

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

возможные наборы цифр

$$700 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} + \frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{1 \cdot 2} \cdot \cancel{1 \cdot 2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} =$$

$$= 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 + 5 \cdot 7 \cdot 8 = 56 \cdot 35 = 1960$$

Ответ: 1960

№3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x + 6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} - (x + 4)(x + 6) = 0$$

$$x^3 - 4x + 80 \geq 0 \quad (1)$$

~~Проверим наличие корней: подставим 6~~

$$(x + 6) \left(\frac{\sqrt{x^3 - 4x + 80}}{2} - (x + 4) \right) = 0$$

$$x = -6$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2(x^2 + 8x + 16) \quad (2)$$

$$(2) \quad x^3 - 4x + 80 - 2x^2 - 16x - 32 = 0$$

$$(x - 2)(x^2 - 2x - 24) = 0 \quad (x - 4)(x^2 + 2x - 4) = 0$$

$$(x - 2)(x - 6)(x + 4) = 0 \quad D = 4 + 16 = 20$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -6 \\ x = 4 \\ x = +\sqrt{5} + 1 \\ x = -\sqrt{5} + 1 \end{cases}$$

$$x_1 = \pm\sqrt{5} + 1$$

Подставим корни в

$$x^3 - 4x + 80 \geq 0 \quad \text{и отсечем лишние}$$

Ответ: 4; $\pm\sqrt{5} + 1$

N7

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1) $\begin{cases} y \geq 6+x \\ y \geq 6-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-x-6+y-6+x=12 \\ y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 \geq 6+x \\ 12 \geq 6-x \end{cases} \Rightarrow x \in [-6; 6]$

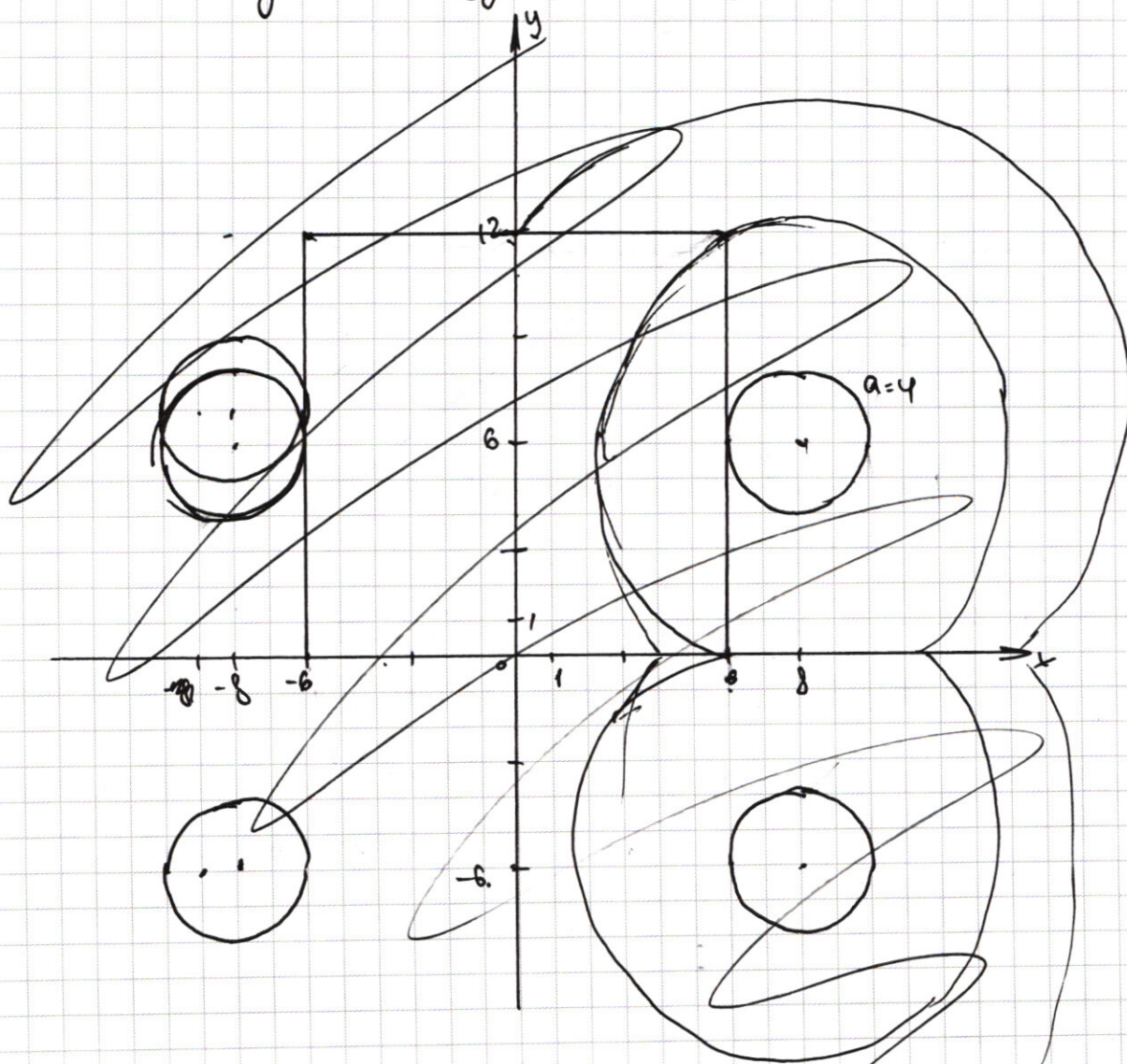
$\begin{cases} y \geq 6+x \\ y \leq 6-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-x-6-y-x+6=12 \\ x=-6 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq y \leq 12$

