

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$4900 = 49 \cdot 100 = 7^2 \cdot 10^2 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$. Следовательно, чтобы произведение было равно 4900, нужно чтобы в числе были цифры 2, 2, 5, 5, 7, 7, 1, 1 или 4, 5, 5, 7, 7, 1, 1, 1 ($2 \cdot 5 = 10$, $2 \cdot 7 = 14$, $5 \cdot 7 = 35$ и т.д. — ^{больше любых из} ~~таких~~ цифр ~~нема~~).

Число перестановок 8-и элементов $A_8 = 8!$. В случае числа с цифрами 2, 2, 5, 5, 7, 7, 1, 1 мы каждое число посчитали $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ раз, т.к. от перемешив мест 2-ух двоек, пятерок, семерок и единиц число не изменится, а в A_8 это все учтено $\Rightarrow$ кол-во чисел с таким набором цифр — $\frac{8!}{16}$. В числе второго типа "4, 5" встречаются двадцать, а "1" — трижды. Перестановки "7" и "5" дают нам $2 \cdot 2 = 4$ повторения, а при единицы (считая их разными) мы могли представить $3! = 6$ способ. $\Rightarrow$ число каждое число с набором цифр 4, ..., 1, 1, 1 мы посчитали $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$ раза, когда находили для них $A_8 \Rightarrow$ ак кол-во — $\frac{8!}{24}$. Итого, всего чисел с произведением цифр 4900:

$$4900 : \frac{8!}{24} + \frac{8!}{16} = \frac{5 \cdot 8!}{48} = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 = 4200$$

Ответ: 4200

N3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4)$$

(при $x = -10$, $x^3 - 64x + 200 =$
 $= -160 - (-640) = 480$
 $\neq 0$ АЗ)

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4) \quad | : (x+10) - \text{т.к. } x = -10 \text{ не является корнем уравн.}$$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = 2\sqrt{2}(x-4) \quad (\text{возведем в квадрат, наложив условие } x > 4)$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128$$

$$x^3 - 8x^2 + 72x - 200 = 0$$

$$(x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0$$

$$x = 6$$

$$x = 1 \pm \sqrt{13}$$

П.ч. $x > 4$, $x = 1 - \sqrt{13}$ — не удовлетвор. усл.

Ответ: $1 + \sqrt{13}$; 6

NY

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$$

$4x^4 + (x+2)^2 - 5x^2|x+2| \geq 0 \Rightarrow$ составим квадр. ур-ие относ. $|x+2|$:

$$|x+2|^2 - 5x^2|x+2| + 4x^2 \geq 0$$

По теор. Виета: $f(x) + g(x) = 5x^2$, где $f(x)$ и $g(x)$ — корни ур-ия
 $f(x)g(x) = 4x^2$

Можно предпр. $f(x) = x^2$; $g(x) = 4x^2 \Rightarrow$ многочлен расклад. на множ.:

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 = (|x+2| - x^2)(|x+2| - 4x^2) \geq 0$$

$$1) \begin{cases} |x+2| = x^2 \\ x > -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -2 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x = -1; x = 2$$

$$2) \begin{cases} |x+2| = x^2 \\ x < -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -2 \\ x^2 + x + 2 = 0 \end{cases}$$

нет реш. ($D < 0$)

$$3) \begin{cases} |x+2| = 4x^2 \\ x > -2 \end{cases}$$

$$4x^2 - x - 2 = 0$$

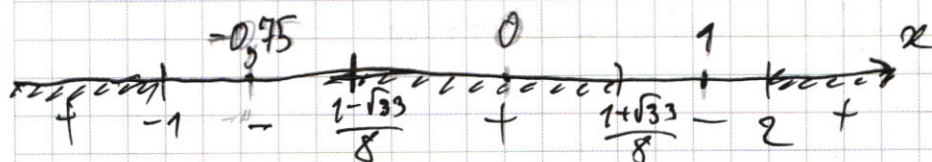
$$D = 33$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$4) \begin{cases} |x+2| = 4x^2 \\ x < -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -2 \\ 4x^2 + x + 2 = 0 \end{cases}$$

нет реш. ($D < 0$)

