

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИД

Бланк задания должен быть вложен в
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$4200 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

восстанавливаем

Значит, искомого числа могут состоять из:

1) двух "2", двух "5", двух "7" и двух "1".

дв "2" могут быть в $\frac{8-7}{2}$ позициях, т.к. изнач. или доступно 8 мест ~~2 места~~ и

эти "2" не различаются (поэтому делим на 2)

дв "5" могут быть в $\frac{6-5}{2}$ позициях, т.к. им осталось 6 мест.

дв "7" - $\frac{4-3}{2}$ и дв "1" - $\frac{2-1}{2}$ аналогично.

$$\frac{8-7}{2} \cdot \frac{6-5}{2} \cdot \frac{4-3}{2} \cdot \frac{2-1}{2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - \text{всего искомым чисел, состоящих из указанного}$$

набора цифр

2) одной "4", двух "5", двух "7" и трёх "1"

дв "5" могут быть в $\frac{8-7}{2}$ позициях по тем же причинам, что и "2" в

случае (1)

дв "7" могут быть в $\frac{6-5}{2}$ позициях как "5" в случае (1)

одна "4" может быть в 4 оставшихся местах

три "1" могут быть в $\frac{3-2-1}{3-2-1}$ местах из оставшихся трёх

$$\frac{8-7}{2} \cdot \frac{6-5}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3-2-1}{3-2-1} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 - \text{искомых чисел, сост-их из указанного набора чисел}$$

Итого, искомым чисел

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 (12 + 8) = 210 \cdot 20 = 4200$$

Ответ: 4200 чисел

№3.

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^2 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\frac{-2}{4}(x+10)\sqrt{x^2-64x+200} = (x+10)(x-4)$$

При $x=-10$ под корнем оказывается отрицательное число $-1000+640+200=-360$.
Значит, на $(x+10)$ можно делить.

$$\sqrt{x^2-64x+200} = 2\sqrt{x-4}$$

Запомним, что $x^2-64x+200 \geq 0$ и $x-4 \geq 0$

$$x^2-64x+200 = 8(x-4)^2$$

$$x^3-8x^2+72=0$$

$x=6$ по алгоритму Герона

$$\begin{array}{c|ccc|c} - & 1 & -8 & 0 & 72 \\ \hline 6 & 1 & -2 & -12 & 0 \end{array}$$

Но число под корнем $196 \cdot (6^3-64 \cdot 6+200=396-384=12 \geq 0)$ - $x=6$ - подходит

~~$(x^2-2x-12)(x-6)=0$~~ Запомним это и делим ур-е на $(x-6)$

$$x^2-2x-12=0$$

$$D=4+4 \cdot 12=52 > 0$$

$x=1 \pm \sqrt{13}$ Рассм. получившиеся корни

$$1-\sqrt{13}+4 < 0 \Rightarrow x \neq 1-\sqrt{13}$$

$$(1+\sqrt{13})^3-64(1+\sqrt{13})+200 = 1+3\sqrt{13}+39+13\sqrt{13}-64-64\sqrt{13}+200 = 176-48\sqrt{13} - \text{должно быть неотр}$$

$$176-48\sqrt{13} \geq 0$$

$$\sqrt{13} \leq \frac{176}{48} = \frac{11}{3}$$

$$\sqrt{\frac{11}{3}} \leq \sqrt{\frac{121}{9}} - \text{верно} \Rightarrow x = \sqrt{13}+1 \text{ подходит}$$

$$\text{Ответ: } \{\sqrt{13}+1; 6\}$$

№5.

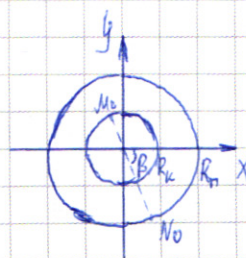
$$R_k = \sqrt{1+8} = 3 \text{ (т. Пифагора)}; R_n = \sqrt{4+32} = 6 \text{ (тоже)} \Rightarrow R_k = \frac{1}{2} R_n$$

$$R_k = \frac{1}{2} R_n; v_k = \frac{5}{4} v_n \Rightarrow \omega_k = \frac{v_k}{R_k} = \frac{2.5 v_n}{0.5 R_n} = 5 \frac{v_n}{R_n} = 5 \omega_n$$

$$\cos \beta = \frac{2}{5} = \frac{1}{3} \Rightarrow \beta = -\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