$\begin{cases} y \leq 6+x \\ y \geq 6-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y+x+6+y-x-6=12 \\ x=6 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq y \leq 12$

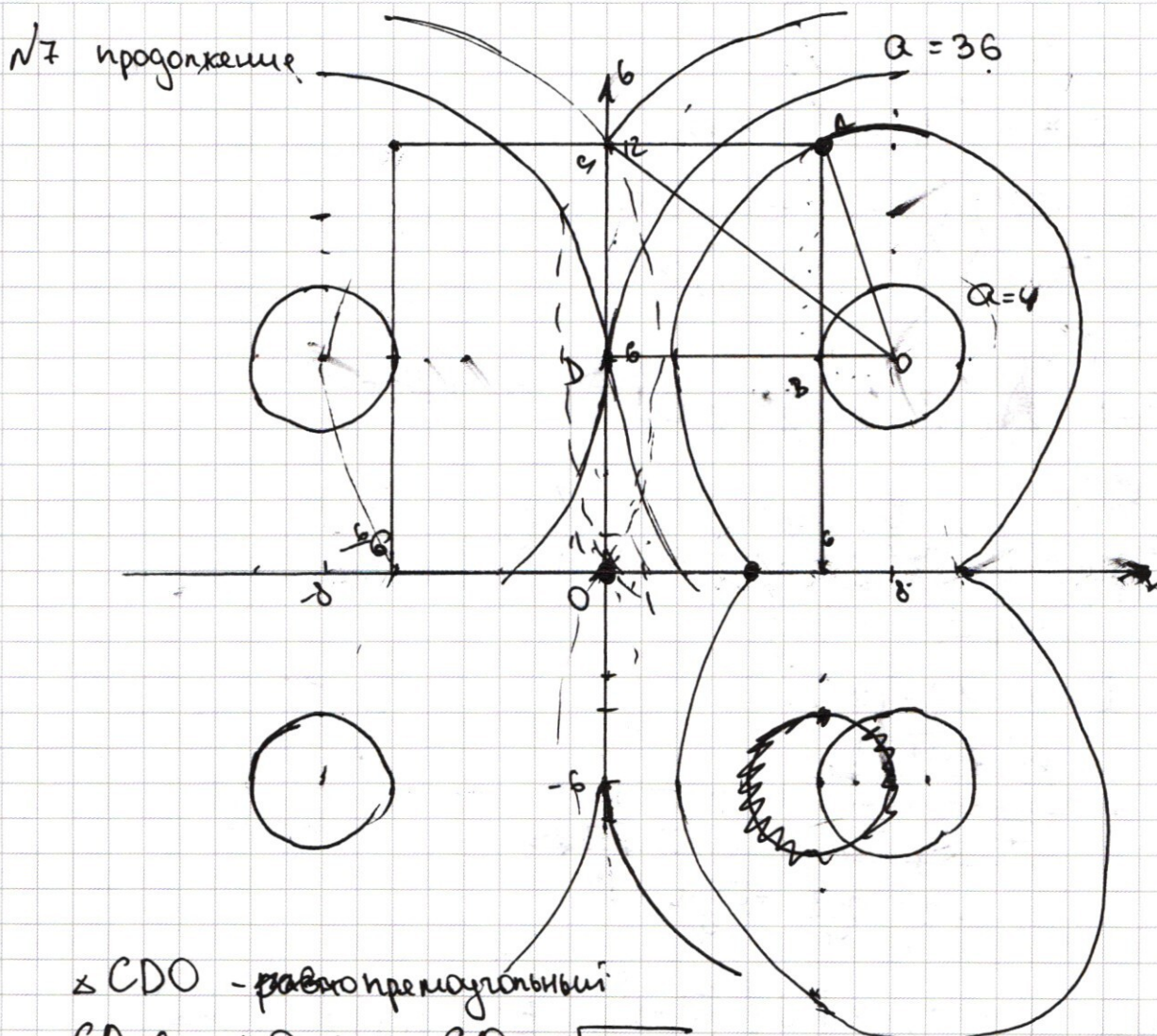
$\begin{cases} y \leq 6+x \\ y \leq 6-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y+x+6-y-x-6=12 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow -6 \leq x \leq 6$