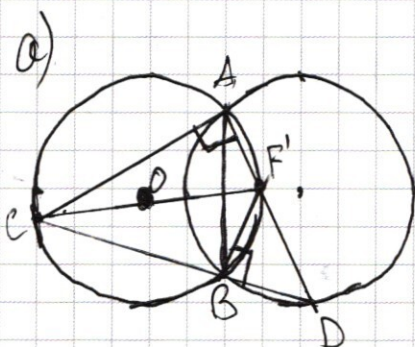


$$f(-2) > 0; f(-0.75) < 0; f(0) > 0; f(1) < 0; f(3) > 0$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1 - \sqrt{33}}{8}; \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; \infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N6



Пример $F' = BF_n(0; \tau)$ ($\tau = 15$)
($F' \neq B$)

$$\angle CBF' = 90^\circ \text{ (} BF' \perp CD \text{)} \Rightarrow CF' - \text{диаметр}$$

$$\angle CAD = 90^\circ, AD = (0; \tau) = A, P'' \Rightarrow$$

$\Rightarrow CP^4$ -диаметр $\Rightarrow F' = F^4$ (т.е. $F' \in AD$)

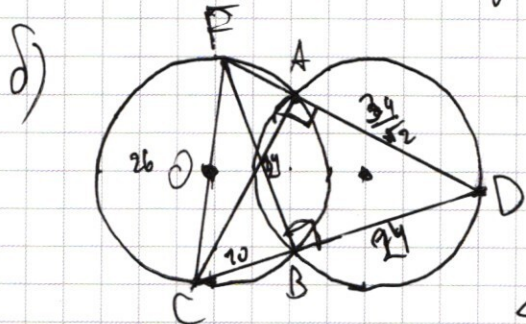
т.е. из 1) С можно провести лишь 1 диаметр. $\triangle DBF' \sim \triangle DAC$
($\angle D$ - общий, пряср. прямоугольные) $\Rightarrow \angle BF'D = \angle ACD$

No meor. cut. : $\angle ABC : 2 \cdot 13 = \frac{AB}{\sin C}$
 für meor. ABD : $2 \cdot 13 = \frac{AB}{\sin D}$

для треугол. ABD: $2 \cdot 13 = \frac{AB}{\sin \angle D}$

Weg.: $\angle C = \angle D \Rightarrow \angle BPF'D = \angle ACD \neq (\angle C) = \angle BPF'DF'$, m.c. sin 2D

$$\triangle BPF'D - \text{равноб.} \Rightarrow \overline{BP'} = \overline{BD} \Rightarrow \overline{BP'} = \overline{BP} \Rightarrow \overline{P'F} = \overline{PF} \text{ т.е. } CP = \overline{CP'} = 2.13 = 26 \text{ (квадрат)} \quad \text{(мощность точки)}$$



16. max - Prop. (Δ CFB): $BF = \sqrt{26^2 - 10^2} =$

$= 24$. Из пункта а), $BF = BD \Rightarrow$

$$\Rightarrow BD = 24 \Rightarrow CD = BC + BD = 34$$

$$\triangle ACD \sim \triangle BPD \Rightarrow \triangle ACD - \text{more probability.}$$

Alt. 9. $AD = \frac{CD}{\sqrt{2}}$ (yurtu no 45°) $= \frac{34}{\sqrt{2}} = 17\sqrt{2}$. $FD^2 = BF^2 + BD^2 = 2 \cdot 24^2 \Rightarrow \underline{FD = 24\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{AP} = FD - AD = \underline{7\sqrt{2}}$. No meq. Ans.

(ΔACF): $AC = \sqrt{26^2 - (7\sqrt{2})^2} = \sqrt{548} = \sqrt{2 \cdot 274} = 17\sqrt{2}$. Neg.

$$S_{ACP} = \frac{1}{2} 17\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 17 \cdot 7 = 119$$

Omber: 8) 119

a) 26

N7

Построим график $|y+x+8| + |y-x+8| = 16$ (прямые $y = -x-8$ и $y = x-8$ делят плоск. на 4 части, в каждой из которых модуль раскрыв. по-разному). 1) $y = 0$ 2) $x = -8$ 3) $y = -16$ 4) $x = 8$

