

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 \mid x - 2 \mid + 4 \geq 0$$

$$4 \cdot 27 =$$

$$1. \mid x \geq 0$$

$$48 \cdot 2 = 176 = 108$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2 \quad -3 \quad 7 \quad -4 \quad 4 \quad 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2 \quad -3 \quad 7 \quad -4 \quad 4 = 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad -1 \quad 3 \quad -1 \\ -1 \quad 2 \quad -5 \quad -1 \quad -3 \\ 2 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \\ -2 \quad 2 \quad -7 \quad 18 \quad -40 \\ 4 \quad 2 \quad 5 \quad 24 \quad 46 \\ -4 \quad 2 \quad -11 \quad 48 \quad -80 \\ 0,5 \quad 2 \quad -2 \quad -3 \quad -5,5 \\ -0,5 \quad 2 \quad -4 \quad 6 \quad -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad -1 \quad 6 \quad 2 \quad 6 \\ -1 \quad 2 \quad -5 \quad 12 \quad -16 \quad 20 \\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad 9 \quad 14 \\ -2 \quad 2 \quad -7 \quad 21 \quad -48 \\ -4 \quad 2 \quad 5 \quad 27 \quad 110 \\ -4 \quad 2 \quad -11 \quad 51 \quad -202 \\ 0,5 \quad 2 \quad -2 \quad 6 \quad -1 \\ -0,5 \quad 2 \quad -4 \quad 9 \end{array}$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2 \quad -3 \quad 7 \quad -4 \quad 4 \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad -1 \quad 6 \quad 2 \quad 8 \\ -1 \quad 2 \quad -5 \quad 12 \quad -16 \quad 12 \\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad 9 \quad 14 \quad 32 \\ -2 \quad 2 \quad -7 \quad 21 \quad -48 \quad 96 \\ 4 \quad 2 \quad 5 \quad 27 \quad 104 \quad 120 \\ -4 \quad 2 \quad -11 \quad 51 \quad -208 \\ 1 \quad 2 \quad -2 \quad 6 \quad -1 \\ -1 \quad 2 \quad -4 \quad 9 \quad -8,5 \end{array}$$

$$2) \quad x < 2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 + 4 = 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$2 \quad 3 \quad -5 \quad -4 \quad 4 \quad 0$$

$$1 \quad 2 \quad 5 \quad 0 \quad -4 \quad 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$(x-1)(2x^3+5x^2-4) = 0$$

$$2 \quad 5 \quad 0 \quad -4 \quad 0$$

$$2 \quad 2 \quad 9 \quad 18$$

$$-2 \quad 2 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2+x-2) = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

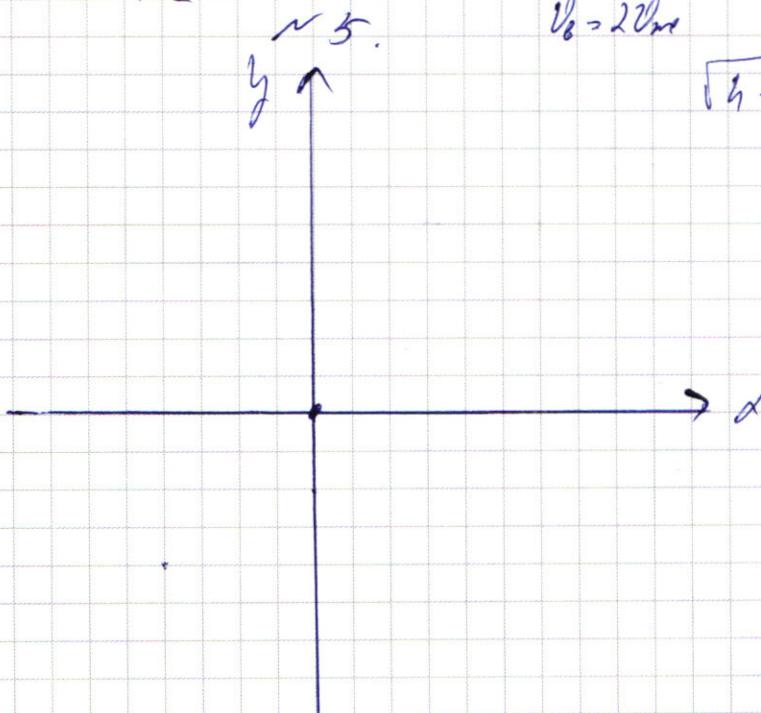
$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x = -1 + \sqrt{17} \\ x = -2 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -1 \pm \sqrt{17} \\ x = -2 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

$$x < 2$$

$$V_0 = 20 \text{ м/с}$$

$$\sqrt{4 + 4 \cdot 4} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$



черновик



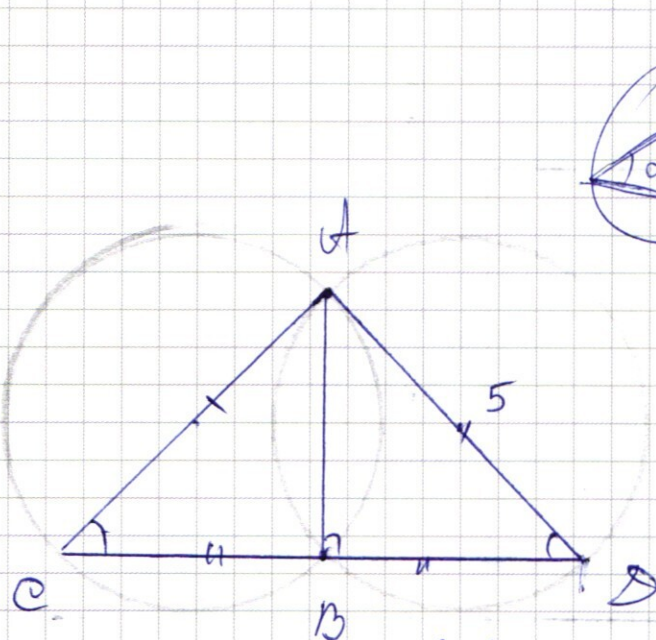
чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

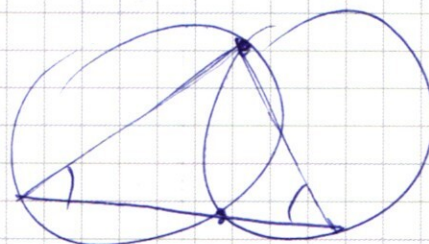
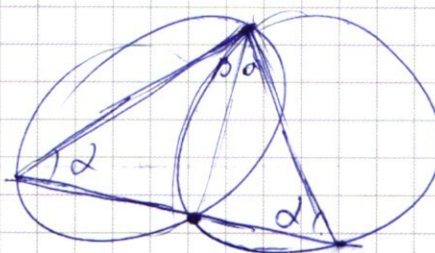
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{aligned}x^2 + x^2 &= 25 \\2x^2 &= 25 \\x^2 &= \frac{25}{2} \\x &= \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$