(2) $\begin{matrix} x \geq 0 & y \geq 0 \\ x \geq 0 & y \leq 0 \\ x \leq 0 & y \geq 0 \\ x \leq 0 & y \leq 0 \end{matrix}$

$$\begin{aligned} (x-8)^2 + (y-6)^2 &= a \\ (x-8)^2 + (y+6)^2 &= a \\ (x+8)^2 + (y-6)^2 &= a \\ (x+8)^2 + (y+6)^2 &= a \end{aligned}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\triangle CDO$ - прямоугольный

$$CO = 6; DO = 8 \Rightarrow CO = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$CO = \sqrt{a} \Rightarrow a = 100$$

При $a < 4$ нет решений

При $4 < a < 10$ - 4 решения

При $a > 10$ - нет решений

При $a = 10$ - 2 решения

Ответ: $a = 4; a = 10$

При $a = 4; a = 10$ - 2 решения

$$N4 \quad 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 |x-2| + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2 |x-2| \geq 0$$

$$t = |x-2| \quad t \geq 0$$

$$2x^4 + t^2 - 3x^2 t \geq 0$$

$$D = 9x^4 - 8x^4 = x^4$$

$$(t - 2x^2)(t - x^2) \geq 0$$

$$(|x-2| - 2x^2)(|x-2| - x^2) \geq 0$$

$$(2x^2 - |x-2|)(x^2 - |x-2|) \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 2 \\ (2x^2 - x + 2)(x^2 - x + 2) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \in [2; +\infty)$$

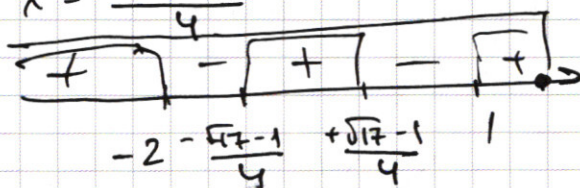
$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq 2 \\ (2x^2 - x - 2)(x^2 + x - 2) \geq 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$(1) \quad 2x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{17} - 1}{4}$$

(2)



$$\text{Ответ: } (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{\sqrt{17}+1}{4}; \frac{\sqrt{17}-1}{4} \right] \cup [1; +\infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 5.

