 2]$$

Δ) на всех $x \in (-\infty; -2)$ нерав-во выполняется

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in [-1; \frac{1-\sqrt{33}}{8}] \cup [\frac{1+\sqrt{33}}{8}; 2] \\ x \in (-\infty; -2) \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup [-1; \frac{1-\sqrt{33}}{8}] \cup [\frac{1+\sqrt{33}}{8}; 2]$