

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1,

Разложите число 700 на множители

$$700 = 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$$

Заметим, что существует лишь два набора из восьми ^{натуральных} чисел, каждое из которых ~~меньше~~ меньше 10, и чтобы произведение чисел этого набора ~~равнялось~~ равно 700 —

$(7, 5, 5, 2, 2, 1, 1, 1)$ и $(7, 5, 5, 4, 1, 1, 1, 1)$.

Найдем количество чисел, состоящих из ^{цифр} ~~этих~~ первого набора. Кол-во вариантов расположения цифр единиц в 8-ом числе: $C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 56$. Варианты расположения двух пятерок в оставшихся пяти разрядах: $C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$. Аналогично для двух двоек в ост. цифр. разр.: $C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$. Для сборки остался единственный вариант. Тогда все варианты для первого набора: $56 \cdot 10 \cdot 3 = 1680$

Аналогично для второго набора:

Для четверки единиц: $C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$

Для двух пятёрок: $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

Для семерки и четверки — два варианта

Всего для второго набора — $70 \cdot 6 \cdot 2 = 840$

Всего для q^3 : $840 + 1680 = 2520$
Ответ: 2520

№2.

Обозначим знаменатель геом. прогрессии q
Заметим, что $q > 0$, т.к. все члены прогрессии
положительные

$$S = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

Запишем сумму S_1 для случая, когда $b_3, b_6, b_9, \dots, b_{3000}$ увеличены в 50 раз! Она будет
~~равна~~ равняться сумме прогрессий из членов,
номера которых при делении на 3 дают в остат-
ке 1, 2, 0!

$$S_1 = \frac{b_1((q^3)^{1000} - 1)}{q^3 - 1} + \frac{b_1 q ((q^3)^{1000} - 1)}{q^3 - 1} + \frac{50 b_1 q^2 ((q^3)^{1000} - 1)}{q^3 - 1} =$$
$$= \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} \cdot (1 + q + 50q^2) = 10S$$

$$\frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} \cdot \left(\frac{50q^2 + q + 1}{q^2 + q + 1} \right) = 10S \quad | : S$$

$$\frac{50q^2 + q + 1}{q^2 + q + 1} = 10$$

$$50q^2 + q + 1 = 10q^2 + 10q + 10$$

$$40q^2 + q - 9 = 0$$

$$D = 81 + 1440 = 1521 = 39^2$$

$$q_1 = \frac{9 + 39}{80} = \frac{48}{80} = 0,6$$

$$q_2 = \frac{9 - 39}{80} = -\frac{30}{80} \quad \text{— не подходит}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Запишем S_2 для случая, когда $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$ увеличены в 2 раза:

$$S_2 = \frac{b_1((q^2)^{1500} - 1)}{q^2 - 1} + \frac{2b_1q(q^2)^{1500} - 1}{q^2 - 1} = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}.$$

$$\cdot (1 + 2q) = n S \quad \left(n = \frac{S_2}{S} \right)$$

$$\frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} \left(\frac{2q + 1}{q + 1} \right) = n S \quad | : S$$

$$\frac{2q + 1}{q + 1} = n$$

$$\frac{2 \cdot 0,6 + 1}{0,6 + 1} = n$$

$$n = \frac{2,2}{1,6} = \frac{11}{8}$$

Ответ: 1,6 увеличится в $\frac{11}{8}$ раз.

№3.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24 \quad | \cdot \sqrt{2}$$

$$(x + 6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x^2 + 10x + 24) \sqrt{2}$$

$$(x + 6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x + 6)(x + 4) \sqrt{2}$$

$$(x + 6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} - (x + 6)(x + 4) \sqrt{2} = 0$$

$$(x + 6) (\sqrt{x^3 - 4x + 80} - (x + 4) \sqrt{2}) = 0$$

$$\begin{cases} x = -6 \\ \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x + 4) \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x + 4) \sqrt{2}, \quad x \geq -4$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2(x^2 + 8x + 16)$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$(x - 4)(x^2 + 2x - 12) = 0$$

