

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Найти: кол-во 8-знач. чисел, произвед. цифр которых равно 700.

Решение.

$abcdefgh$ - 8-знач. число

$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 700$, $a, b, \dots, h \in \mathbb{N}$ и $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b, c, \dots, h \leq 9$.

$$\begin{array}{r|l} 700 & 2 \\ 350 & 2 \\ 135 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Но нullo они не могут
быть равны, т.к. произведение
не равно 0.

Следовательно, число состоит из цифр 2, 2, 5, 5, 7, 1, 1, 1
или из цифр 4, 5, 5, 7, 1, 1, 1, 1. Других вариантов
нет, т.к. цифра не больше 9 (а $2 \cdot 5 > 9$, $2 \cdot 7 > 9$, $5 \cdot 7 > 9$).

Найдем кол-во вариантов перестановок:

1) 2, 2, 5, 5, 7, 1, 1, 1.

$$C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^1 = \frac{8!}{2 \cdot (8-2)!} \cdot \frac{6!}{2 \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{3!} = \frac{8!}{4 \cdot 3!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 30 \cdot 56 \text{ вариантов}$$

2) 4, 5, 5, 7, 1, 1, 1, 1.

$$C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^1 = \frac{8!}{4!} \cdot \frac{7!}{2 \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{4!} = \frac{8!}{2 \cdot 4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4 = 30 \cdot 28 \text{ вариантов}$$

А всего $30(56+28) = 30 \cdot 84 = 2520$ способов составить
такое число.

Ответ: 2520 восьмизначных чисел существует, произве-
дение которых равно 700.

№2.

Дано: $b_1, b_2, \dots, b_{300}$, S . Если $b_3, b_6, \dots, b_{3000} \uparrow$ в 50 раз,
то $S \uparrow$ в 10 раз.

Найти: x (Если $b_2, b_4, \dots, b_{2000}$ ↑ b_2 раза, то S ↑ в x раз).

Решение.

$$S = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q},$$

$$b_1 = b_1, b_2 = b_1 \cdot q, b_3 = b_1 \cdot q^2, \dots$$

1) Если увеличим члены прогрессии с номерами, кратными 3, то ее сумма будет равна: $S' = \frac{50b^3(1-q^3)^{\frac{n}{3}}}{1-q^3} +$

$$+ \frac{b_2(1-q^3)^{\frac{n}{3}}}{1-q^3} + \frac{b_1(1-q^3)^{\frac{n}{3}}}{1-q^3} = \frac{50b_1 \cdot q^2(1-q^n)}{1-q^3} + \frac{b_1 \cdot q(1-q^n)}{1-q^3} + \frac{b_1(1-q^n)}{1-q^3}$$

и она равна $10S$, т.е:

$$b_1 \frac{1-q^n}{1-q^3} \cdot (50q^2 + q + 1) = 10b_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Разделим на $b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q^3} \neq 0$. Получим:

$$\frac{50q^2 + q + 1}{1 + q + q^2} = 10,$$

$$50q^2 + q - 9 = 0,$$

$$D = 1 + 200 \cdot 9 = 1801$$

$$\begin{cases} q = \frac{-1 + \sqrt{1801}}{100} \\ q = \frac{-1 - \sqrt{1801}}{100} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 50q^2 + q + 1 = 10 + 10q + q^3 \\ 1 + q + q^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$49q^2 - 9q - 9 = 0, D = 81 + 49 \cdot 36 = 1845 = 9 \cdot 205$$

$$\begin{cases} q = \frac{9 + 3\sqrt{205}}{98} \\ q = \frac{9 - 3\sqrt{205}}{98} \end{cases}$$

2) Если увеличим все члены прогрессии с четными номерами, то сумма будет равна $S'' = \frac{2b_2(1-q^2)^{\frac{n}{2}}}{1-q^2} + \frac{b_1(1-q^n)}{1-q^2}$

$$S'' = x \cdot S = x \cdot \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}. \quad \text{Тогда:}$$

$$\frac{2b_1 \cdot q(1-q^n)}{1-q^2} + \frac{b_1(1-q^n)}{1-q^2} = x \cdot \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \quad \text{Разделим на } \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \neq 0.$$

$$\frac{2q+1}{1+q} = x. \quad \text{След., } x = \frac{9+3\sqrt{205}}{49} + 1 = \frac{88+3\sqrt{205}}{49} \cdot \frac{98}{9+3\sqrt{205}} = \frac{2(88+3\sqrt{205})}{9+3\sqrt{205}}.$$

т.к. x не может быть отрицательным.

$$\text{Ответ: } x = \frac{2(88+3\sqrt{205})}{9+3\sqrt{205}}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4.

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12, & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a. & (2) \end{cases}$$

Построим график функции ур. (1). Разберем все 4 случая.

1) $\begin{cases} y \geq 6+x, \\ y \leq 6-x, \\ y = 12 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y \geq 6+x, \\ y \leq 6-x, \\ x = -6 \end{cases}$