№ 7.

$$|y-6-x| + |y-6+x| = 12$$

$$(x-8)^2 + (y-6)^2 = 9$$

$$R = \sqrt{9}$$

$$R = 3$$

$$(y-6)^2 = 48$$

$$y-6 = \pm 4$$

$$y = 10$$

$$y = 2$$

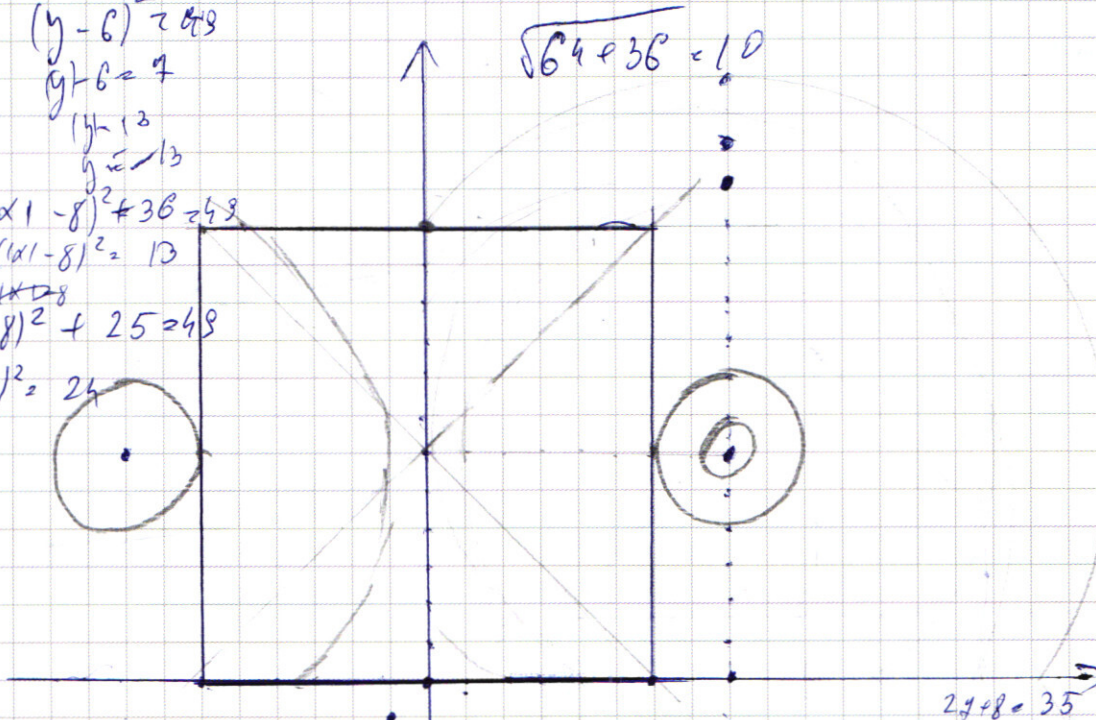
$$(x-8)^2 + 36 = 48$$

$$(x-8)^2 = 12$$

$$x-8 = \pm 2\sqrt{3}$$

$$(x-8)^2 + 25 = 48$$

$$(x-8)^2 = 23$$



$$30 \cdot 8 \cdot 2 = 60 \cdot 8 = 540$$

$$2 \cdot 8 = 16$$

$$40 \cdot 8 \cdot 8 = 38 \cdot 40$$

$$81 + 1440 = 1521$$

$$\sqrt{1521}$$

$$\begin{array}{r} \times 38 \\ 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 38 \\ 38 \\ \hline 117 \\ 1421 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 39 \\ 39 \\ \hline 117 \\ 1421 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ 38^2 \\ + 351 \\ + 117 \\ + 1421 \\ \hline 1521 \end{array}$$



черновик



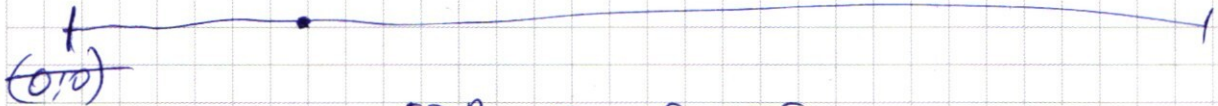
чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$M_0(-2; -2\sqrt{7})$$

$$58R = 58 \cdot 10\sqrt{2} = 50\sqrt{2}$$

$$W = \frac{p a q}{c} \cdot \frac{\lambda}{f} = \frac{V n q}{2 f_2} = \frac{\lambda}{f} \quad \lambda = \frac{f V}{2 f_2}$$

$$\alpha_{\text{eq}} = \frac{40}{5\sqrt{2}}$$

Handwritten signature: *[Signature]*

$$S(t) =$$

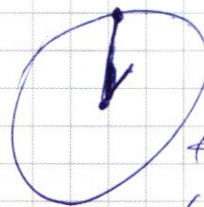
$$M^2 = (x+2)^2 + (y+2\sqrt{7})^2$$

$$y = 2x + 6$$

до 26 года

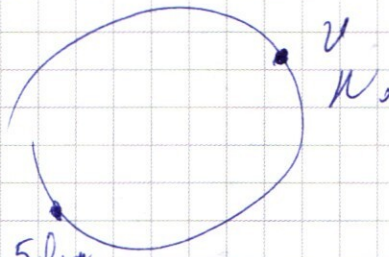
$$x\sqrt{7} = 6 - x$$

$$f = \sqrt{z}$$



10:61

$$\frac{(a-b)^2 + b}{(c-a)^2}$$



4. 50

$$a = \cancel{b} \cancel{b} \cancel{b} \cancel{b}$$

$$x^2 + y^2 = 200$$

$a^2 + b^2 = 200$

$$b = \sqrt{190 - 0^2} \quad b = 5$$

$$Q = \sqrt{I} \sqrt{200 - Q^2}$$

$$a^2 = 1400 - 2a^2$$

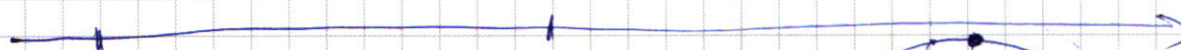
$$9a^2 = 1.60$$

$$a^2 = 175$$

$$a = 5\sqrt{7}$$

$$\begin{array}{r} 14008 \\ - 875 \\ \hline 60 \\ - 56 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$45 \cdot 5 = 225$$