Во время Рыбы находятся на лин. расст-и, когда они лежат на одной прямой с началом коорд-т. Назовем это "встречей"

В первый раз они встретились в под углом $\gamma = \beta$ к Ох в момент t_1



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \alpha = t\omega_n \\ \alpha = t\omega_n \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} \Rightarrow \gamma = \beta \alpha = -\arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{\pi}{8}$$

Рассм., как часто они будут "встречаться" после t_1 , на примере их второй "встречи" в момент t_2 . ε -преодоленный пеларём угол после t_1 до t_2 .
Пока пеларь пройдёт ε , карась пройдёт 5ε , проплыв 1 круг.

$$5\varepsilon = 2\pi + \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{\pi}{2}$$

Значит, они "встречаются" через $\frac{\pi}{2}$.

Угол в момент t_2 на $\frac{\pi}{2}$ больше (по часовой), след-но коор-ты из триг. тожд-в
 $(6\sin(-\arccos\frac{1}{3}-\frac{\pi}{8}), -6\cos(-\arccos\frac{1}{3}-\frac{\pi}{8}))$

В момент t_3 на π больше, след-но
 $(-6\cos(-\arccos\frac{1}{3}-\frac{\pi}{8}), -6\sin(-\arccos\frac{1}{3}-\frac{\pi}{8}))$

В момент t_4 на $\frac{3\pi}{2}$ больше, след-но
 $(-6\sin(-\arccos\frac{1}{3}-\frac{\pi}{8}), 6\cos(-\arccos\frac{1}{3}-\frac{\pi}{8}))$

И через $\frac{\pi}{2}$ в момент t_5 он сделает полный круг.

Ответ: $(6\cos(-\arccos\frac{1}{3}-\frac{\pi}{8}), 6\sin(-\arccos\frac{1}{3}-\frac{\pi}{8})), (6\sin(-\arccos\frac{1}{3}-\frac{\pi}{8}), -6\cos(-\arccos\frac{1}{3}-\frac{\pi}{8})),$
 $(-6\cos(-\arccos\frac{1}{3}-\frac{\pi}{8}), -6\sin(-\arccos\frac{1}{3}-\frac{\pi}{8})), (-6\sin(-\arccos\frac{1}{3}-\frac{\pi}{8}), 6\cos(-\arccos\frac{1}{3}-\frac{\pi}{8})).$

✓4

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$$

$$1) x \geq -2$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

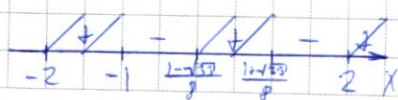
$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0$$

$$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0 \quad D=33$$

$$(x+1)(x+\frac{\sqrt{33}+1}{8})(x-\frac{\sqrt{33}+1}{8})(x-2) \geq 0$$

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 & x+1 \\ \hline 4x^4 + 4x^3 & \\ \hline -9x^3 - 9x^2 & \\ \hline -9x^3 - 9x^2 & \\ \hline 4x + 4 & \\ \hline 4x + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 9x^2 + 0x + 4 & x-2 \\ \hline 4x^3 - 8x^2 & \\ \hline -x^2 + 0x & \\ \hline -x^2 + 2x & \\ \hline -2x + 4 & \\ \hline -2x + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$



$$2) x < -2$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 10x^2 + x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$x^2(4x^2 + 5x + 10) + (x+2)^2 \geq 0$$

Значит, при $x < -2$ нерав-во всегда верно

$$\text{Ответ: } (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) x \geq -2$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0$$

$$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0 \quad D = 1 + 4 \cdot 4 \cdot 2 = 33 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$(x+1)(x-2)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0$$

$$(x+1)(x-2)\left(x + \frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)\left(x - \frac{\sqrt{33}+1}{8}\right)(x-2) \geq 0$$