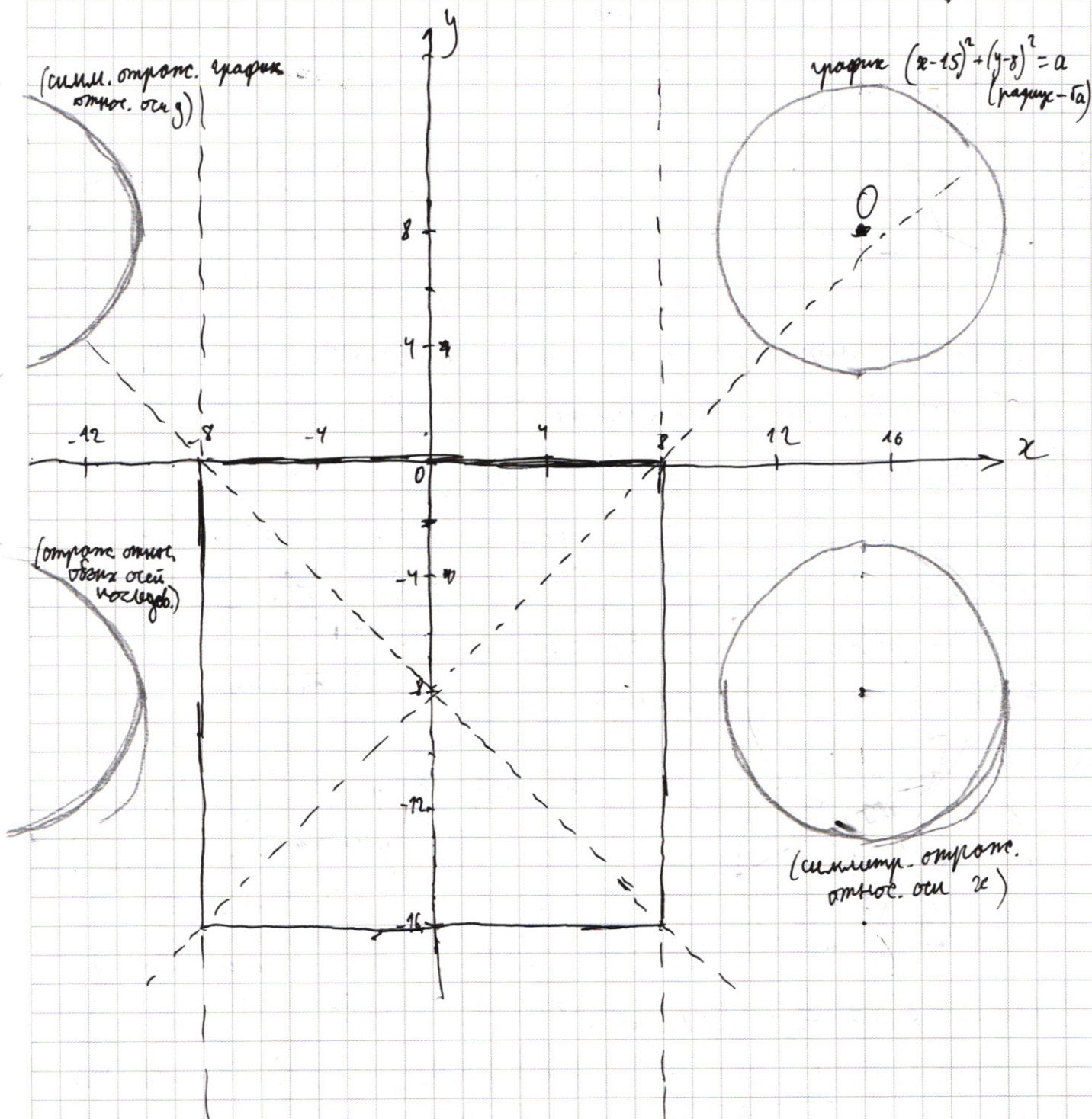


График $(|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a$ строится следующим образом:
1) строим график $(x-15)^2 + (y-8)^2 = a$ (окр. радиусом $\sqrt{a}$ с центром в $O(15; 8)$)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) удалим все части графика с $x < 0$ и $y < 0$

3) оставшуюся часть графика симметрично отразим относительно осей x и y , получим 4 симметрич. кусочка графика в каждой из четвертей.