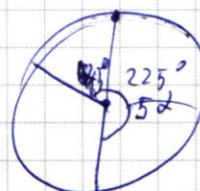
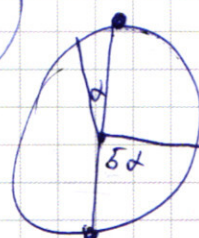
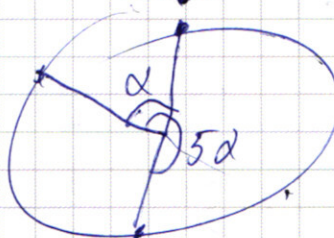
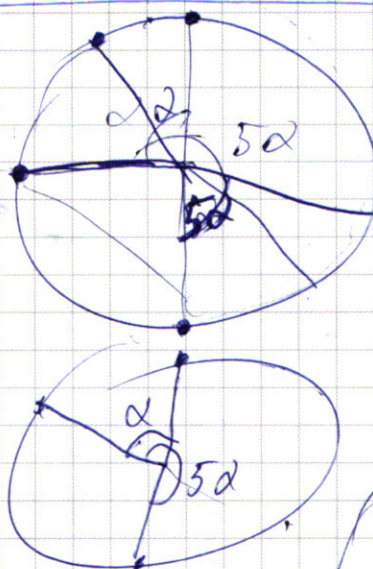
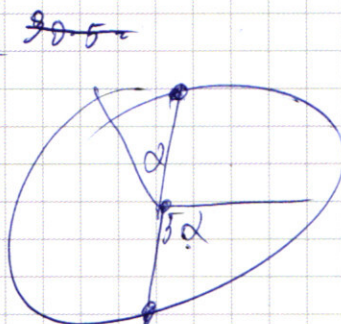
$$M_0(-5; -5\sqrt{7})$$

$$N_0(+5; 5\sqrt{7})$$

$$5\alpha = \alpha + 4\alpha$$

$$4\alpha = 2\sqrt{5}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



$$5\alpha - \alpha = 5$$

$$4\alpha = 5$$

$$\alpha = \frac{5}{4}$$

$$a^2 + b^2 = 200$$

$$b^2 = a^2 - 200$$

$$b = \sqrt{a^2 - 200}$$

$$NN_0^2 = (5 - a)^2 + (5\sqrt{7} + b)^2$$

$$NN_0^2 = (5 - a)^2 + (5\sqrt{7} + \sqrt{a^2 - 200})^2$$

$$NN_0^2 = 200 + 200 - 2 \cdot 200 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 400 - 200\sqrt{2} = 25 - 10a + a^2 + 15 + 10\sqrt{7}\sqrt{a^2 - 200} + a^2 - 200$$

$$400 - 200\sqrt{2} + 10a - 20^2 = 10\sqrt{7}\sqrt{a^2 - 200}$$

$$\frac{1}{8}L = \frac{1}{8}R = \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{4} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|1-6-x| + |1-6+x| = 12 \quad |6-x| + |1-6+x| = 12$$

$$|-5-x| + |-5+x| = 12$$

$$x=0$$

$$x = -1 \quad \begin{cases} y-x \geq 6 \\ y+x \geq 6 \\ y-6-x \end{cases} \Rightarrow y+y-12 = 12$$

$$2y = 24$$

$$y = 12$$

$$y \geq x+6$$

$$y \geq -x+6$$

$$\begin{cases} y-x \leq 6 \\ y+x \leq 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y+6+x - y+6-x = 12$$

$$-2y+12 = 12$$

$$-2y = 0 \quad y = 0$$

$$\begin{cases} y-x \geq 6 \\ y+x \leq 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y-x-x-y+6-x = 12$$

$$-2x = 12$$

$$x = -6$$

$$x \geq a \geq 0$$

при $a \in (0; 2) \Rightarrow 0$ реш.

при $a = 2 \Rightarrow 2$ реш.

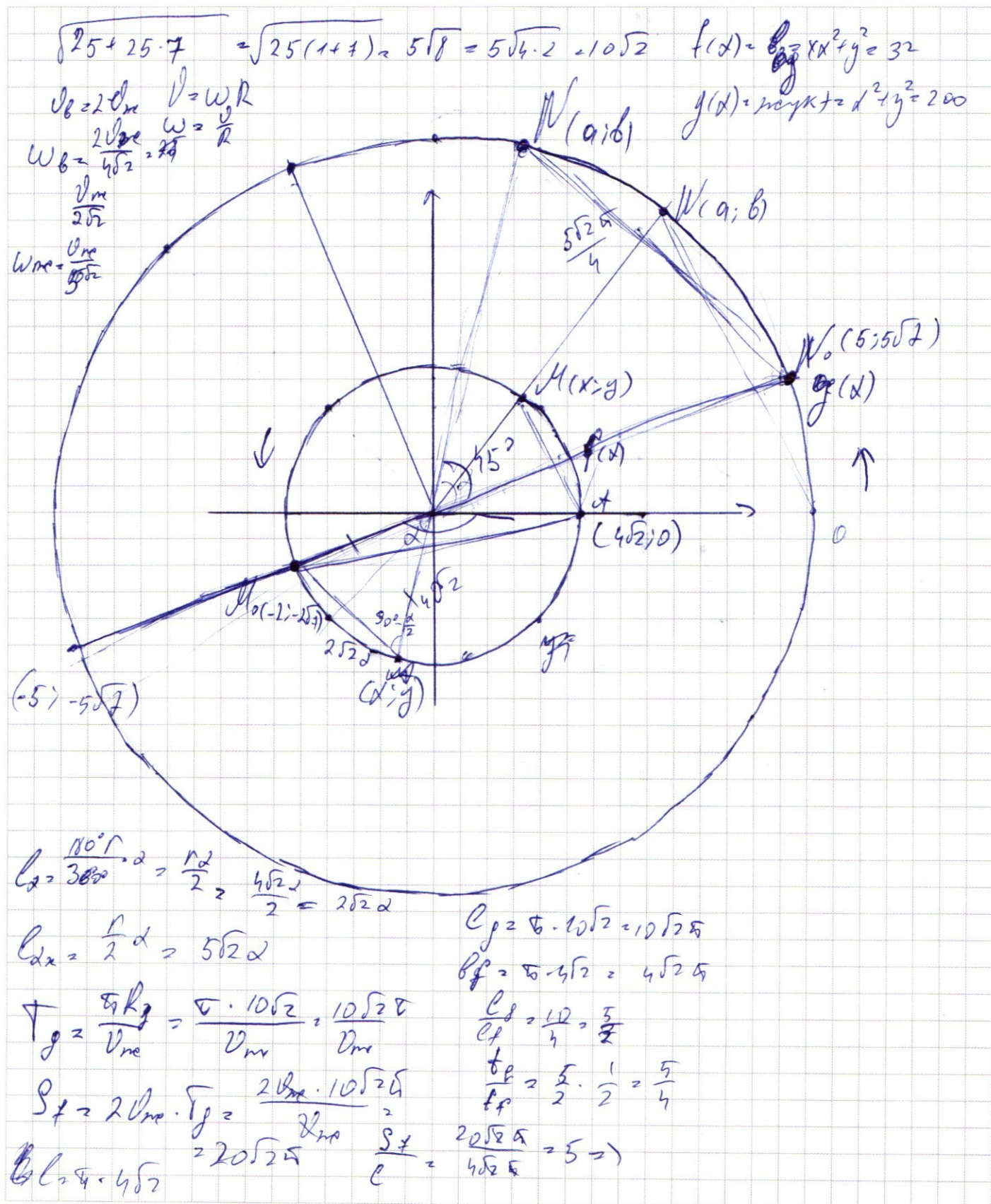
при $a \in (2; 10) \Rightarrow 4$ реш.