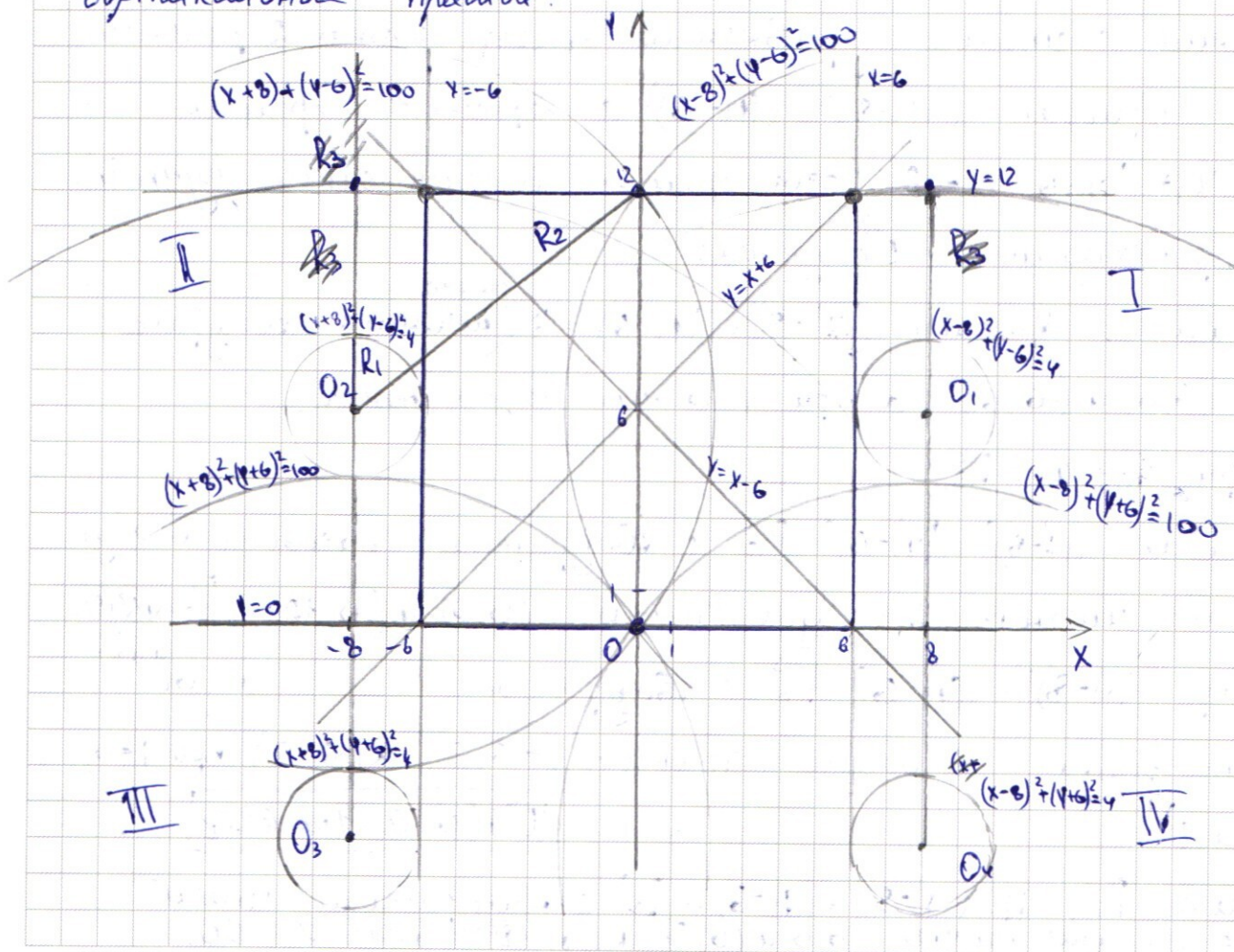
3) $\begin{cases} y < 6+x, \\ y \geq 6-x, \\ x = 6 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y < 6+x, \\ y \leq 6-x, \\ y = 0 \end{cases}$

$y = 6+x$ - мин. ф., ф. - прямая. $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & -2 \\ \hline y & 6 & 4 \end{array}$

$y = 6-x$ - мин. ф., ф. - прямая. $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline y & 6 & 4 \end{array}$

Графиками $y = 12$ и $y = 0$ являются горизонт. прямые, а $x = 6$ и $x = -6$ - вертикальные прямые.



Построим график функции ур. (2).

$$(|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a.$$

Раскроем модули.

1) I коорд. к.в.

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ (x-8)^2 + (y-6)^2 = a \end{cases}$$

Часть окр. в I к.к.
с ц. в т. (8, 6) и
радиусом $R = \sqrt{a}$

2) II к.к.

$$\begin{cases} x < 0, y \geq 0 \\ (x+8)^2 + (y-6)^2 = a \end{cases}$$

О₂ (-8; 6),
 $R = \sqrt{a}$

3) III к.к.

$$\begin{cases} x < 0, y < 0 \\ (x+8)^2 + (y+6)^2 = a \end{cases}$$

О₃ (-8; -6), $R = \sqrt{a}$

4) IV к.к.

$$\begin{cases} x < 0, y \geq 0 \\ (x+8)^2 + (y-6)^2 = a \end{cases}$$

О₄ (8; 6),
 $R = \sqrt{a}$

$$\begin{cases} x \geq 0, y < 0 \\ (x-8)^2 + (y+6)^2 = a \end{cases}$$

Исходная система уравнений имеет ровно 2 решения,
когда график $(|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a$ пересекает график
 $|y-6-x| + |y-6+x| = 12$ (этот график состоит из двух лучей).

Это происходит в 2 случаях:

1) при $a = 4$. Графики $(|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = 4$ касаются квадрата
в т. (6; 6) и (-6; 6), а при $y < 0$ нет общих точек.

2) При $R_2^2 \leq a \leq R_3^2$.

График $(|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = R_2^2$ с квадратом касаются в 2-х
точках имеют 2 общие точки - (0; 0) и (0; 12). $R_2 = \sqrt{6^2 + 8^2} =$

А гр. $(|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = R_3^2$ с квадратом

$$a = 100.$$

имеют ровно 2 общие точки - (-6; 12) и (6; 12) при $y < 0$,

а при y

Ответ: $a = 4$ или $a = 100$

2) При $a = R_2^2$. Гр. $(|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = R_2^2$ с квадратом имеют
ровно 2 общие точки - (0; 0) и (0; 12). $R_2 = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100}$, $a = 100$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24 \cdot \sqrt{2}$$

ОДЗ: $x^3 - 4x + 80 \geq 0$.

$$(x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x^2 + 10x + 24) \sqrt{2}$$

$$(x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2} (x+4)(x+6)$$

Проверим, является ли $x = -6$ корнем:

$-6^3 + 4 \cdot (-6) + 80 \not\geq 0$. След, $x = -6$ не один из корней уравнения.

Разделим на $x+6 \neq 0$.

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2} (x+4). \text{ Возведем в квадрат.}$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

Найдем один из корней с помощью подбора: $x = 4$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 & x-4 \\ -x^3 + 4x^2 & \\ \hline 2x^2 - 20x & \\ -2x^2 + 8x & \\ \hline -12x + 48 & \\ -12x + 48 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{cases} x \neq -6, \\ x = 4, \\ x^2 + 2x + 16 = 0. (1) \end{cases}$$

Решу ур. (1).

$$x^2 + 2x + 16 = 0$$

$$D_1 = 1 + 16 = 17$$

$$\begin{cases} x = -1 + \sqrt{17}, \\ x = -1 - \sqrt{17}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq -6, \\ x = 4, \\ x = -1 \pm \sqrt{17} \end{cases}$$

Проверим, попадают ли все корни в ОДЗ.