Пример:

рис 1)
(сирот)

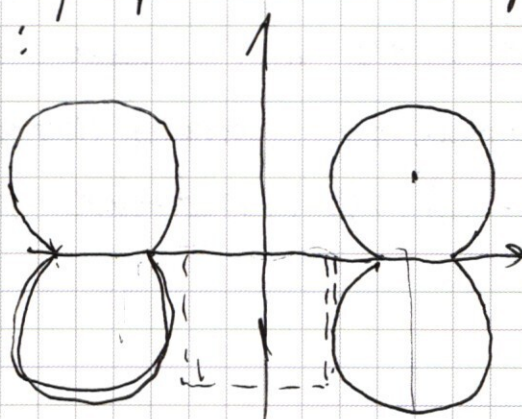
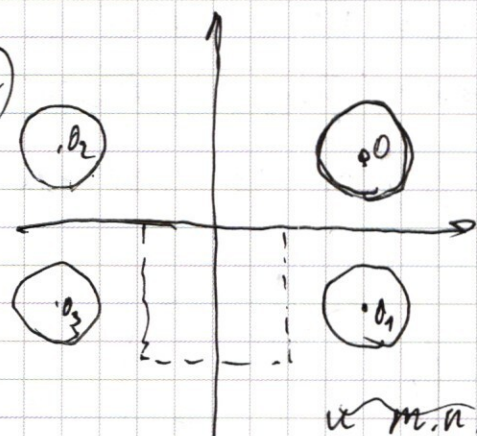
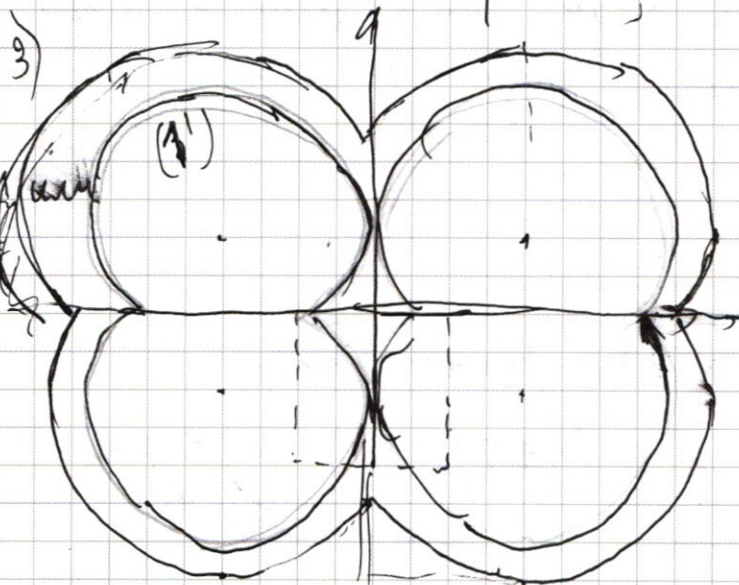


рис 2)

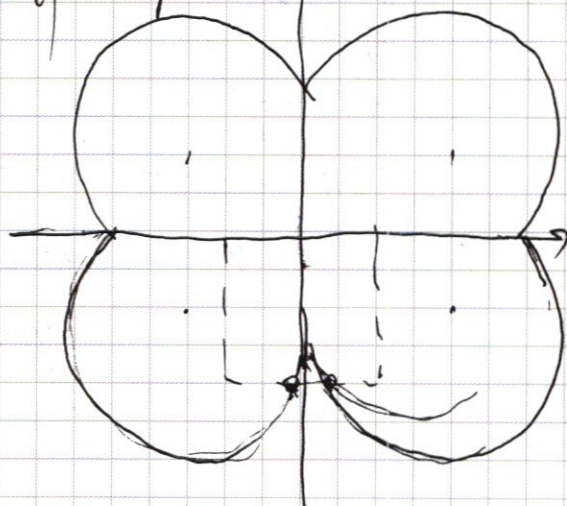
или



и т.п.



и) - 2 рис.



Для точки пересек. с квадрата (графика, кот. мы ранее построили) наблюдаем при $a \leq 15$ (пример 2), когда 2 нижние окруж. касаются квадрата (т.е. расст. от $O_1(15; -8)$ до стгр. квадрата $-\sqrt{a} = 7$)

Далее, при увелич. a решений > 2 , пока случай типа 1) не ~~перейдет~~ перейдет в 4). В примере 1' решений (пересек.) все еще > 2 , а уже на рис. 4) их 2.