при $a = 10 \Rightarrow 2$ реш.

при $a > 10 \Rightarrow 0$ реш.

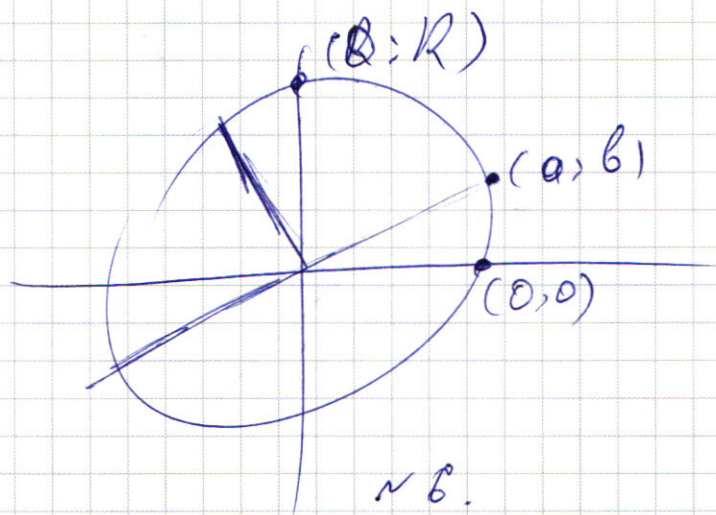
2	-3	7	4	-2
1	2	-1	8	
-1	2	-5	12	
2	2	1	9	
-2	2	-7	21	
4	2	5	27	
-4	2	-11	51	
0,5	2	-2	-0,5	
-0,5				

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

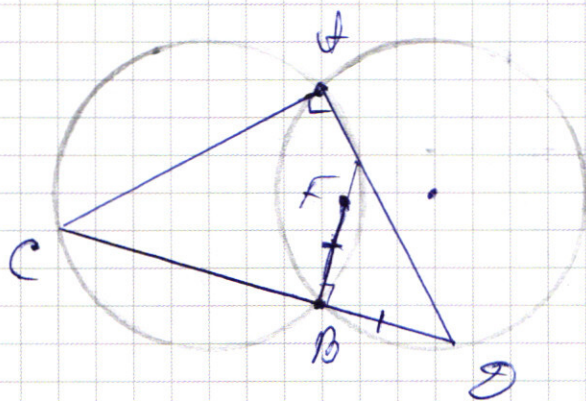


⇒ за то време, как тук протече време, круг
автоматично протече 5.

$$O_b = \frac{v_{mc}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{5} \sqrt{2} = 5 v_{mc}$$



$$R = 5$$



Возможные корни
безу

$$\begin{array}{cccccc} 40 & -49 & 0 & 3 & 0 & \\ 1 & 40 & -9 & -5 & 0 & \Rightarrow x_1 = 1 \\ & & & & & \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(С₁) $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{3000}$

$b_0 = b_1, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$

$49b_0 - 49b_1q^3$

$S_c = \frac{49b_3(q^{1000} - 1)}{(q^3 - 1)} = \frac{49b_3(q^{3000} - 1)}{(q^3 - 1)}$

$S_b + S_c = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} + \frac{49b_1q^2(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{10b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} \quad | : b_1(q^{3000} - 1)$

$\frac{1}{q - 1} + \frac{49q^2}{q^3 - 1} = \frac{10}{q - 1}$

$\frac{49q^2}{q^3 - 1} = \frac{9}{q - 1}$

$49q^3 - 49q^2 = 9q^3 - 9$

$40q^3 - 49q^2 + 9 = 0, q \neq 0$

$40q^2 - 49q + 9 = 0$

$D = 2401 - 1440 = 961 = (31)^2$

$q_1 = \frac{49 - 31}{40} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$

$q_2 = \frac{49 + 31}{40} = \frac{80}{40} = 2$

(С₂) $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{3000}$

$S_b = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$

$b_2 = b_1q, b_3 = b_1q^2, \dots$

$\frac{b_1q^3}{b_1q} = q^2 = q_1$

3 6 9 12

$\frac{3000}{3} = 1000$

$q < 0?$

$40 \cdot 4 \cdot 9 = 160 \cdot 9 = 1440$

$160 \cdot 9 = 1440$

$2401 - 1440 = 961$

31

31

961

$$\left(\frac{x+6}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{x^3-4x+80} = x^2+10x+24 \quad | \quad x^2-4x+4+x^3-x^2+80 \rightarrow$$

$$f(x) = \left(\frac{x+6}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{x^3-4x+80} = (x+2)^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^3-4x+80} + \frac{(3x^2-4)(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2})}{2\sqrt{x^3-4x+80}} \rightarrow x^3-x^2+80=0$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (x^3-4x+80) + (3x^2-4)(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2})$$

$$x^3-4x+80=0$$

$$2\sqrt{x^3-4x+80}$$

$$x(x^2-4)+80=0$$

$$1 \quad 0 \quad -4$$

$$80 \quad -5 \quad 1 \quad -4 \quad 20$$

$$x(x-2)(x+2)+80=0 \rightarrow 1 \quad 1 \quad -1 \quad -3$$

$$\begin{array}{r} 136 \\ 6 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad -3$$

$$2 \quad 1 \quad 2 \quad 0$$

$$-2 \quad 1 \quad -2 \quad 0$$

$$4 \quad 1 \quad 4 \quad 12$$

$$-4 \quad 1 \quad -4 \quad 12$$

$$5 \quad 1 \quad 5 \quad 21$$

$$-5 \quad 1 \quad -5 \quad 21$$

$$216+24=$$

$$240$$

$$240-80=160$$

$$-6^3+24+80=$$

$$= -216+24+80 < 0$$

$$x \neq -6 \Rightarrow (x+6) \neq 0$$

$$\frac{(x+6)}{\sqrt{2}} \sqrt{x^3-4x+80} = (x+6)(x+4)$$

$$-1-\sqrt{13} \geq -4$$

$$\frac{\sqrt{x^3-4x+80}}{\sqrt{2}} = x+4$$

$$x\sqrt{2}+4\sqrt{2} \geq 0$$

$$3-\sqrt{13} \geq 0 \rightarrow \text{нет}$$

$$\frac{x\sqrt{2} \geq -4\sqrt{2}}{x \geq -4}$$

$$3+\sqrt{13}$$

$$\sqrt{x^3-4x+80} = x\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$$

$$x \geq -4$$

$$-1-\sqrt{13} + 4 =$$

$$= -5-\sqrt{13} \quad 3-\sqrt{13}$$

$$\begin{cases} x^3-4x+80 = 2x^2+2 \cdot x\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} + 16 \cdot 2 \\ x \geq -4 \end{cases}$$