$$|-3+2| = 1$$

$$|x+2| = \quad x < -2$$

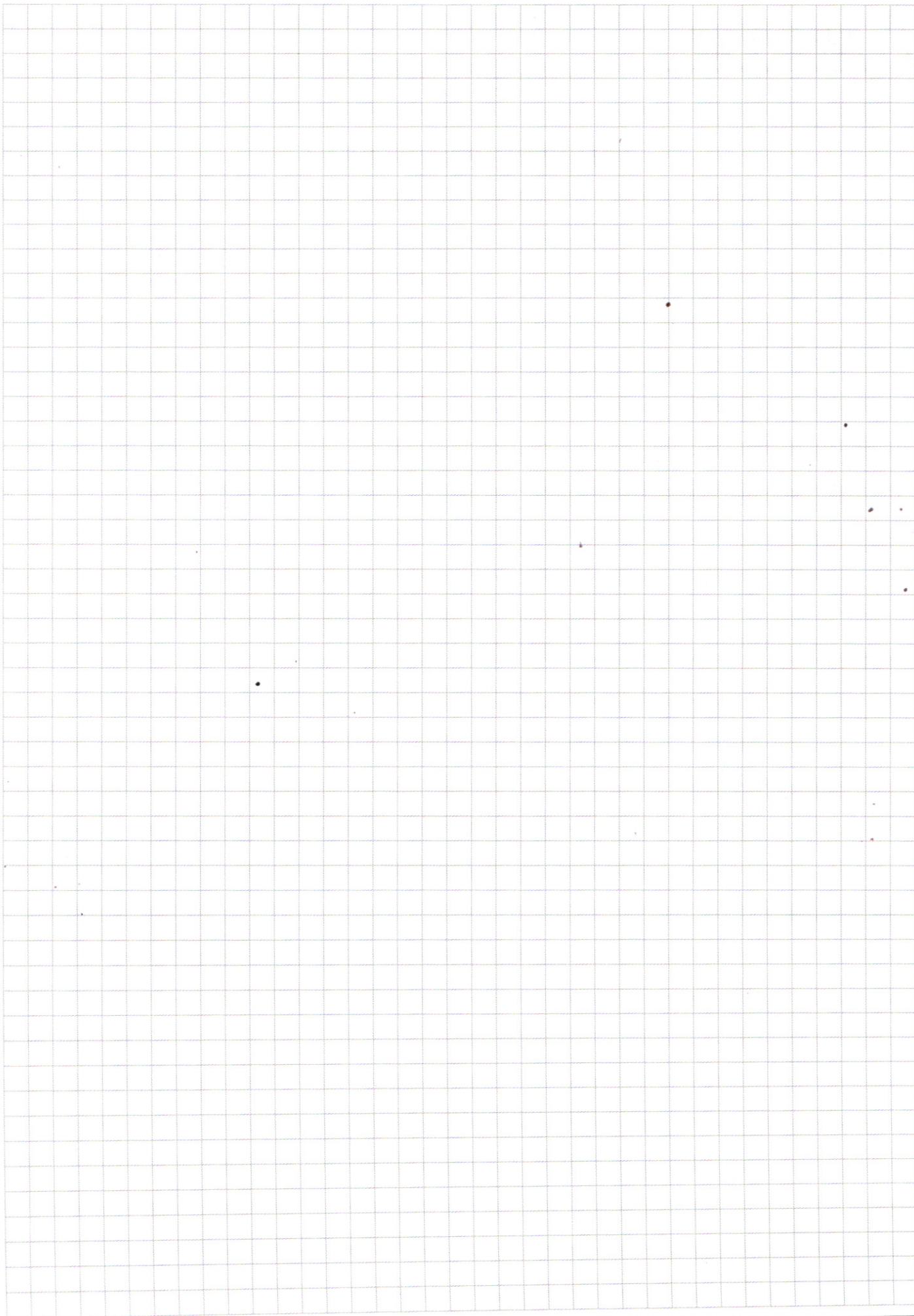
$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^2(x+2) + 4 = 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$32 - 40 + 74 - 8 + 4 =$$

$$4 \cdot 273 - 5 \cdot 81 + 11 \cdot 9 - 4 \cdot 3 + 4 \geq 0 ?$$

$$4x^4 + 5x^3 + 10x^2 + x^2 + 4x + 4$$

$$x^2(4x^2 + 5x + 10) + (x+2)^2 \geq 0$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $4900 = 7^2 \cdot 10^2 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

Должно быть: 2, 2 и 2 или 1, 2 и 2

I: 8 7 6 5 4 3 - если, но 2 одинаковых, то расположение букв

II: 8 7 6 5 4 1 1 1 2 2 x x 7 7 5 5

III: $\frac{8 \cdot 7}{2} \times \frac{6 \cdot 5}{2} \times \frac{4 \cdot 3}{2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$
 $\Rightarrow 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot (12+8) = 20 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 100 \cdot 42 = 4200$ произведение

IV: $\frac{8 \cdot 7}{2} \times \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