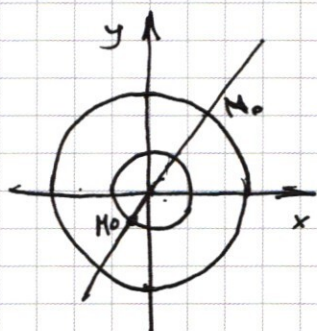
Дано:

$M_0(-2; -2\sqrt{7})$

$N_0(5; 5\sqrt{7})$

Варианты = 20 вариантов

координаты



$$1) \quad \operatorname{tg} \alpha_{начальн} = \frac{-2\sqrt{7}}{-2} = \frac{5}{5\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

(одинаковый у обоих жуков)

$$2) \quad r_M = \sqrt{4 + 4 \cdot 7} = 4\sqrt{2} \quad \left| \Rightarrow \frac{r_M}{r_N} = \frac{2}{5} \right.$$

по Теореме Пифагора $r_N = \sqrt{25 + 25 \cdot 7} = 10\sqrt{2}$

Наименьшее расстояние между ними
когда жуки в одной четверти на одной
прямой.

№ 4

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0$$

$$x \geq 2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 6x^2 + 3x^3 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

~~$$2x^4 + (x^2 - 2)^2 + 3x^2|x-2| \geq 0$$~~

~~$$2x^4 + (|x-2| + 3x^2)|x-2| \geq 0$$~~

~~$$2x^4 - 3x^3 + 3x^2$$~~

~~$$(2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 4) - (3x^3 - 3x^2 - x + 2) \geq 0$$~~

~~$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$~~

~~$$2(x^4 + 4) - 3(x - 2x + 1) - x + x^2 + 2$$~~

$$2x^4 + (x - |x-2|)^2 \leq 3x^2|x-2| \geq 0$$

$$t = |x-2|$$

$$|x-2| =$$

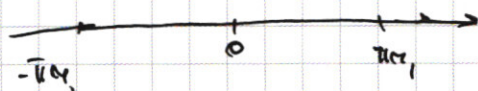
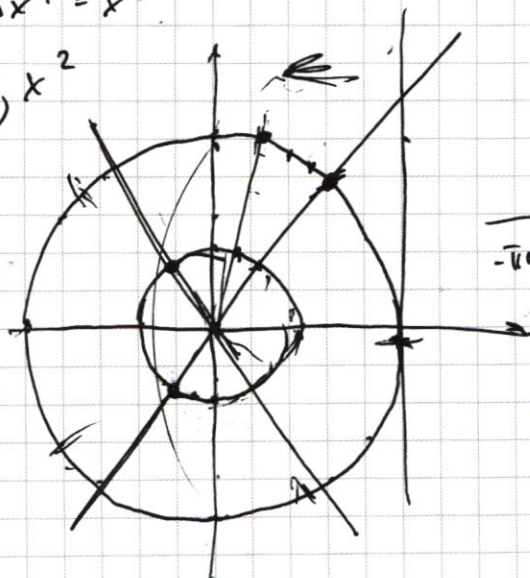
$$2x^4 + t^2 \leq 3x^2 t \geq 0$$