$$x^3-4x+80-2x^2-16x-32=0$$

$$x^3-2x^2-20x+48=0$$

$$\frac{48}{3} = \frac{30+18}{3} = 10+6=16$$

$$1 \quad -2 \quad -20 \quad 48 \quad 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} -1 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} -13 \\ -20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} -20 \\ -13 \end{array} \quad \begin{array}{r} -51 \\ -12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2 \\ -3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} -4 \\ -5 \end{array} \quad \begin{array}{r} -12 \\ -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} -12 \\ -12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ 0 \end{array}$$

$$(x-4)(x^2+2x-12)=0$$

$$x_1 = 4; x_2 = -1+2\sqrt{3}$$

$$x_3 = -1-\sqrt{3}$$

$$x_1 = 4$$

$$\text{Ответ: } 4; -1-\sqrt{13}; -1+\sqrt{13}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

$$700 = 7 \cdot 100 = 7 \cdot 25 \cdot 4 = 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\frac{1}{7} \frac{1}{5} \frac{1}{5} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{1} \quad 8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \quad 8! = 40320$$

$$= 8! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3! = 40320 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 = 967680$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$60 + 24 = 84$$

$$1680$$

$$1680 + 840 = 2520$$

№2.

$$(b_n) = b_1, b_2, b_3, \dots, b_{3000}$$

$$b_2 = b_1 q, b_3 = b_1 q^2$$

$$S_{3000} = b_1 + q + q^2 + \dots + q^{2999} = S$$

$$(a_n) = b_1, b_2, 50b_3, b_4, b_5, 50b_6, \dots, 50b_{3000}$$

$$S_{3000} = b_1 + q + 50q^2 + q^3 + q^4 + 50q^5 + \dots + 50q^{2999} =$$

$$= b_1 + q + q^3 + q^4 + \dots + q^{2338} + 50(q^2 + q^5 + q^8 + \dots + q^{2999})$$

$$b_1(x+y) = S$$

$$b_1(x+50y) = 10S$$

$$\frac{x+y}{x+50y} = \frac{1}{10}$$

$$x+50y = 10x+10y$$

$$9x = 40y$$

$$S_{3000} = b_1(1 + q^2 + q^5 + \dots + q^{2999}) + 2(q + q^3 + q^4 + \dots + q^{2338})$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{aligned}
 & 9(1 + q^3 + q^6 + q^9 + \dots + q^{2988}) = 40(q^2 + q^5 + q^8 + \dots + q^{2983}) \\
 & 6(1 + q^4 + q^8 + q^{12} + \dots + q^{2988}) + 2(q + q^3 + q^5 + \dots + q^{2983}) \\
 & 9(1 + q^4 + q^8 + q^{12} + q^{16} + q^{20} + q^{24} + \dots + q^{2988}) + \\
 & + 9(q + q^3 + q^5 + q^7 + q^{11} + q^{13} + q^{15} + \dots + q^{2983}) = 40(q^2 + q^8 + q^{14} + q^{20} + q^{26} + \dots + q^{2986}) + \\
 & + 40(q^5 + q^{11} + q^{17} + q^{23} + q^{29} + \dots + q^{2989})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 40(q^2 + q^8 + q^{14} + \dots + q^{2986}) - 9(1 + q^4 + q^8 + q^{12} + \dots + q^{2988}) = 9(q + q^3 + q^5 + \dots + q^{2983}) - \\
 & - 40(q^5 + q^{11} + q^{17} + \dots + q^{2989})
 \end{aligned}$$

$$40W - 9X = 9Y - 40Z$$

$$S_2 + S = \frac{61q(q^{3000}-1)}{q^2-1} + \frac{61(q^{3000}-1)}{q-1}$$

$$\frac{61(q^{3000}-1)}{(q-1)}$$

$$= \frac{61q(q^{3000}-1)(q-1)}{(q^2-1)(q^{3000}-1)} + 1 = \frac{q}{q+1} + 1 = \frac{q+q}{20(23)} + 1 =$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{q}{q+1} + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \\
 & = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = \frac{81}{580} + 1 = \\
 & = \frac{81+580}{580} = \frac{661}{580}
 \end{aligned}$$

нз.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+8)(x+4)$$

$$D_1 = 25 - 24 = 1$$

$$x_1 = \frac{-5 \pm 1}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-5 \pm 1}{2} = -4$$

$$x^3 - 4x + 80 = 0$$

$$1 \quad 0 \quad -4 \quad 80 = 0$$

$$1 \quad 1 \quad -3$$

$$4 \quad 4 \quad 12$$

$$-4 \quad 1 \quad -4 \quad 12$$

$$-8 \quad 1 \quad -8 \quad 0$$

$$-5 \quad 1 \quad -5 \quad 21$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{3 \quad 5}{5 \quad 8} = \frac{3+5}{8} = \frac{8}{8} \\
 & \frac{23}{8} + 1 = \frac{31}{8} = \frac{11}{8}
 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Разложить число 700

1) $700 = 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{1}$ ^{восьмизначное вводит}

2) $700 = 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4$ ^{1) ⇒ в число могут входить либо одна цифра, либо две цифры (записанные в виде произведения), т.к. она не является произведением. Считаем, две пятёрки, две двойки, 377 единицы.}

Посчитаем кол-во способов: $8!$

$1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3!$ т.к. число 8-значное ⇒

⇒ на первую позицию 8, на вторую — 7 и т.д. ⇒ $8!$, т.к.

число 7 повторяется 1 раз ⇒ делим на $1!$,

число 5 повторяется 2 раза ⇒ делим на $2!$

число 2 повторяется 2 раза ⇒ делим на $2!$

число 1 повторяется 3 раза ⇒ делим на $3!$, т.к.

мы не считаем повторяющиеся способы ⇒

⇒ кол-во 1 способа равно $k_1 = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} =$

$= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 56 \cdot 10 \cdot 3 = 168 \cdot 10 = 1680$ способов.

2) ⇒ в число вводит одна 7, две 5, одна 4, и три 1 ⇒

⇒ кол-во 2 способа равно $k_2 = \frac{8!}{1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$

$= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 28 \cdot 30 = 840$ ⇒

⇒ всего способов $k = k_1 + k_2 = 1680 + 840 = 2520$

Ответ: 2520

12.

Пусть (b_n) - арифм. прогрессия

$$(b_n) = b_1, b_2, b_3, \dots, b_{3000}$$

Пусть знаменатель этой прогрессии q ~~равен 3~~.