$$(x - 4)(x + 1 + \sqrt{13})(x + 1 - \sqrt{13}) = 0$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = -\sqrt{13} - 1 \text{ — не подходит, т.к. меньше } -4$$

$$x_3 = \sqrt{13} - 1$$

Проверим знак подкоренного выражения при полученных значениях x :

$$(-6)^3 - 4 \cdot (-6) + 80 = -216 + 24 + 80 = -112 < 0$$

$$4^3 - 4 \cdot 4 + 80 = 64 - 16 + 80 = 128 > 0$$

$$(\sqrt{13} - 1)^3 - 4(\sqrt{13} - 1) + 80 = 13\sqrt{13} - 39 + 3\sqrt{13} - 1 - 4\sqrt{13} + 4 + 80 = 12\sqrt{13} + 41 > 0$$

$$\text{Ответ: } x = 4, x = \sqrt{13} - 1$$

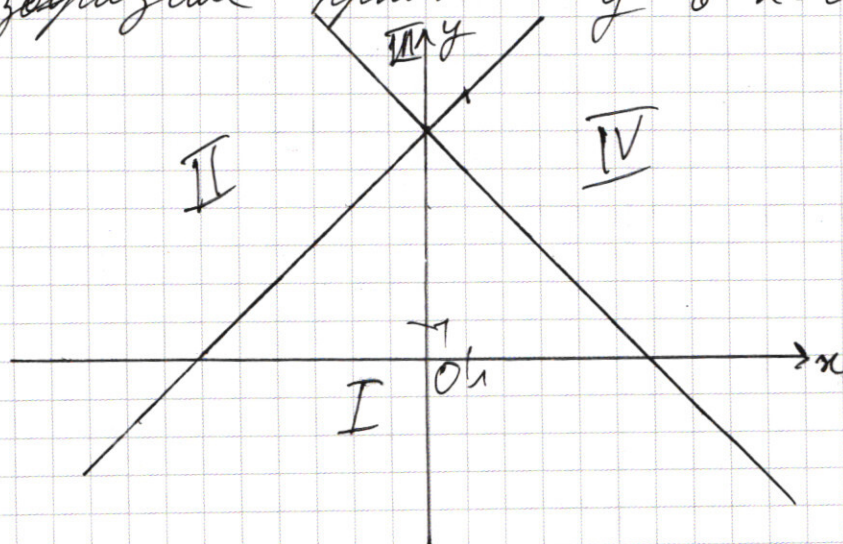
№7.

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12 & (1) \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

$$(2)$$

Рассмотрим первое уравнение

Изобразим прямые $y - 6 - x = 0$ и $y - 6 + x = 0$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Для обл. I: $y - 6 - x < 0$, $y - 6 + x < 0$