1') соответствует касанию окружностей оси y , т.е.

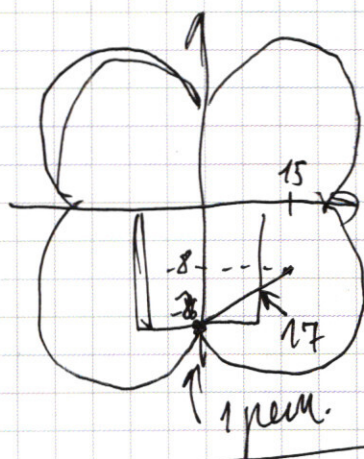
$$\sqrt{a} = 15 \text{ т.е. } (a = 225). \text{ Далее, при увелич. } a$$

2 реш. будут постоянно до тех пор, пока

4) не начнет переходить в 3). У 3) — нет перес. с квадратами, в переходном случае наблюдаем 1 реш.,

$$\text{при } \sqrt{a} = \sqrt{(-16 - (-8))^2 + 15^2} = 17, \text{ т.е. при } a = 289,$$

~~кас.~~ $(\sqrt{(-16 - (-8))^2 + 15^2})$ — расст. от центра нижней правой окруж. до точки $(0; -16)$, где произойдет касание).



(переход. случ. от 2 реш. к 0 реш.;
границ. между 4) и 3)

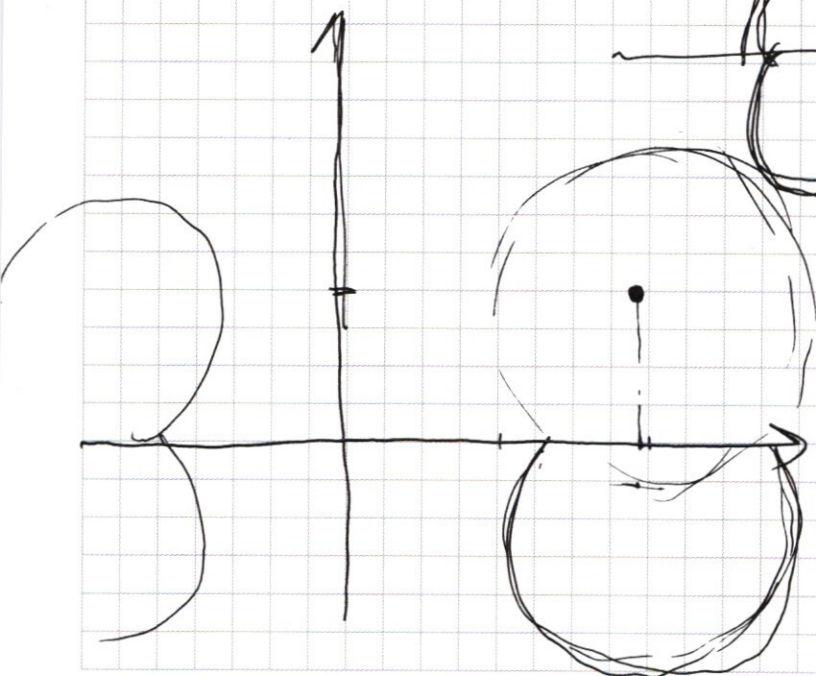
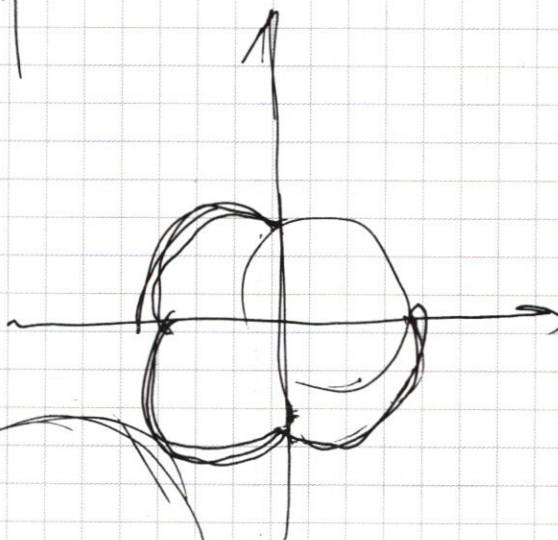
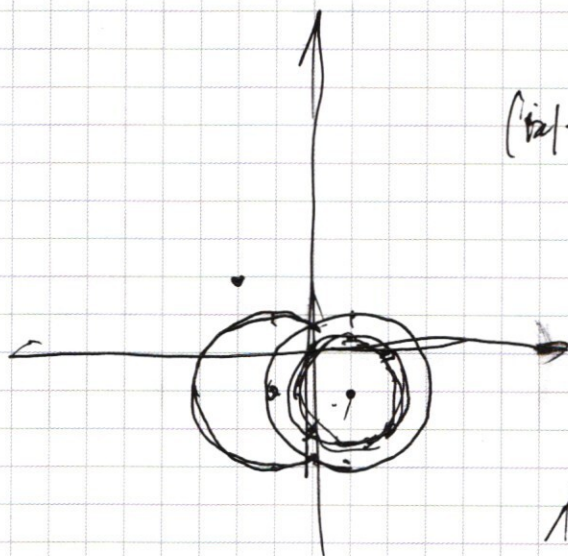
И.е. 2 реш.: при $a = 49$ (касание сторон)