Сумма членов этой прогрессии равна $S = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$

Пусть (c_n) - ариф. прогрессия, такая что:

$$(c_n) = 49b_3, 49b_6, \dots, 49b_{3000}$$

Знаменатель $q_c = \frac{49b_6}{49b_3} = \frac{b_1 q^5}{b_1 q^2} = q^3$ и, всего членов в (c_n) 1000

$\Rightarrow$ сумма членов (c_n) равна $S_c = \frac{49b_3(q^{1000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{49b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$

Если сложить суммы (b_n) и (c_n) то как раз получится прогрессия (b_n) , но с увеличенными в 50 раз членами, номер которого кратен 3. $S = S_c = 10S$ (по усл. сумма уб.)

$$\frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} + \frac{49b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{10b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} \quad \text{в 10 раз}$$

Т.к. (b_n) - ариф. прогрессия $\Rightarrow b_1 \neq 0$
 $\frac{1}{q-1} + \frac{49q^2}{q^3-1} = \frac{10}{q-1}$
 $q \neq 0 \Rightarrow$ можно делить на $b_1, q^{3000} - 1$
 $q \neq 1$

$$\frac{49q^2}{q^3-1} = \frac{9}{q-1}$$

$$49q^3 - 49q^2 = 9q^3 - 9$$

$$40q^3 - 49q^2 + 9 = 0$$

По теор. Безу возможные корни: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$

По св. Горнера:

	40	-49	0	9	= 0
1	40	-9	-9	0	$\Rightarrow q_1 = -1$

$$(q-1)(40q^2 - 9q - 9) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} q-1 \neq 0 \\ 40q^2 - 3q - 3 = 0 \end{cases}$$

$$(1) D = 81 + 1440 = 1521 = (39)^2$$

$$q_1 = \frac{3-39}{80} = -\frac{36}{80} = -\frac{9}{20}, \text{ не подр., т.к. все члены положительны}$$

$$q_2 = \frac{3+39}{80} = \frac{42}{80} = \frac{21}{40} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$q=1 - \text{не подр. т.к. } q \neq 1 \Rightarrow q = \frac{3}{5}$$

Пусть (a_n) — геом. прогрессия, тогда:

$$(a_n) = a, 2a, 4a, \dots, 2^{1500}a$$

$$(a_n) = a, a_2, a_4, \dots, a_{3000} \text{ (все } a_n \text{ — четные } n \text{ — четное)} \Rightarrow$$

$$= q a \text{ (знаменатель)} = \frac{a_2}{a} = q^2, \text{ всего членов } 1500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Сумма её членов равна } S_a = \frac{a_1(q^{1500}-1)}{q^2-1} = \frac{a_1(q^{3000}-1)}{q^2-1}$$

$S + S_a$ — это сумма, для которой

$y(a_n)$ увеличился в 2 р. каждый четный член

$$\Rightarrow \text{Необходимо найти } \frac{S+S_a}{S} = 1 + \frac{S_a}{S} = 1 + \frac{a_1 q (q^{3000}-1)(q-1)}{(q^2-1) a_1 (q^{3000}-1)} =$$

$$= \frac{q(q-1)}{(q-1)(q+1)} + 1 = \frac{q}{q+1} + 1, \text{ т.к. } q = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{3}{5+3} + 1 =$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3}{5}}{\frac{8}{5}} + 1 = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 8} + 1 = \frac{3+8}{8} = \frac{11}{8} \Rightarrow \text{Увеличится в } \frac{11}{8} \text{ (увеличит-}$$

ся)

Ответ: Увеличится в $\frac{11}{8}$ раз

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24 \quad \times 3.$$

Для того, чтобы выражение существовало необходимо:

$$x^3 - 4x + 80 \geq 0$$

$$\left(\frac{x+6}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$x^2 + 10x + 24 = (x+6)(x+4)$$

$$\frac{(x+6)}{\sqrt{2}}\sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

Проверим $x = -6$

$$(-6)^3 - 4 \cdot (-6) + 80 = -216 - 24 + 80 = -160 \Rightarrow x = -6 \text{ корни быть}$$

не может $\Rightarrow x \neq -6 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ можно разделить выражение на $(x+6)$

$$\frac{\sqrt{x^3 - 4x + 80}}{\sqrt{2}} = x + 4$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = 2x^2 + 16x + 32$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0 \quad (1) \\ x \geq -4 \end{cases}$$

Для (1) по Везу возможные корни: $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 3 \pm 12 \text{ и } \pm 48; \pm 24; \pm 16.$

По св. Горнера:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & -2 & -20 & 48 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 4 & 1 & 2 & -12 & 0 & \Rightarrow x_1 = 4 \end{array}$$

$$(x-4)(x^2 + 2x - 12) = 0$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ x^2 + 2x - 12 = 0 \quad (2) \end{cases} \quad (2) D_1 = 1 + 12 = 13$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \\ x = 4 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad \text{Проверим, чтобы } x \geq -4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \sqrt{13} - 1 \end{cases} \quad \text{Ответ: } 4; \sqrt{13} - 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2) + 4 \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2) + 4 \geq 0, x \geq 0.2 \text{ (1)} \\ 2x^4 + x^2 - 4x + 3x^2(x-2) + 4 \geq 0, x \leq 0.2 \text{ (2)} \end{array} \right.$$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^2(x-2) + 4 \geq 0, x \leq 0.2 \text{ (2)}$$

$$(1) 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(2) 2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

Найдём корни $2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 = 0$

По Везуеву. корни: $\pm 1; \pm 2; \pm 4$

По сх. Горнера:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2 & 3 & -5 & -4 & 4 & = 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & -4 & 0 \Rightarrow x_1 = 1 \\ -2 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \Rightarrow x_2 = -2 \end{array}$$

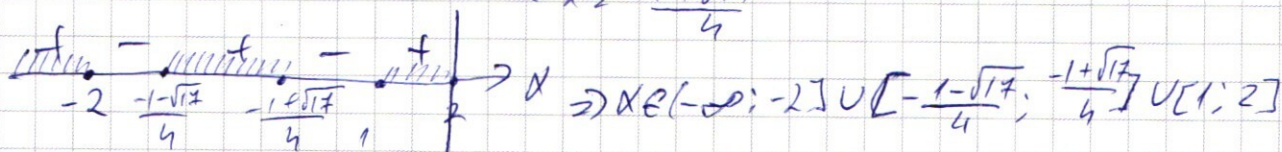
$$1 \quad 2 \quad 5 \quad 0 \quad -4 \quad 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$-2 \quad 2 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \Rightarrow x_2 = -2$$