2) $\sum = \frac{b(1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{b(1-q^n)}{1-q}$

$b + b \cdot q + b \cdot q^2 + \dots + b \cdot q^n = b \cdot (q^0 + q^1 + \dots + q^n) = b \cdot (1+q)(1+q^2+q^4+\dots)$

$b + \dots + b \cdot q^{2999}$

$\frac{b(1-q^n)}{1-q} + 39b(q^2+q^5+q^8+\dots+q^{2999}) = 5 \frac{b(1-q^n)}{1-q}$

$4 \frac{1-q^{2000}}{1-q} = 39(q^2+q^5+\dots+q^{2999})$

$(y-1) \frac{1-q^{2000}}{1-q} = 2(q+q^3+q^5+\dots+q^{2999})$

$\frac{2}{2}(y-1) \frac{1-q^{2000}}{1-q} = 39(q+q^3+q^5+\dots+q^{2999})$

$(19,54-15,5)S =$

3) $\left(\frac{x}{2-2} + \frac{5}{2} \sqrt{2}\right) \sqrt{x^2-64x+200} = x^2+6x-40$

$(0,25x\sqrt{2} + 2,5\sqrt{2}) \sqrt{x^2-64x+200} = (x+10)(x-4)$

$\frac{\sqrt{2}}{4}(x+10) \sqrt{x^2-64x+200} = (x+10)(x-4)$

$\frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2-64x+200} = x-4$
 $x \geq 4$

$x = -10$ - не подходит

$\frac{2}{16}(x^2-64x+200) = x^2-8x+16$
 $x-4 \geq 0$
 $x \geq 4$

$x^2-64x+200-8x^2+64x-128 = x^2-8x^2+72=0$
 $x^2(x-8) = -72$
 $x = 208$

$x^2-64x+200 \geq 0$ $(x-8)(x+8) \geq -200$ x положительное

$-1000 + 640 + 200$

$$3) \frac{x^2}{4}(x+10) - \sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40$$

$$x^3-64x+200 \geq 0$$

$$\frac{x^2}{4} - \sqrt{x^3-64x+200} = \cancel{x^2+6x-40} \quad x-4$$

$$(x-8)x(x+8) \geq -200 \quad (-10; -8] \cup [0; 8]$$

$$\sqrt{x^3-64x+200} = 2\sqrt{2}(x-4)$$

$$x^3-64x+200 = -(5^2 \cdot 2^3)$$

$$x^3-64x+200 = 8(x^2-8x+16)$$

$$x^2(x-64) = -5^2 \cdot 2^3 \Rightarrow x < 64 \text{ и } x > 44$$

$$x^3-8x^2+72=0 \Rightarrow x^2(x-8) = -72 \quad x=6 \text{ не подходит в ответ}$$

$$x^3-8x^2+72 = \frac{x^3-8x^2+0x+72}{x^3-6x^2} \quad x-6 \quad x+10 \text{ не подходит}$$

$$\begin{array}{r} x^3-8x^2+72 \\ -x^3+6x^2 \\ \hline -2x^2+0x+72 \\ -2x^2+12x \\ \hline -12x+72 \end{array}$$

$$(x^2-2x-12)(x-6) = 0$$

$$(1+\sqrt{13})^3 - 6(1+\sqrt{13}) + 200$$

$$x^2-2x-12=0$$

$$1+3\sqrt{13}+39+13\sqrt{13}-64-64\sqrt{13}+200 \geq 0$$

$$D = 4+48=52$$

$$200+40-64+16\sqrt{13}-64\sqrt{13} \geq 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 1 \pm \sqrt{13}$$

$$176 \geq 48\sqrt{13}$$

$$\frac{13}{9} \frac{9}{117}$$

$$\sqrt{13} \leq \frac{126}{48} = \frac{88}{24} = \frac{44}{12} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3} = \sqrt{\frac{121}{9}}$$

$\sqrt{5}$

$$r_m = \sqrt{1+p} = 3 \quad \cos \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$r_n = \sqrt{4+32} = 6 \quad \alpha = \arccos(-\frac{1}{3})$$

$$v_m = 2.5v_n \quad \beta = \pi - \arccos(-\frac{1}{3}) = +\arccos(\frac{1}{3})$$

$$\omega_m = \frac{v_m}{r_m} = \frac{2.5v_n}{\frac{1}{2}r_n} = 5\omega_n$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\omega_n \quad \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8}$$

$$90^\circ + \alpha = 5\omega_n \quad \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8}$$