$$x - y + 6 + 6 - x - y = 12$$

$$-2y + 12 = 12$$

$$y = 0$$

Для обл. II: $y - 6 - x > 0$, $y - 6 + x < 0$

$$y - 6 - x - y + 6 - x = 12$$

$$-2x = 12$$

$$x = -6$$

Для обл. III: $y - 6 - x > 0$, $y - 6 + x > 0$

$$y - 6 - x + y - 6 + x = 12$$

$$2y - 12 = 12$$

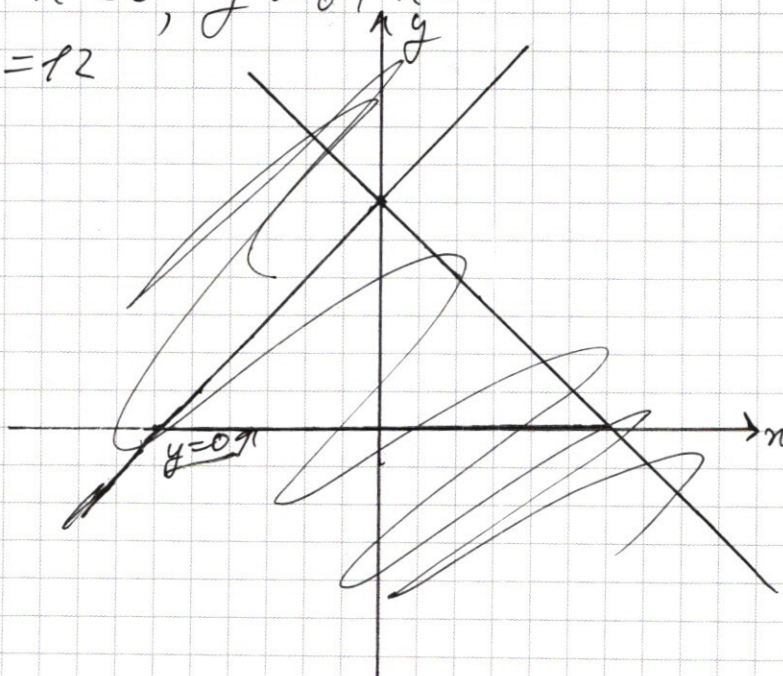
$$y = 12$$

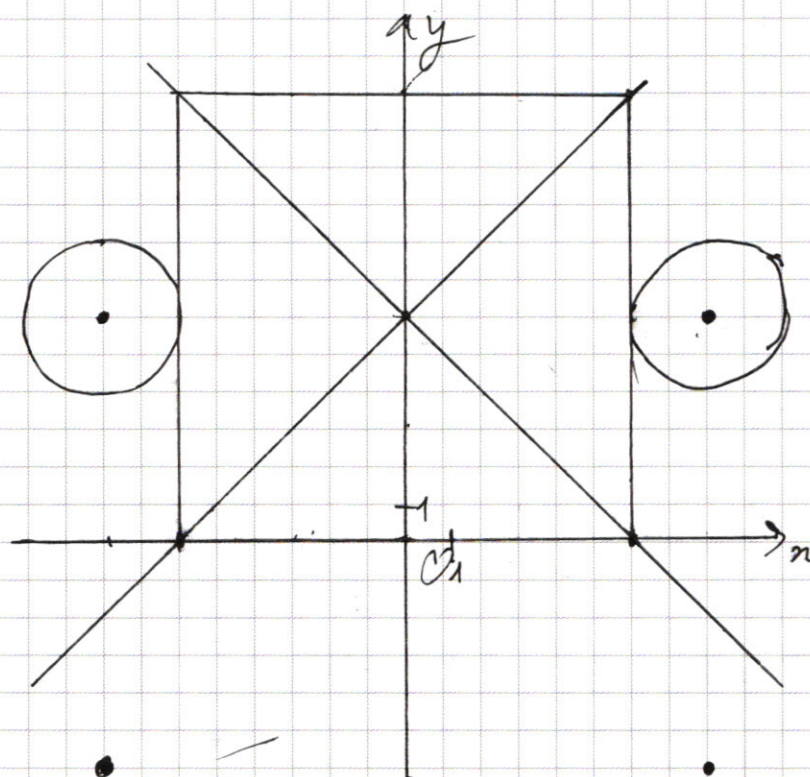
Для обл. IV: $y - 6 - x < 0$, $y - 6 + x > 0$

$$x - y + 6 + y - 6 + x = 12$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$





Для второго уравн:

1) $x \geq 0, y \geq 0$

$$(x-8)^2 + (y-6)^2 = a$$

2) $x \geq 0, y < 0$

$$(x-8)^2 + (y+6)^2 = a$$

3) $x < 0, y < 0$

$$(x+8)^2 + (y+6)^2 = a$$

4) $x < 0, y \geq 0$

$$(x+8)^2 + (y-6)^2 = a$$

Центры данных окружн.