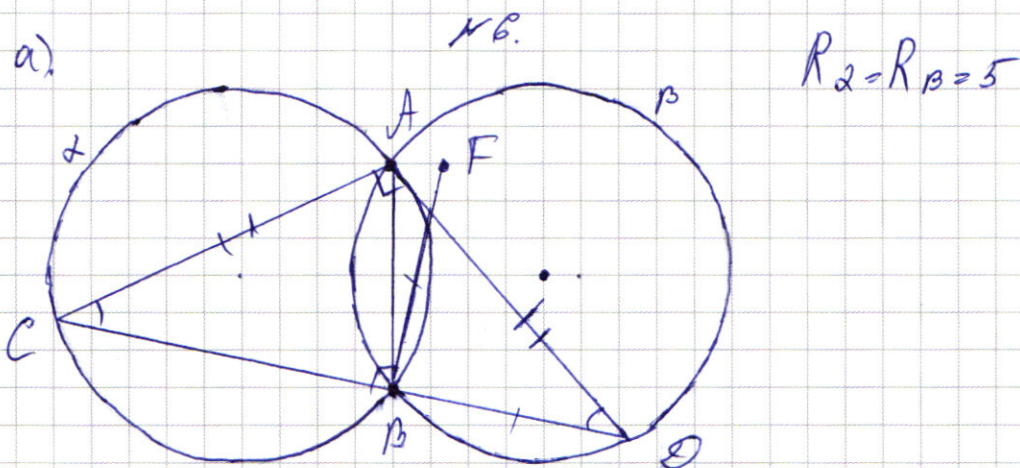
$$(x-1)(x+2)(2x^2+x-2) \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array} \right. \quad (2x^2+x-2 \geq 0) \quad (3) \quad D = 1+16=17$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{array} \right.$$



$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \right] \cup [1; 2]$$



1. Меньшая $\sphericalangle AB_1 =$ меньшей $\sphericalangle AB_2$, $R_2 = R_1 \Rightarrow \sphericalangle ACD = \sphericalangle BDC$
 $\Rightarrow \triangle ACD - \text{р/б}$

2. рассмотрим $\triangle ACB$ и $\triangle ABD$

$\sphericalangle C$ - общий

$\sphericalangle ACB = \sphericalangle BDC \Rightarrow CB = BD \Rightarrow AB$ - медиана в $\triangle BCE$
 $C \in \alpha; D \in \beta$

3. AB - мед. в $\triangle BCE \Rightarrow AB$ высота, $AB \perp CD$
 $\triangle ABC - \text{р/б}$ ~~$\triangle ABD$~~

4. В р/б прямоугольном треугольнике медиана равна половине гипотенузы $\Rightarrow AB = BD$

5. $AB = BD$

$AB \perp CD$

$FB \perp CD$

$FB = BD$

$\Rightarrow A \equiv F \Rightarrow CF = AC$

6. $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ ($AB \perp CD$) $\Rightarrow \triangle ABC$ вписанный

прямоугольный $\Rightarrow AC = CF = R_2 \cdot 2 = 10$

Ответ: 10

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

87. В $C = 6 \text{ } S_{0+CF} - ?$

S_{0+CF}

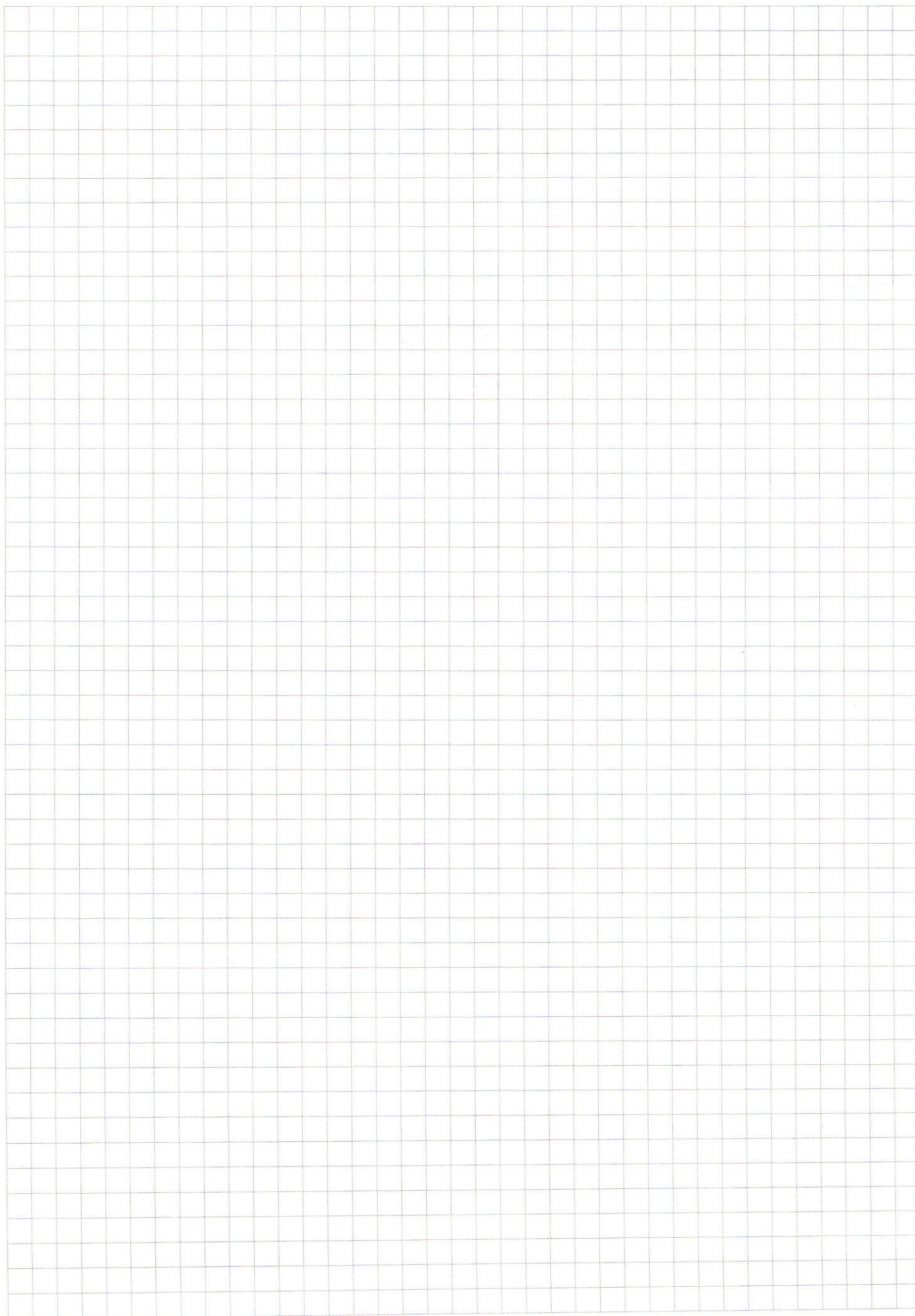
н 5.