$$t^2 - 3x^2 t + 2x^4 \geq 0$$

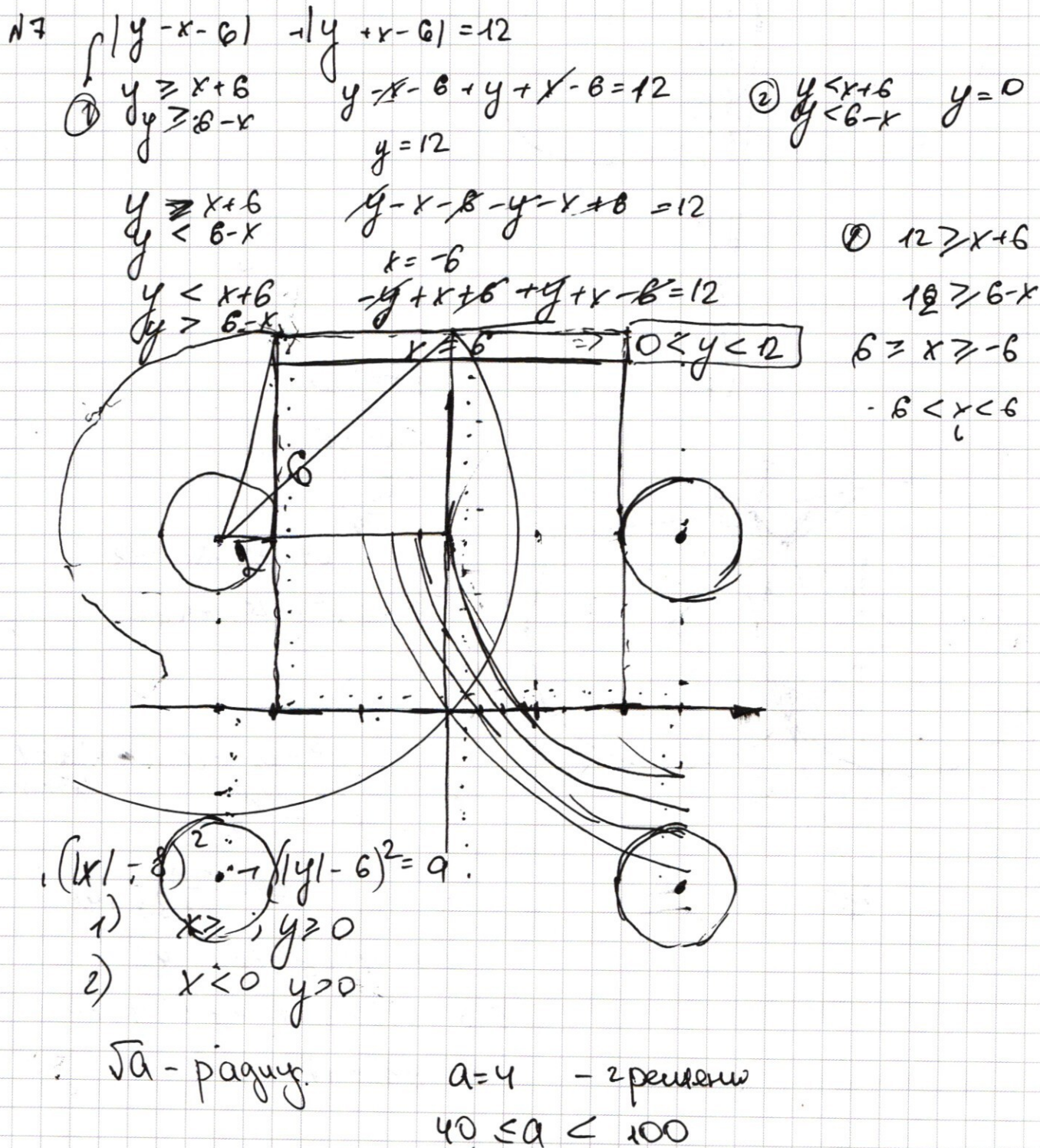
$$D = 9x^4 - 8x^4 = x^4$$

$$\frac{x^2 + 3x^2}{2} = 2x^2; x^2$$

$$(t - 2x^2) \geq 0$$

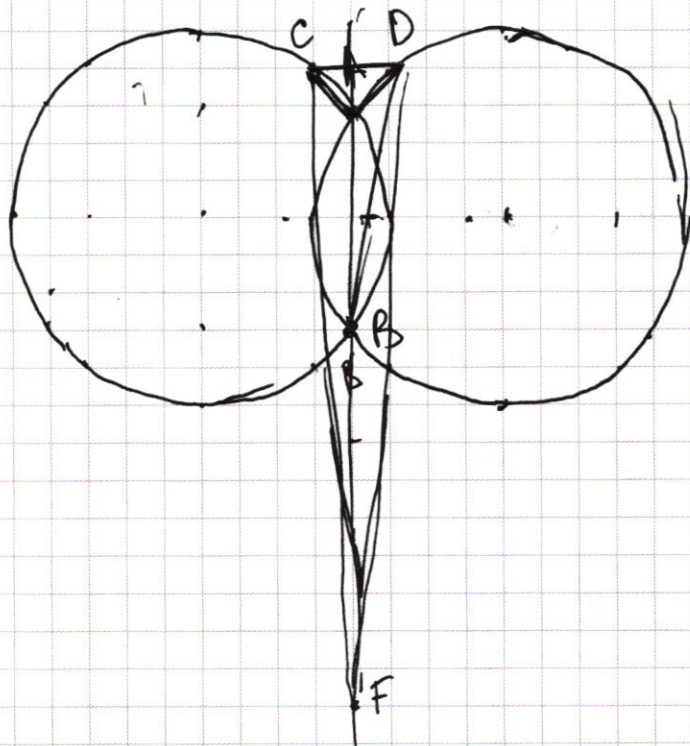


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

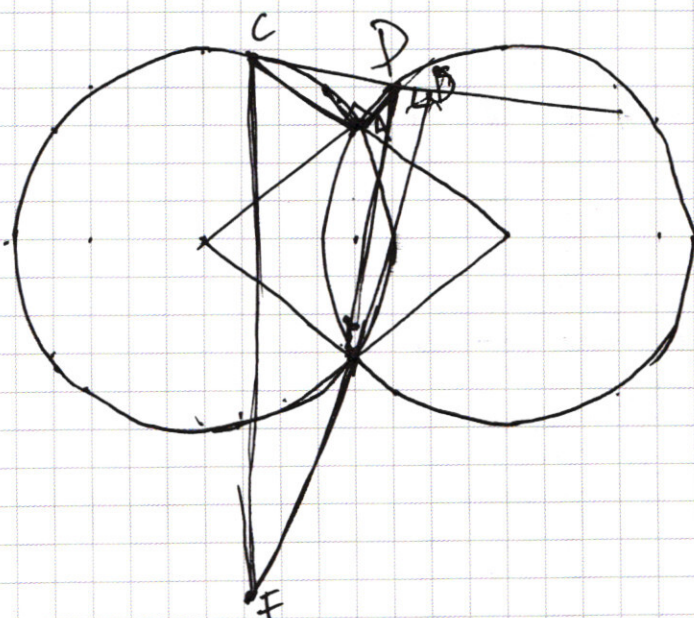


№6

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 2 + 6 + 12 + 24 \\ 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 8 \\ 45 = 3 \cdot 15 \end{array}$$



$$BF = DD$$



$$BF = BD$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$CF = ?$$

$$64 - 32 - 80 + 48$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$(x - 4)$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 \mid x - 4 \\ \underline{x^3 - 4x^2} \\ 2x^2 - 20x \\ \underline{- 2x^2 + 8x} \\ -12x + 48 \end{array}$$

$$(x - 4)(x^2 + 12x - 4)$$

$$-5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 15 + 1 + 4\sqrt{5} - 4 + 80$$

$$80 - 4\sqrt{5} \geq ?$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

700

10.10.7

2.5.2.5.7.1.1.1.

$$\frac{8!}{2!2!3!} =$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 56 \\ \times 35 \\ \hline 280 \\ 1960 \\ \hline 1960 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 56 \\ \times 3 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$30 \cdot 56 = 1680$$

N 2.