1) $x = 4$. $64 - 16 + 80 > 0$. 2) $x = -1 + \sqrt{17}$; $(-1 + \sqrt{17})^3 + 4 - 4(-1 + \sqrt{17}) + 80 =$
 $= -1 + 3\sqrt{17} - 3 \cdot 17 + 17\sqrt{17} + 4 - 4(-1 + \sqrt{17}) + 80 = 16\sqrt{17} + 32 > 0$

3) $x = -1 - \sqrt{17}$; $-(1 + \sqrt{17})^3 + 4 + 4\sqrt{17} = 32 = -1 - 3\sqrt{17} - 51 - 17\sqrt{17} + 4 + 4\sqrt{17} + 80 =$
 $= 32 - 16\sqrt{17} < 0$ - значит этот корень не подходит.

Ответ: $4, -1 + \sqrt{17}, -1 - \sqrt{17}$.

№4.

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0.$$

Рассмотрим модуль

1) $x \leq 2$.

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0;$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0.$$

1. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4$

2. Нули функции: $f(x) = 0$; $2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 = 0$.

Найдем с помощью подбора один из корней ур.: $x = 1$.

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \quad | x-1 \\ - 2x^4 - 2x^3 \\ \hline 5x^3 - 5x^2 \\ - 5x^3 - 5x^2 \\ \hline -4x + 4 \\ -4x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

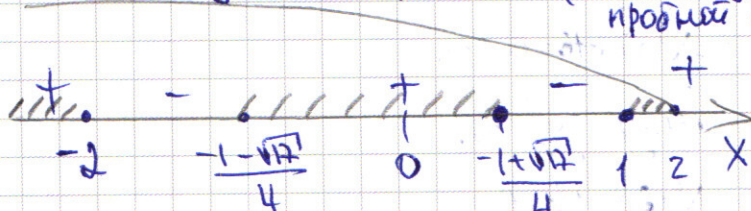
$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) = 0.$$

$x = -2$ - один из корней ур. $2x^3 + 5x^2 - 4 = 0$.

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 + 0x - 4 \quad | x+2 \\ - 2x^3 + 4x^2 \\ \hline x^2 + 0x \\ - x^2 + 2x \\ \hline -2x - 4 \\ -2x - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

3. Решу методом интервалов

(с помощью пробной точки)



Т.к. $x \leq 2$, то $x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1-\sqrt{17}}{4}; -\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; 2]$.

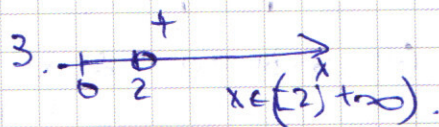
2) $x > 2$.

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0,$$

$$2x^4 + 7x^2 - 3x^3 - 4x + 4 \geq 0.$$

1. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$.

2. Н.ф.: $f(x) = 0$.
Нет нулей ф.

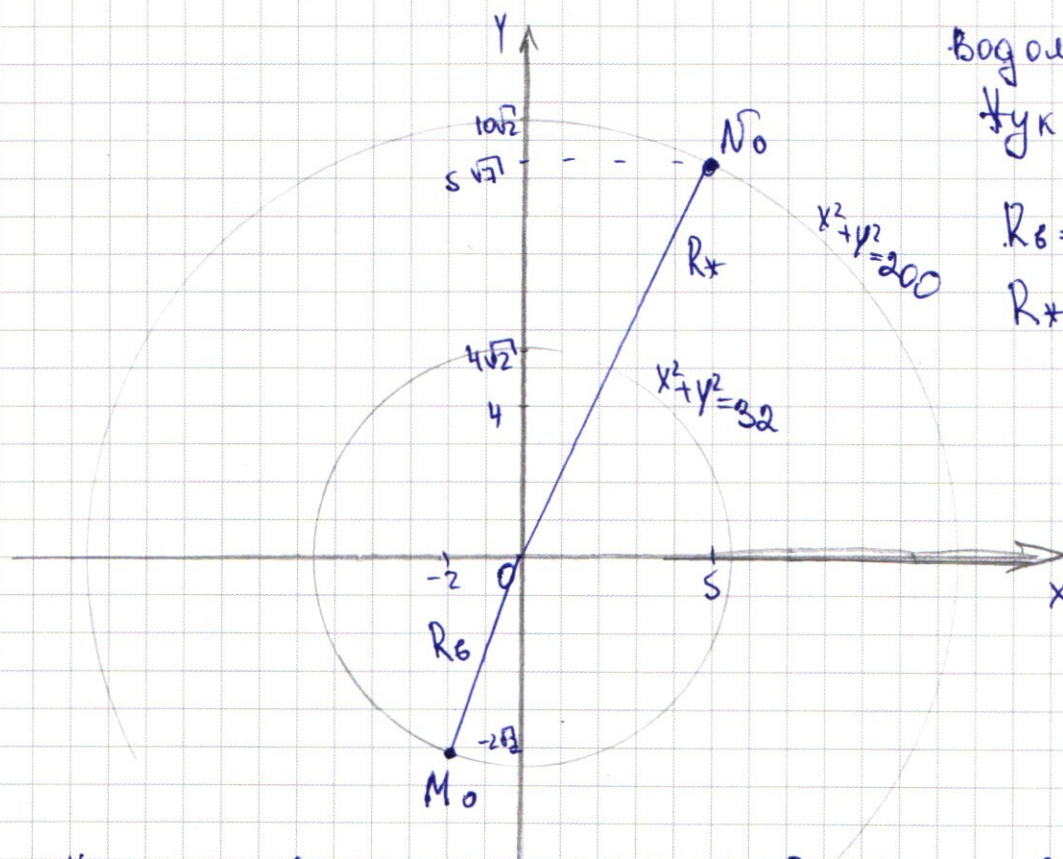


Ответ:

$$x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1-\sqrt{17}}{4}; -\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; 2] \cup (2; +\infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