$v_0 = 2 v_{me}$ Предположим Увеличим радиус

окр. водонерка, уш. скорость $C_{0+CF} \Rightarrow$

$\Rightarrow v_0' = 5 \text{ м, } \Rightarrow \text{Г.Л. } R_0 = 4\sqrt{2} ; R_{me} = 10\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ водонерка с тучкой встретится 5 раз.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|+6)^2 = a & (2) \end{cases}$$

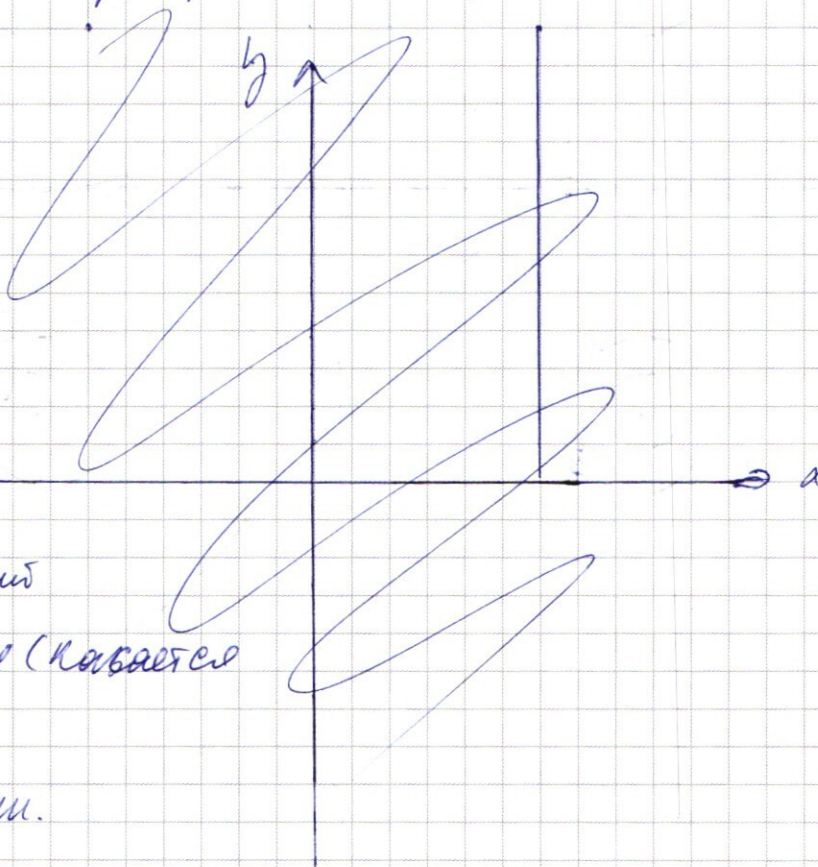
а-сумма кв. $\Rightarrow a \geq 0$

Построим график (1): График (2) выглядит как 4 окружности с радиусами $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$), с центрами в т. $(8; 6); (-8; 6); (8; -6); (-8; -6)$.

$$\begin{cases} y-x \geq 6 \\ y+x \geq 6 \\ y=12 \\ y-x \leq 6 \\ y+x \leq 6 \\ y=0 \\ y-x > 6 \\ y+x < 6 \end{cases}$$

(это квадраты со стороной 12 и центром в $(0; 6)$).

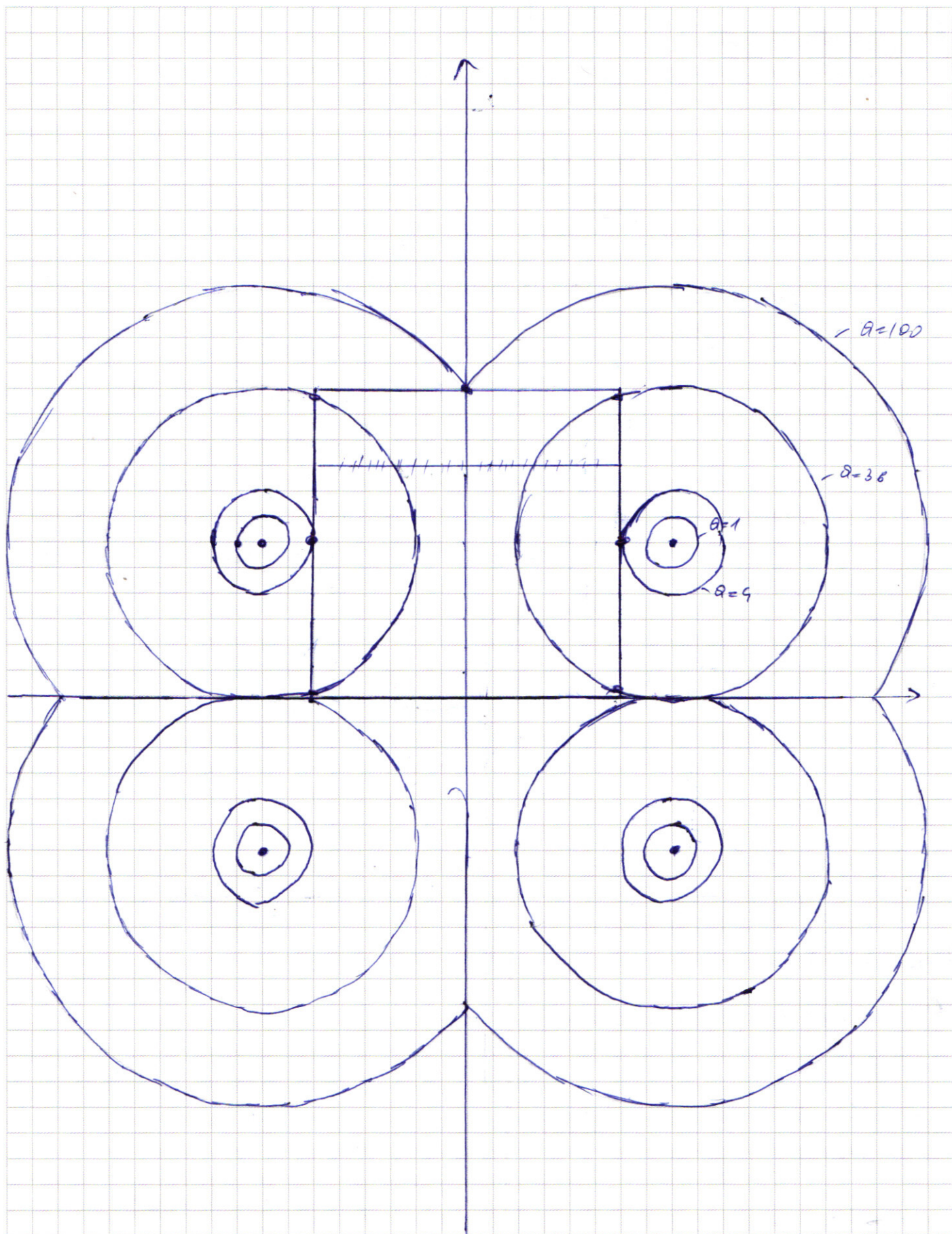
Как только окружность пересекает ось, то она остаётся только её четверть.



Рассмотрим
все возможные
 a (см. график)

- 1) $a \in (0; 4) \Rightarrow 0$ решений
- 2) $a = 4 \Rightarrow 2$ решения (касается квадрата)
- 3) $a \in (4; 100) \Rightarrow 4$ реш.
- 4) $a = 100 \Rightarrow 1$ реш.
- 5) $a \in (100; +\infty) \Rightarrow 0$ реш. $\Rightarrow 2$ решения при $a = 4$

график $\rightarrow$



Ответ: $a=4$