$$\left(\frac{x}{12} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} - (x+6)(x+4) = 0$$

$$x^3 - 4x + 80 \geq 0$$

$$(x+6) \sqrt{\frac{x^3 - 4x + 80}{2}} - x - 4 = 0$$

Подставим - 6

$$-216 + 24 + 80 < 0 \Rightarrow -6 \text{ не}$$

корень $\Rightarrow$ можем делить на $(x+6)$

$$\sqrt{\frac{x^3 - 4x + 80}{2}} = (x+4)$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2(x^2 + 8x + 16)$$

$$x^3 - 4x + 80 - 2x^2 - 16x - 32 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$(x-2)(x^2 - 2x - 24) = 0$$

$$(x-2)(x-6)(x+4) = 0$$

$$x^3 - 4x + 80 \geq 0$$

$$-64 + 16 + 80$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x=6 \\ x=-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=6 \\ x=-4 \end{cases}$$

продолжайте делить при возведении.

$$x^2 + 8x + 16$$

$$x^3 - x^2 - 12x + 64 + (x+4)^2$$

$$64 - 16 - 48 + 64 = 64 \quad x^3 = 4(x+20)$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 80 = 5 \cdot 16 = 5 \cdot 2^4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$3 \cdot 2^4$$

$$8 - 16 - 40 + 48$$

$$-56 + 56 = 0 \Rightarrow x=2$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 \\ \underline{-(x^3 - 2x^2)} \quad \quad \quad x-2 \\ -20x + 48 \\ \underline{-(-20x + 40)} \quad \quad \quad x^2 - 2x - 24 \\ -24x + 48 \end{array}$$

N4

1254567

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2) \geq 0$$

$$x \geq 2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 \geq 0$$

$$x \neq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0 \quad | : x^2$$

$$2x^2 - 3x + 7 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \geq 0$$

$$2x^2 - 3x + 7 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \geq 0$$

$$-3x^3(x+1)$$

$$x^2(2x+1)$$

<

$$x \leq 2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 + 3x^3 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^2 - 5x^2 - 4x \geq 0$$

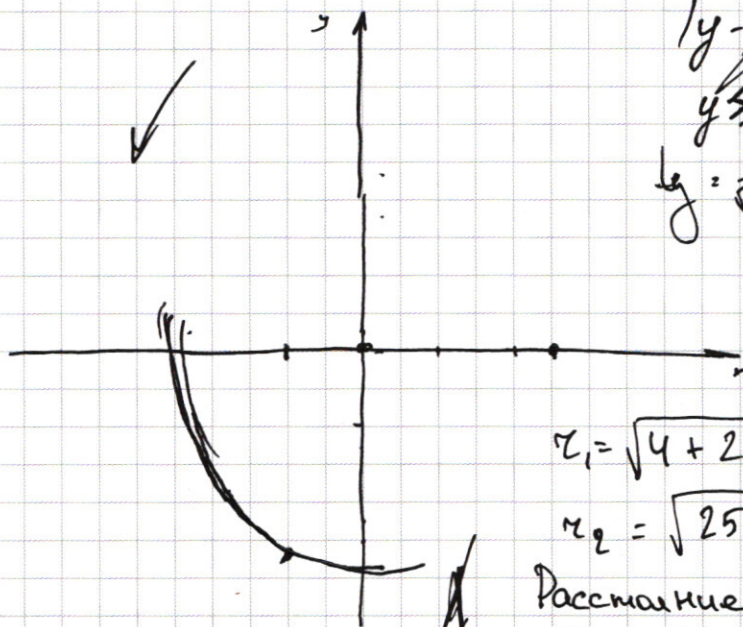
$$(-2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) \sqrt{-64 + 16 + 80} = 0$$

$$-\sqrt{2}$$

$$4\sqrt{2} \sqrt{8 - 8 + 80} = 4 + 20 + 24$$

$$4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{5}$$

N5



$$|y - 6 - 11 + 9 - 0 + 1| = 12$$

$$y \geq x + 6$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad v_2 = 2v_1$$

$$r_1 = \sqrt{4 + 28} = \sqrt{4 \cdot 8} = 4\sqrt{2}$$

$$r_2 = \sqrt{25 + 25 \cdot 7} = \sqrt{5 \cdot 8} = 10\sqrt{2}$$

Расстояние кратчайшее, когда они направлены друг другу

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{5}$$

$$l_1 = 2\pi r_1$$

$$l_2 = 2\pi r_2$$