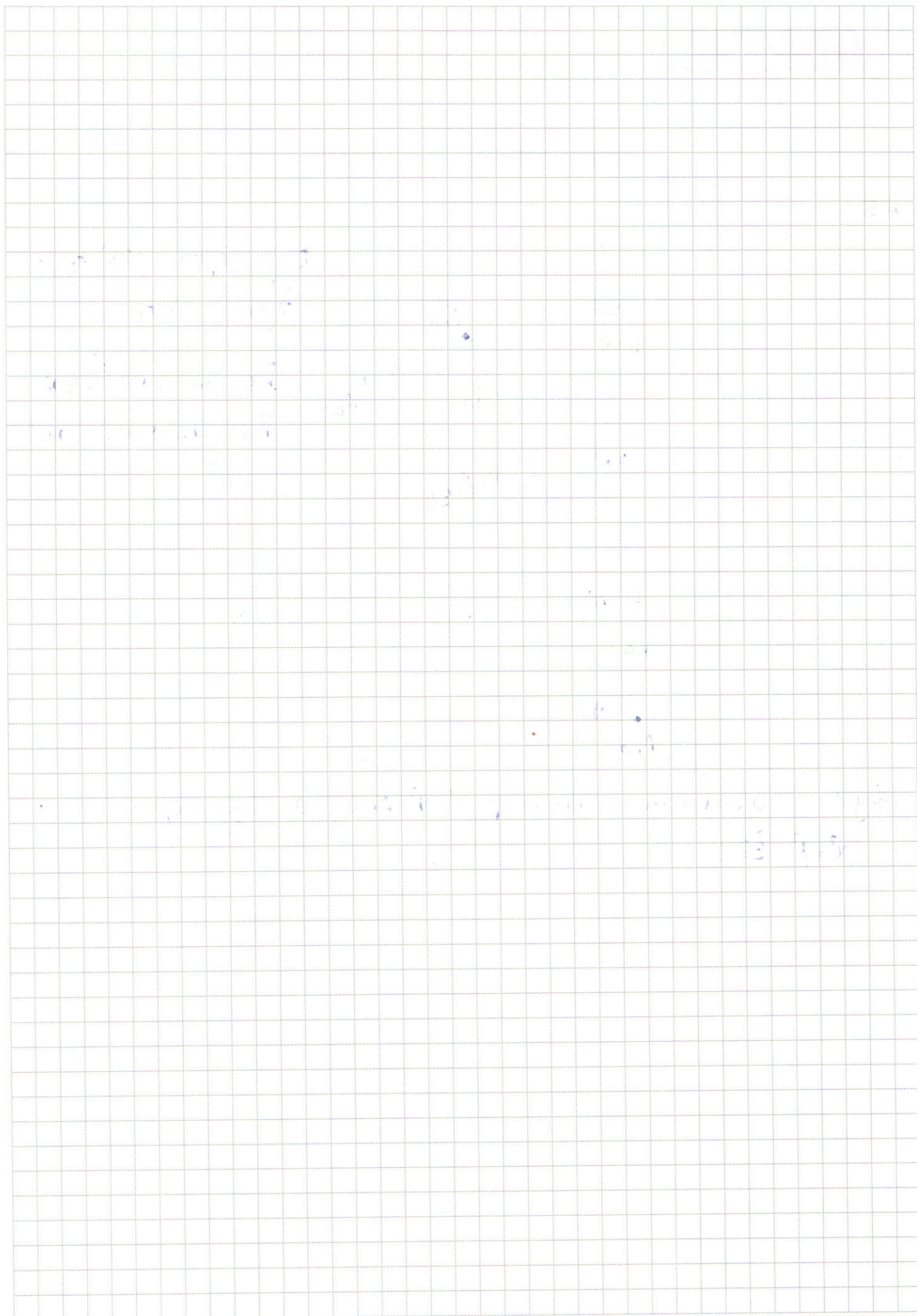
Водомерка - $(2x)$ ег./с

Жук - x ег./с

$$R_6 = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2}$$

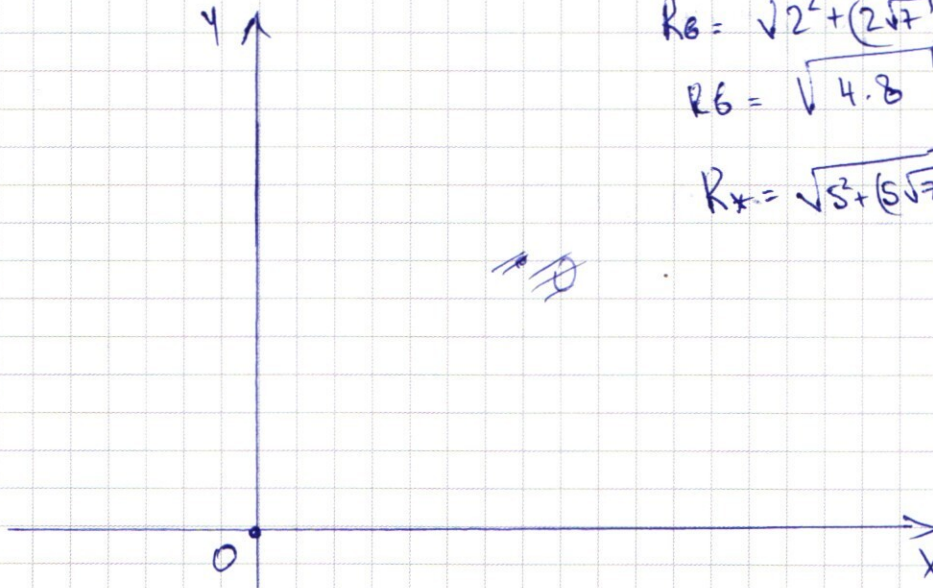
$$R_* = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{2})^2} = 10\sqrt{2}$$

Жук движется по окр. $x^2 + y^2 = 200$, а водомерка -
- $(x^2 + y^2 = 32)$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



$$R_6 = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} =$$

$$R_6 = \sqrt{4 + 8} = 4\sqrt{2}$$

$$R_7 = \sqrt{3^2 + (5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{8} = 10\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 16 \\ \hline 48 \\ 96 \\ \hline 16 \end{array}$$

Водомерка $(2x) \text{ ед./с}$
Чирок $x \text{ ед./с.}$

$$x^2 + y^2 = 200$$

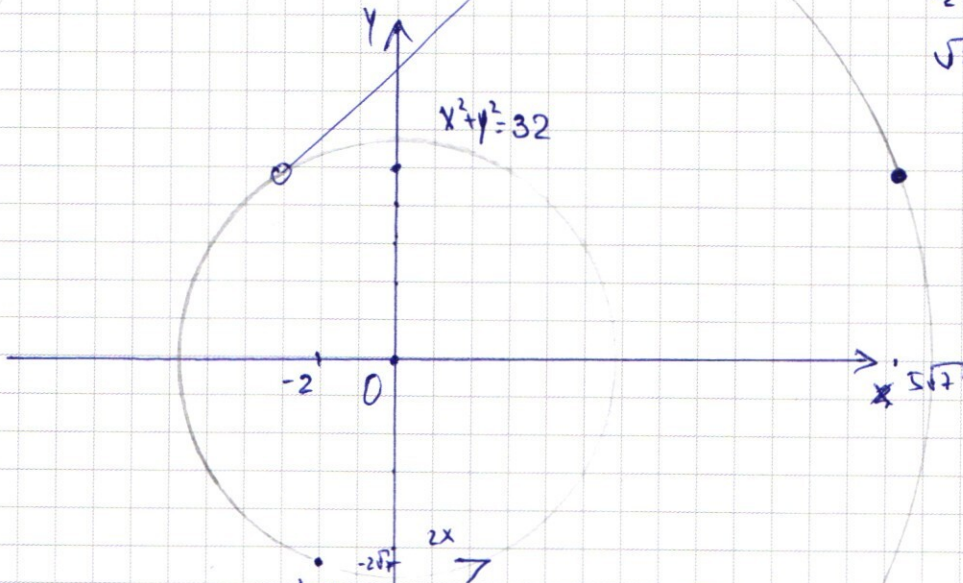
$$\sqrt{175}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 25 \\ \hline 75 \end{array}$$