при $a \in (225; 289)$ — случай 4)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |y+2+8| + |y-2+8| = 16 \\ (x-15)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases}$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 17$$



$$|y+x+8| + |y-x+8| = 16$$

$$y = -x - 8$$

$$y = x - 8$$

$$y \geq -x - 8$$

$$y < -x - 8$$

$$-x - 8 < y < x - 8$$

$$1) \quad y+x+8+y-x+8=16$$

$$2) \quad -y-x-8+y-x+8=16$$

$$-2x=16$$

$$x=-8$$

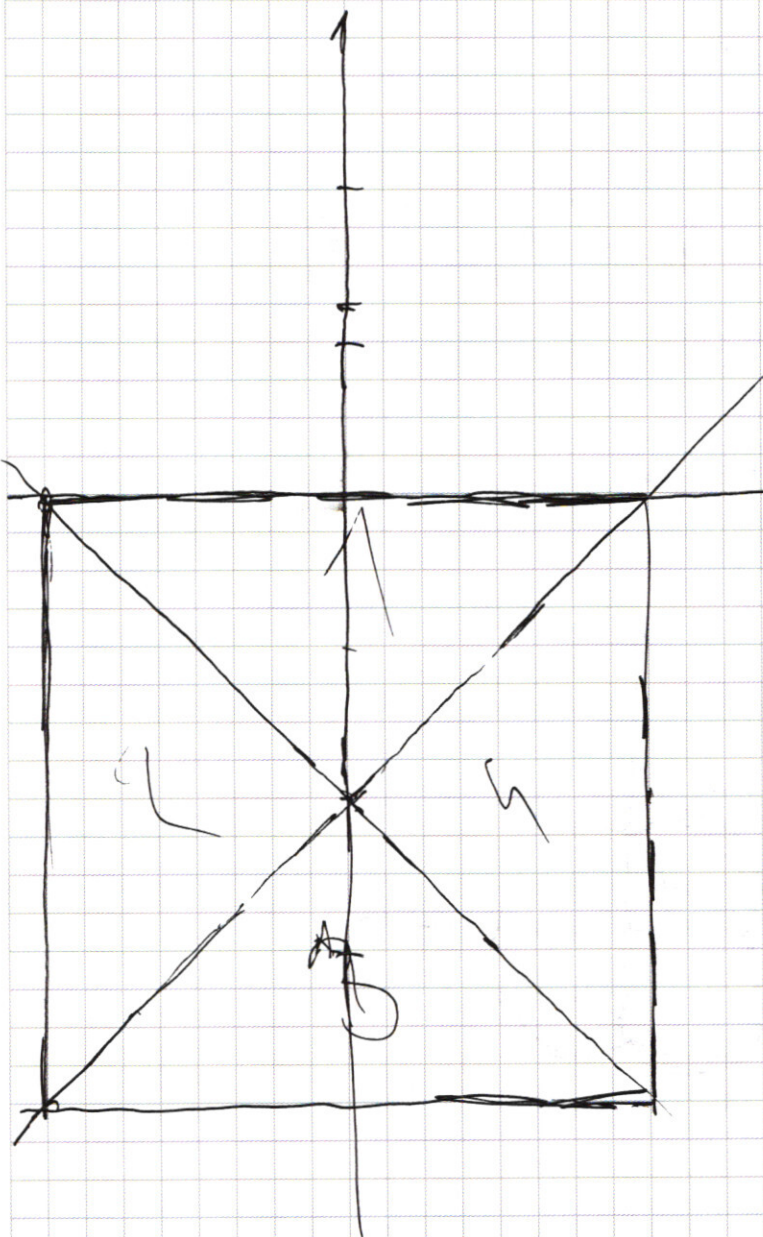
$$3) \quad -y-x-8-y-x-8=16$$

$$-2y=32$$

$$y=-16$$

$$4) \quad y+x+8-y-x-8=16$$

$$x=8$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x+2)^2 - 5x^2(x+2) + 4x^4 = 0$$

$$5x^2 = f(x) + g(x)$$

$$4x^4 = f(x) \cdot g(x)$$

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = 4x^2$$

$$(x+2 - x^2)(x+2 - 4x^2) \geq 0$$

$$x+2 = x^2$$

$$x+2 = 4x^2$$

$$x > -2$$

$$x+2 = x^2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = -1$$

$$x = 2$$

$$x < -2$$

$$-x-2 = x^2$$