$5\omega_n$

$$\gamma = \pi - \arccos \frac{1}{3} - \frac{\pi}{8} \text{ - тогда в ответе}$$

$$5\alpha = 2\pi + 2 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$10\alpha = 4\pi + 2 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$64 - 256 + 200$$

$$\frac{2}{64}$$

$$\frac{36}{6}$$

$$6^3$$

$$\frac{6}{384}$$

$$\frac{6}{196}$$

$$196 -$$



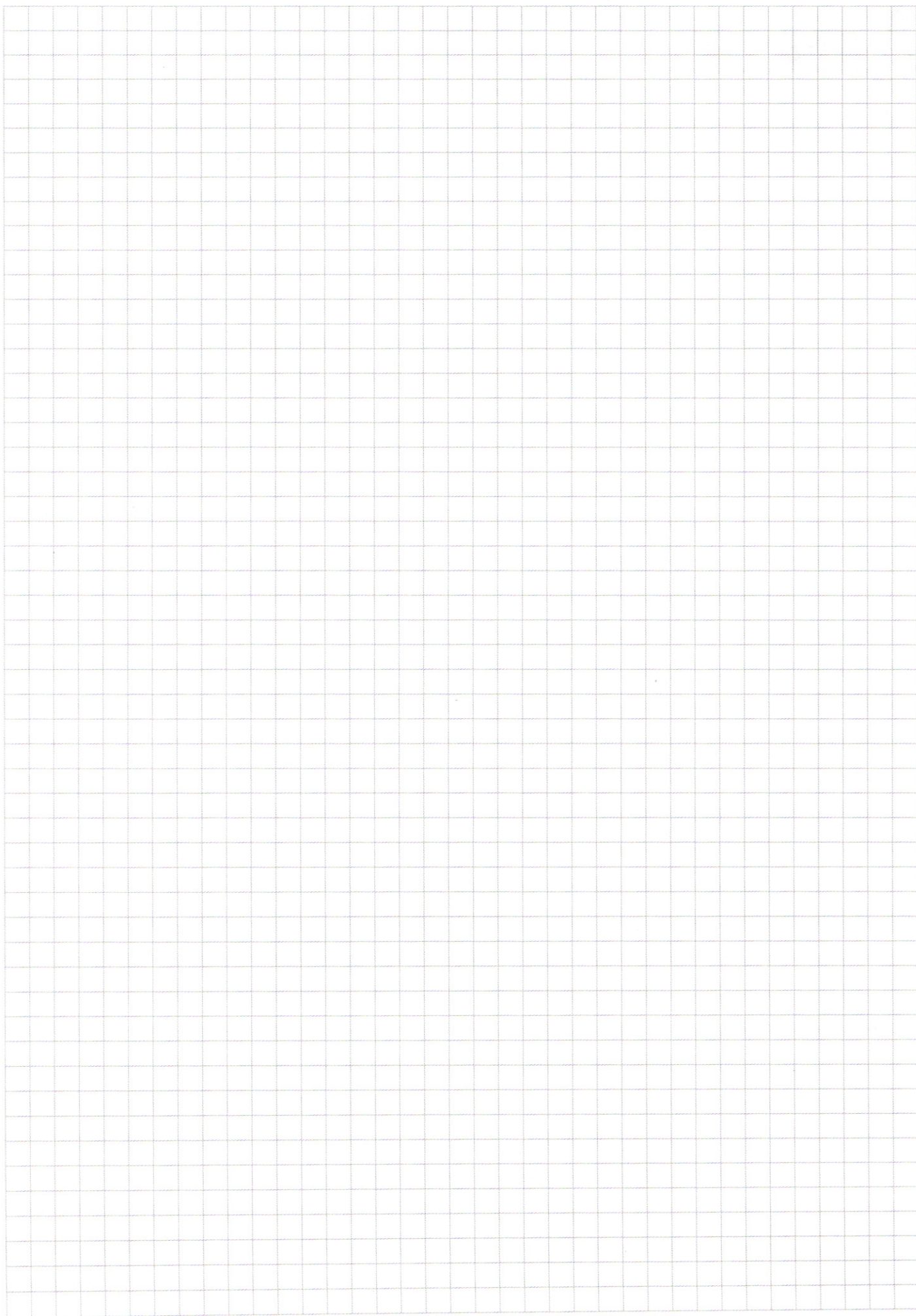
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)