$$\frac{-2\sqrt{7}}{\sqrt{28}}$$

$$\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{28}}$$

$$x^2 + y^2 = 32$$



Вод. 1 кр проходит

$$\text{за } \frac{2\pi \cdot 4\sqrt{2}}{2x} = \frac{4\pi\sqrt{2}}{x}$$

$$\text{А чирок за } \frac{2\pi \cdot 10\sqrt{2}}{x} = \frac{20\pi\sqrt{2}}{x}$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 \mid x-2 \mid +4 \geq 0.$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 + 6x^2 + 4 = 0.$$

$$2x^4 + 7x^2 - 3x^2 - 4x + 4 = 0,$$

$$2x^4 - 3x^2 + 7x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Точно не отфигу. чина

$$\Rightarrow \cdot \quad 2^4 = 32$$

$$64 - 48 + 28 - 8 + 4 = 68 + 28$$

№2

$$S = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= b_1 \\ b_2 &= b_1 \cdot q \\ b_3 &= b_1 \cdot q^2 \end{aligned}$$

Найдём сумму сч.к.

$$\frac{b_3}{b_1} = q^2$$

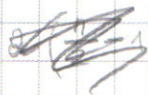
$$S_2 =$$

$$S_2 + b_1 = \frac{b_2(1-q^{2(\frac{n}{2}})}{1-q^2} + b_1 = \frac{b_2(1-q^n)}{1-q^2} + b_1$$

~~Будем~~ ~~б_3, b_6 = q^3~~

Стало

$$S_{\text{ср.3}} = \frac{50b_3(1-q^{n/2})}{1-q^2} = \frac{50b_1 \cdot q^2(1-q^{n/2})}{1-q^2} \quad S_{\text{ср.3}} = \frac{50b_1(1-q^n)}{1-q^2} - 50b_1$$



$$\begin{aligned} \frac{50(1-q^n)}{1-q^2} + \frac{q(1-q^n)}{1-q^2} - 49b_1 &= \\ &= \frac{10(1-q^n)}{1-q} \end{aligned}$$

$$\frac{50b_1q^2(1-q^{n-2})}{1-q^2} = \frac{10b_1(1-q^n)}{1-q^2} + \frac{b_1q(1-q^n)}{1-q^2} = \frac{10b_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$\frac{50q^2 - 50q + q - q^{n+1}}{1-q^2} = \frac{10(1-q^n)}{1-q}$$

$$\frac{2b_1q(1-q^n)}{1-q^2} + \frac{b_1q^2(1-q^n)}{1-q^2} = X \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$\frac{q(1-q^n)(2+q)}{1-q^2} = \frac{1-q^n}{1-q} X, \quad \frac{q(2+q)}{1+q^2} = X$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 +
Задача: кол-во 8-ми т., произвед. у 700

25 200-

$\times abcdefgh$

$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 700$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 49 \\ \times 36 \\ \hline 294 \\ + 147 \\ \hline 1764 \\ + 81 \\ \hline 1845 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ + 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 700 \\ 350 \\ 175 \\ 35 \\ 7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1845 \\ - 175 \\ \hline 95 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1845 \\ - 18 \\ \hline 205 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 175 \\ - 15 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 175 \\ - 15 \\ \hline 25 \end{array}$$

2 2 5 5 7

Варианты: 1) 2, 2, 5, 5, 7, 1, 1, 1
2) 4, 5, 5, 7, 1, 1, 1

$$C_8^2 + C_8^2 + C_8^1 + C_8^3 = 2 \frac{8!}{2 \cdot 6!} + \frac{8!}{7!} + \frac{8!}{3 \cdot 7!} =$$

$$= 7 \cdot 6 +$$

$$C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^1 = \frac{8!}{2 \cdot 6!} \cdot \frac{6!}{2 \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{3!} =$$

$$= 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 30 \cdot 56 = 168$$

$$C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^1 = \frac{8!}{7!} \cdot \frac{7!}{2 \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4 = 30 \cdot 28$$

$$30(56 + 28) = 30 \cdot 84 = 2520$$

Ответ: 2520.