$$x^2 + x + 2 = 0$$

нет реш.

$$x > -2$$

$$x+2 = 4x^2$$

$$4x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 4 = 83$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{83}}{8}$$

$$x < -2$$

$$4x^2 + x + 2 = 0$$

нет реш.

$$\sqrt{83} = x$$

$$(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 0$$

$$4x^2 - x + \frac{1}{16} = 0$$

$$(2x - \frac{1}{4})^2 - \frac{83}{16} = 0$$

$$2x = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{83}}{4}$$

$$x = -\frac{1}{8} +$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{1-\sqrt{83}}{8}; \frac{1+\sqrt{83}}{8}] \cup [2; \infty)$$

$$-0,75$$

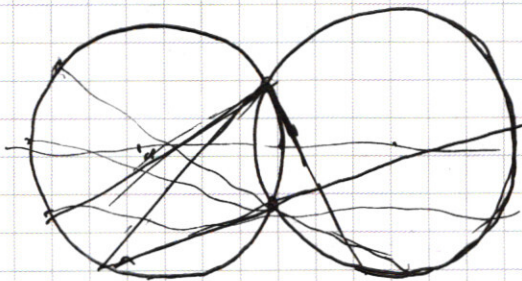
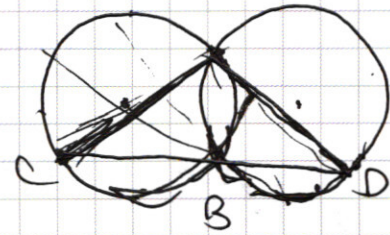
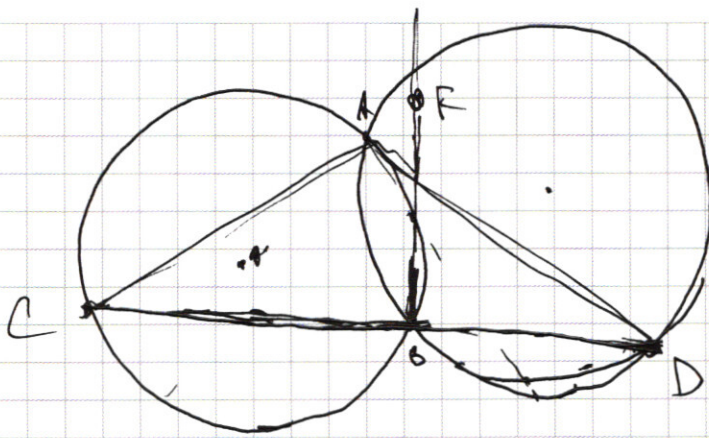
$$5 - 5$$

$$(1,25 - 0,75^2) (1,25 - \frac{3}{4})$$

$$5 \pm 3,5$$

$$1,25 - 2,25$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{1-\sqrt{83}}{8}; \frac{1+\sqrt{83}}{8}] \cup [2; \infty)$$

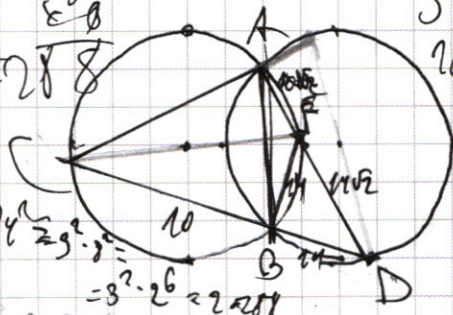


402.