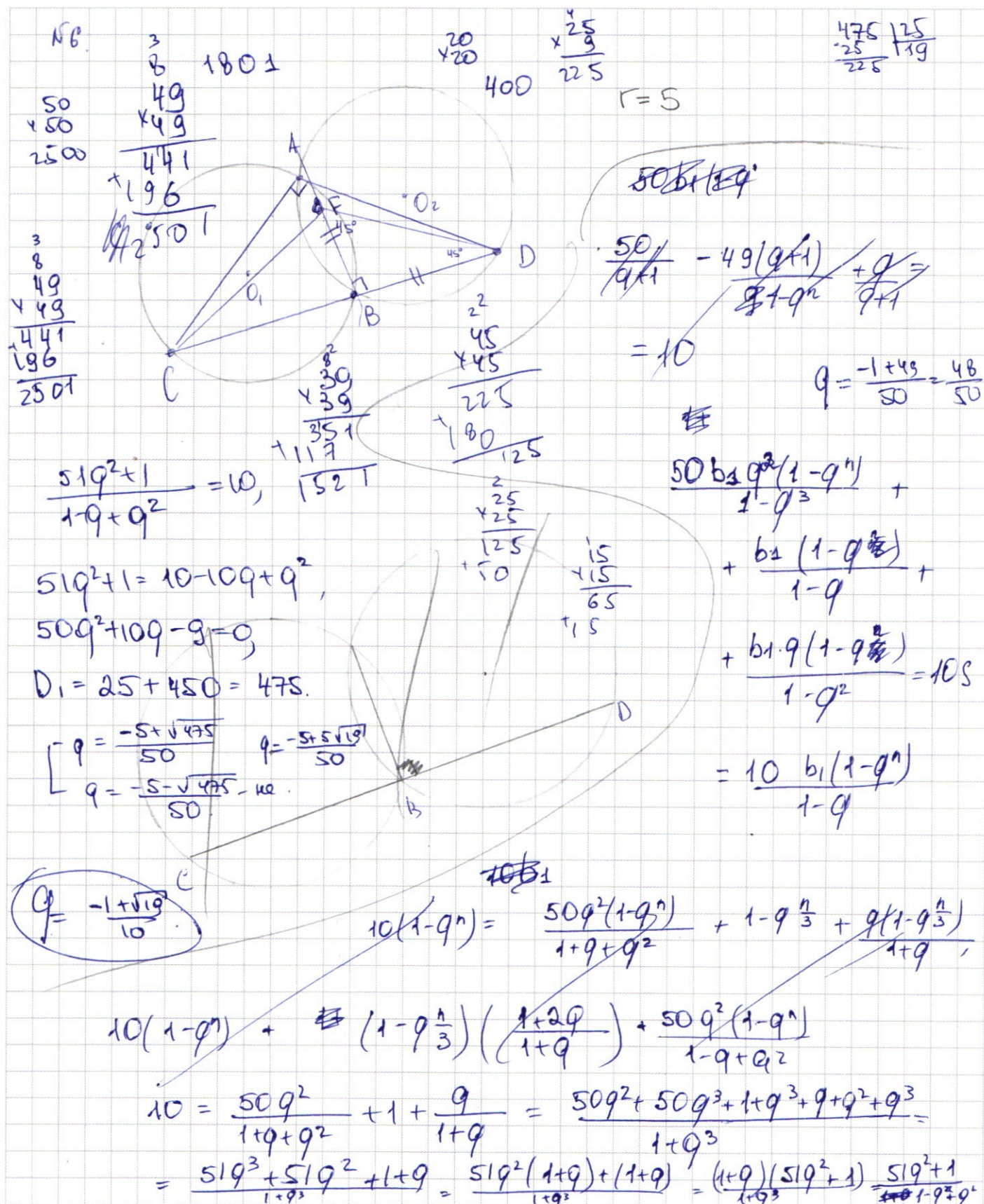
$$\begin{array}{r} 4! \\ 3! \\ \hline 56 \\ \times 3 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111 \cdot 111 \\ 1 \cdot 11 \\ 1 \cdot 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4! \\ 3! \\ \hline 56 \\ \times 3 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 84 \\ + 3 \\ \hline 252 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

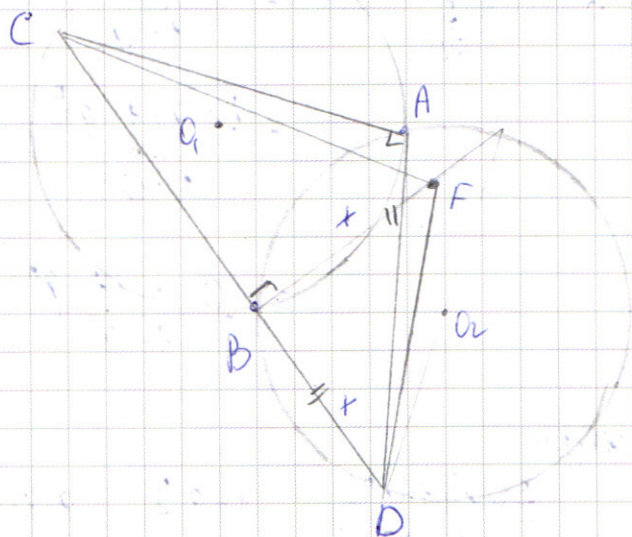




▷ LBD,
LD-диаметр

$$FC = 10$$

20000 - 3000



13

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$x^2 + 10x + 24 = 0$$

$$\begin{cases} x = -6 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$\sqrt{2}(x+6)(x+4)$$

$$003: x^3 - 4x + 80 \geq 0$$

$$(x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2} (x^2 + 10x + 24)$$

Возведем все в кв.

$$(x^2 + 12x + 36)(x^3 - 4x + 80) = 2(x^2 + 10x + 24)(x^2 + 10x + 24)$$

$$\begin{aligned} x^5 - 4x^3 + 80x^2 + 12x^4 - 48x^2 + 960x + 36x^3 - 144x + 2880 = \\ = 2x^4 + 20x^3 + 48x^2 + 20x^3 + 200x^2 + 480x + 48x^2 + 480x + 1152 \end{aligned}$$

$$x^5 + 12x^4 + 32x^3 + 32x^2 + 316x + 2880 =$$

$$= 2x^4 + 40x^3 + 296x^2 + 960x + 1152,$$

$$x^5 + 10x^4 - 8x^3 - 264x^2 - 144x + 1728 = 0$$

$$32 + 160 - 64 + 264 \cdot 4 - 144 \cdot 2$$

$$x^3 - 4x + 80 = 0,$$

$$\times 264$$

$$\begin{aligned} -512 + \\ -128 + 2880 \\ -1024 \end{aligned}$$

$$(x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2} (x+6)(x+4)$$

подставим $x = -6$. под кор.

$$-6^3 + 24 + 80 < 0 \text{ не подх.}$$

Разделим на $(x+6)$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \\ 48 \\ \times 24 \\ \hline 192 \\ + 96 \\ \hline 12152 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 48 \\ \times 12 \\ \hline 18 \\ 96 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 36 \\ \hline 8 \\ 288 \\ - 960 \\ 144 \\ \hline 816 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 296 \\ - 32 \\ \hline 264 \\ 960 \\ - 816 \\ \hline 144 \\ 2880 \\ - 1152 \\ \hline 1728 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 4 \\ \hline 64 \\ 12 \\ 24 \\ 38 \\ 416 \\ 332 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 64 \\ \times 8 \\ \hline 512 \\ 2 \\ 16 \\ \times 1 \\ \hline 4 \\ 253 \\ \times 36 \\ \hline 6 \\ 216 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12, & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a. & (2) \end{cases}$$

Построим график ур. (1)

$$|y-6-x| + |y-6+x| = 12.$$

Всего есть 4 случая.

$$\begin{matrix} -x+6 & x+6 & y \\ \swarrow & \searrow & \rightarrow \end{matrix}$$

$$-x+6 \quad x+6$$

$$1) \begin{cases} y \geq 6+x \\ y \geq 6-x \\ 2y-12=12, y=12. \end{cases}$$

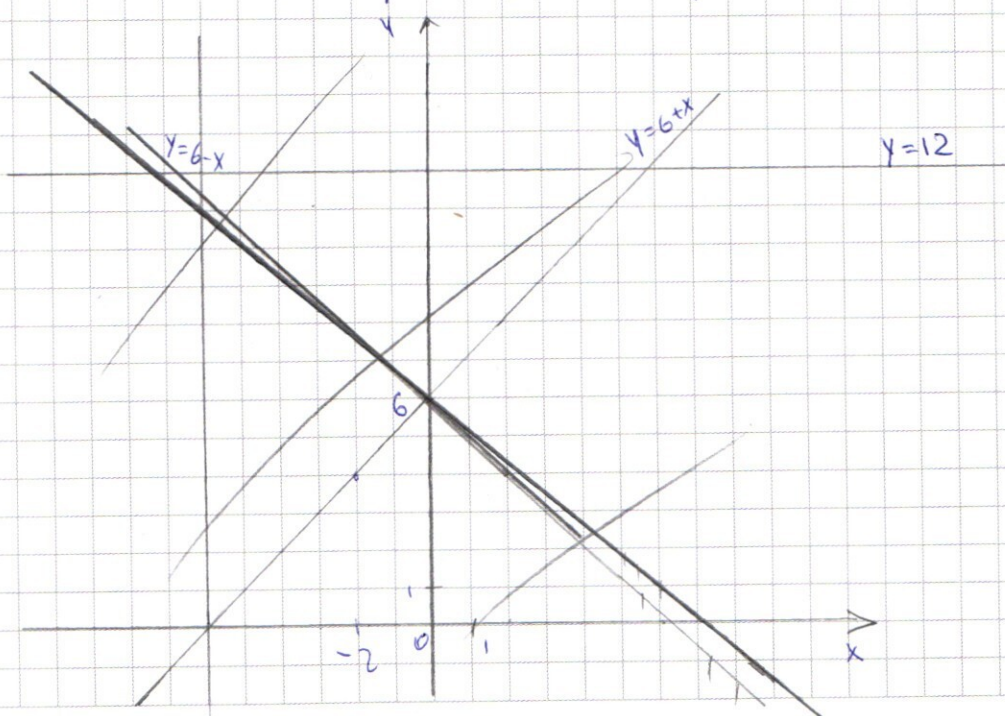
$$2) \begin{cases} y \geq 6+x \\ y \leq 6-x \\ (y-6-x-y+6-x=12), x=-6 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y < 6+x, \\ y \geq 6-x \\ (-y+6+x+y-6+x=12) \\ x=6 \end{cases}$$

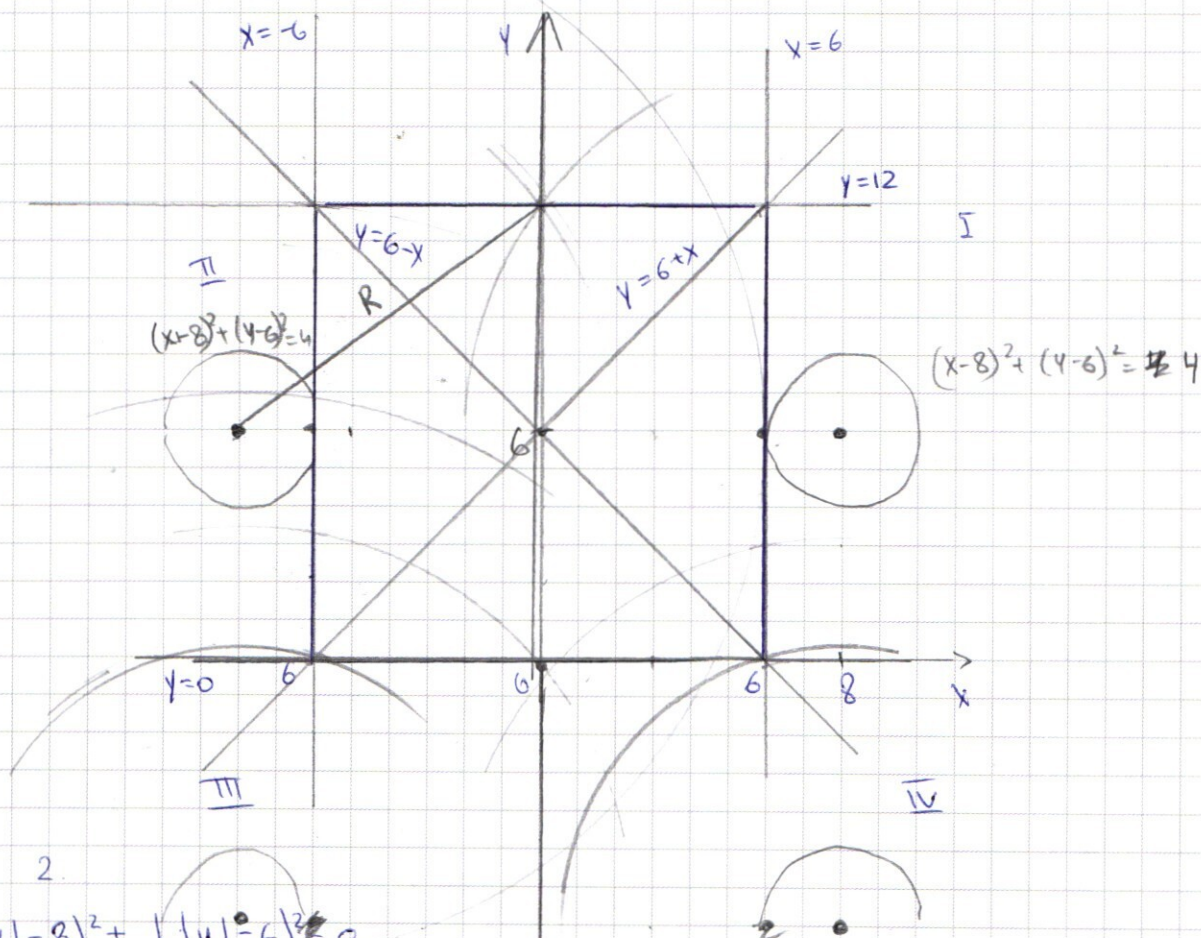
$$4) \begin{cases} y < 6+x \\ y < 6-x \\ (-y+6+x-y+6-x=12), \\ y=0 \end{cases}$$

Нужно построить $y=6+x, y=6-x, y=12, x=-6, x=6, y=0$.

$$\begin{array}{l} y=6+x \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & -2 \\ \hline y & 6 & 4 \end{array} \\ y=6-x \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline y & 6 & 4 \end{array} \end{array}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Гр 2.

$$(x-8)^2 + (y-6)^2 = a$$

Искать

$$1) \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ (x-8)^2 + (y-6)^2 = a \end{cases}$$

часть окр. в I кв.