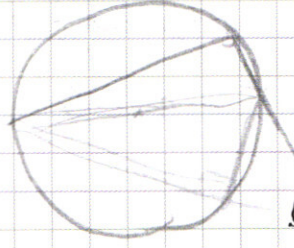
49-22



$$\begin{array}{r} 864 \\ 31 \\ \hline 576 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 5 \quad 12 \quad 13 \\ 10 \quad 24 \quad 26 \end{array}$$



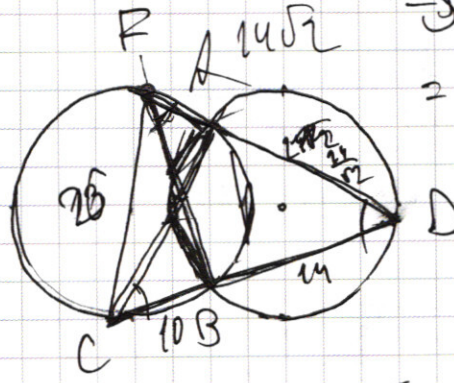
$$26^2 = 24^2 + 10^2$$

$$578 = 289 - 2$$

$$163 \cdot 4 = 400 + 280 - 4 =$$

$$676 - 98 = 578$$

$$\frac{14\sqrt{2}}{24} = \frac{14\sqrt{2} \cdot 14}{14\sqrt{2} \cdot 24}$$



$$AP = 24\sqrt{2} - 14\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$$\frac{24}{\sqrt{2}} - 14\sqrt{2} = AP = \frac{24 - 14\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$14\sqrt{2} - \frac{24}{\sqrt{2}} = \frac{28 - 24}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$668 = 334 \cdot 2 = 167 \cdot 4 =$$

$$AP = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$24\sqrt{2} - 14\sqrt{2}$$

$$AP^2 =$$

$$AC = 26^2 - 8 = 676 - 8 = 668$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$b_1 + \dots + b_{3000} = b_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{2999}) = b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

$$b_1 + \dots + b_{3000} = \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} b_1 = 5$$

$$b_3 + \dots + b_{3000} = \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} b_1 q^2 = \frac{4}{30} 5$$

$$b_2 + \dots + b_{3000} = \frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1} b_1 q = k 5$$

$$\Rightarrow \frac{(q^{3000} - 1)q^2}{\frac{q^3 - 1}{\frac{q^{3000} - 1}{q - 1}}} = \frac{4}{30}$$

$$\frac{(q^{3000} - 1)q^2}{(q^{3000} - 1)(q^2 + q + 1)} = \frac{4}{30}$$

$$\begin{aligned} S_0 + S_3 &= 5 \\ S_0 + 40S_3 &= 55 \end{aligned} \Rightarrow 39S_3 = 50$$

$$39q^{3003} - 39q^2 = 4q^{3003} + 4q^{3001} + \dots + 4q^{3001} - q^2 - q - 1$$

$$k = \frac{(q^{3002} - 1)q(q - 1)}{(q^2 - 1)(q^{3001} - 1)} = \frac{(q^{3002} - 1)q}{(q + 1)(q^{3001} - 1)}$$

$$\frac{(q^{3002} + \dots + 1)q^2}{(q^{3000} + \dots + 1)(q^2 + q + 1)} = \frac{4}{30}$$

$$\frac{(q^{3001} + \dots + 1)q}{(q + 1)(q^{3000} + \dots + 1)}$$

$$\frac{4}{30k} = \frac{(q^{3003} - 1)q(q + 1)}{(q^{3002} - 1)(q^2 + q + 1)}$$

$$4x^4 + 4x^2 + 4 - 5x^2(x + 2) + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x + 2) + 4 \geq 0$$

$$x \leq 2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$(2x^2)^2 +$$