с центром в т. (8, 6)

и радиусом $R = \sqrt{a}$

$$2) \begin{cases} x \leq 0, y \geq 0 \\ (x+8)^2 + (y-6)^2 = a \end{cases}$$

(-8, 6)

$$a \text{ от } 100 \text{ до } (6+12)^2$$

$$3) \begin{cases} x < 0, y < 0 \\ (x+8)^2 + (y+6)^2 = a \end{cases}$$

(-8, -6)

$$4) \begin{cases} x \geq 0, y < 0 \\ (x-8)^2 + (y+6)^2 = a \end{cases}$$

(8, -6)

Ответ:

$$a=4, a=100$$

$$a=6^2+6^2=100$$

1)

$$a=4$$

2) Когда точки пересек. (0, 0) и (0, 12)

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$x = 8$$

$$512 - 128 - 160 + 48$$

$$x = 4 \quad 64 - 32 - 80 + 48 = 0$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ +64 \\ \hline 112 \end{array} \quad \begin{array}{r} 80 \\ -32 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 \\ -x^3 + 4x^2 \\ \hline 2x^2 - 20x + 48 \\ -2x^2 + 8x \\ \hline -16x + 48 \\ -16x + 48 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x-4 \\ \hline x^2+2x-16 \end{array}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ x^2 + 2x - 16 = 0 \end{cases}$$

$$x^3 - 4x + 80 \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 3 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 16 = 0$$

$$x^3 - 4x + 80 = 0$$

$$\begin{array}{r} -1-51 \\ -52+84=32 \end{array}$$

$$D_1 = 1 + 16 = 17$$

$$\begin{cases} x = -1 + \sqrt{17} \\ x = -1 - \sqrt{17} \end{cases}$$

$$1) (-1 + \sqrt{17})^3 + 4 - 4\sqrt{17} + 80 =$$

$$= -1 + 3\sqrt{17} - 3 \cdot 17 + 17\sqrt{17} + 4 -$$

$$3) x = 4$$

$$2) -4\sqrt{17} + 80 = 16\sqrt{17} + 32$$

$$64 - 16 + 80 \geq 0$$

$$(-1 - \sqrt{17})^3 + 4 + 4\sqrt{17} + 80 =$$

$$= -1 - 3\sqrt{17} - 51 - 17\sqrt{17} + 4 + 4\sqrt{17} + 80$$

$$= 32 - 16\sqrt{17}$$

$$\text{Ответ: } \boxed{N3} \quad -1 + \sqrt{17}; 4$$

$$\sqrt{16 \cdot 17 \cdot 16} > \sqrt{32 \cdot 32}$$

$$\sqrt{32 \cdot 17 \cdot 8} > \sqrt{32 \cdot 32}$$

или наоборот.

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 - 4 \mid x+2 \\ -2x^3 + 4x^2 \\ \hline x^2 + 0x - 4 \\ -x^2 + 2x \\ \hline -2x - 4 \\ -2x - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$2x^3 + 5x^2 - 4 = 0,$$

$$x = -2$$

$$-16 + 20 - 4 = 0$$

$$\begin{array}{c} x=1 \\ x=-2 \end{array}$$

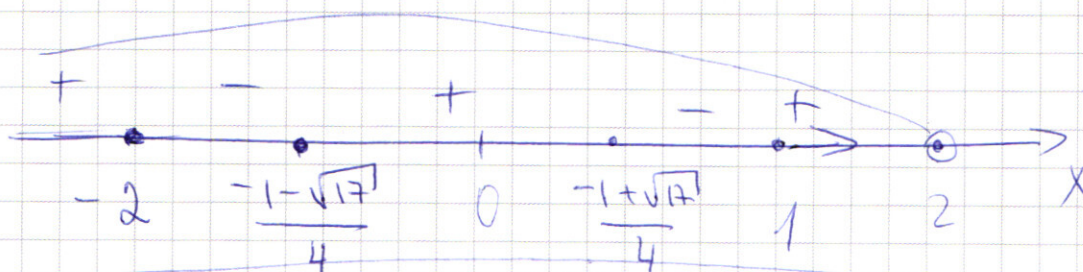
$$2x^2 + x - 2 = 0,$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17.$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

$$\sqrt{17} \approx 4$$

$$\frac{-1+4}{4} = \frac{3}{4} \quad \frac{-1-4}{4} = \frac{-5}{4}$$



$$x \in (-\infty, -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}, \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [1, 2)$$

при $x < 2$.

$$\text{при } x \geq 2.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4. ±

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 | x - 2 | + 4 \geq 0.$$

1) $x \geq 2$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 + 6x^2 + 4 \geq 0,$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0.$$

1. $f(x)$

2. Н.Ф. $2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 = 0.$

1) $x = 1$

$$2 - 3 + 7$$

2) $x = -1$

$$2 + 3 + 7 + 4 + 4$$

$$\frac{1}{8} - \frac{3}{8}$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{7}{4} =$$

$$-\frac{3}{2} - 2 + 4 =$$

$$2 - 1,5$$

3) $x = 2$

$$32 - 24 + 14 - 8 + 4 =$$

4) $x = 4$

$$512 - 192 +$$

$$\frac{1}{2}$$

2) $x = -2$

$$-32 + 24 + 14 + 8 + 4$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 16 \\ + 16 \\ \hline 32 \\ 76 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 16 \\ + 4 \\ \hline 20 \\ 64 \\ \hline 84 \\ 3 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \quad | x - \frac{1}{2} \\ \underline{2x^4 - x^3} \quad \quad \quad 2x^3 \\ -2x^3 + 7x^2 \quad \quad \quad + 2x \\ \underline{-x^3 + 7x^2} \quad \quad \quad -2x^2 \\ -2x^3 + x^2 \quad \quad \quad + 6x \\ \underline{6x^2 - 4x} \quad \quad \quad -2x^2 \\ -6x - 2x \quad \quad \quad + 6x \\ \underline{-x + 4} \end{array}$$

2) $x < 2$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0,$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0.$$

$$2x^3(x+1) + x^2(x$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 = 0.$$

$$(2x^3 + 5x^2 - 4)(x - 1)$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \quad | x - 1 \\ \underline{2x^4 - 2x^3} \quad \quad \quad 5x^3 - 5x^2 \\ \underline{5x^3 - 5x^2} \quad \quad \quad -4x + 4 \\ -4x + 4 \quad \quad \quad \underline{-4x + 4} \\ 0 \end{array}$$