радиуса $\sqrt{a}$ отмечены на рисунке

Система имеет 2 решения, когда окружности с центрами в точках $(8;6)$ и $(-8;6)$ касаются прямой $x=6$ и $x=-6$ соответственно, т.е. когда их радиус равен a , $\Rightarrow a=4$

Также сист. имеет 2 реш., когда окр. с центрами в $(8;6)$ и $(-8;6)$ пересекают квадрат в точках $(0;0)$ и $(0;12)$, т.е. радиус равен $\sqrt{8^2+6^2}=10$, т.е. $a=100$

Ответ: $a=4, a=100$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2n^4 + (2-n)(n+1)(n-\frac{2}{3}) \geq 0$$

$$2n^4 + n^2 - 4n + 3n^3 - 6n^2 + 4 \geq 0$$

$$2n^4 + 3n^3 - 5n^2 - 4n + 4 \geq 0$$

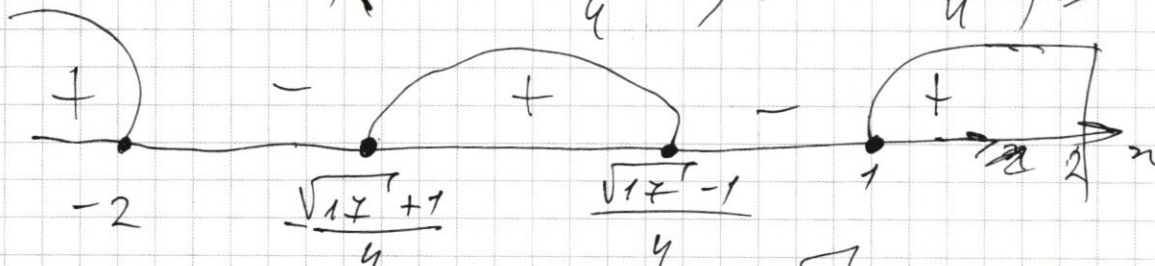
$$(n-1)(2n^3 + 5n^2 - 4) \geq 0$$

$$(n+2)(n-1)(2n^2 + n - 2) \geq 0$$

$$D = 1 + 16$$

$$(n+2)(n-1)(n - \frac{-1+\sqrt{17}}{4})(n - \frac{-1-\sqrt{17}}{4}) \geq 0$$

$$(n+2)(n-1)(n + \frac{\sqrt{17}+1}{4})(n + \frac{\sqrt{17}-1}{4}) \geq 0$$



$$n \in (-\infty, -2] \cup [-\frac{\sqrt{17}+1}{4}, \frac{\sqrt{17}-1}{4}] \cup [1, +\infty)$$

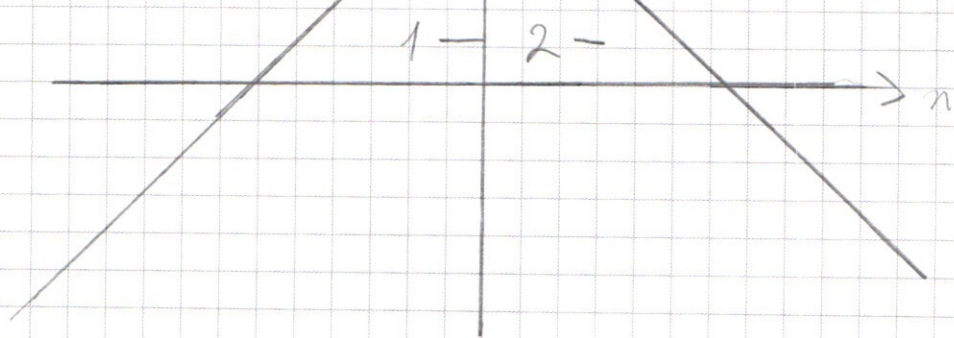
$$\begin{cases} |y-6-n| + |y-6+n| = 12 \\ (|n|-8) + (|y|-6) = a \end{cases}$$

$$y-n-6=0$$

$$y=n+6$$

$$y+n-6=0$$

$$y=-n+6$$



I

1 - 2 -

$$-x - y + 6 + 6 - x - y = 12$$

$$-2y + 12 = 12$$

$$y = 0$$

II

1 + 2 -

$$x - 6 - x - y + 6 - x = 12$$

$$-2x = 12$$

$$x = -6$$

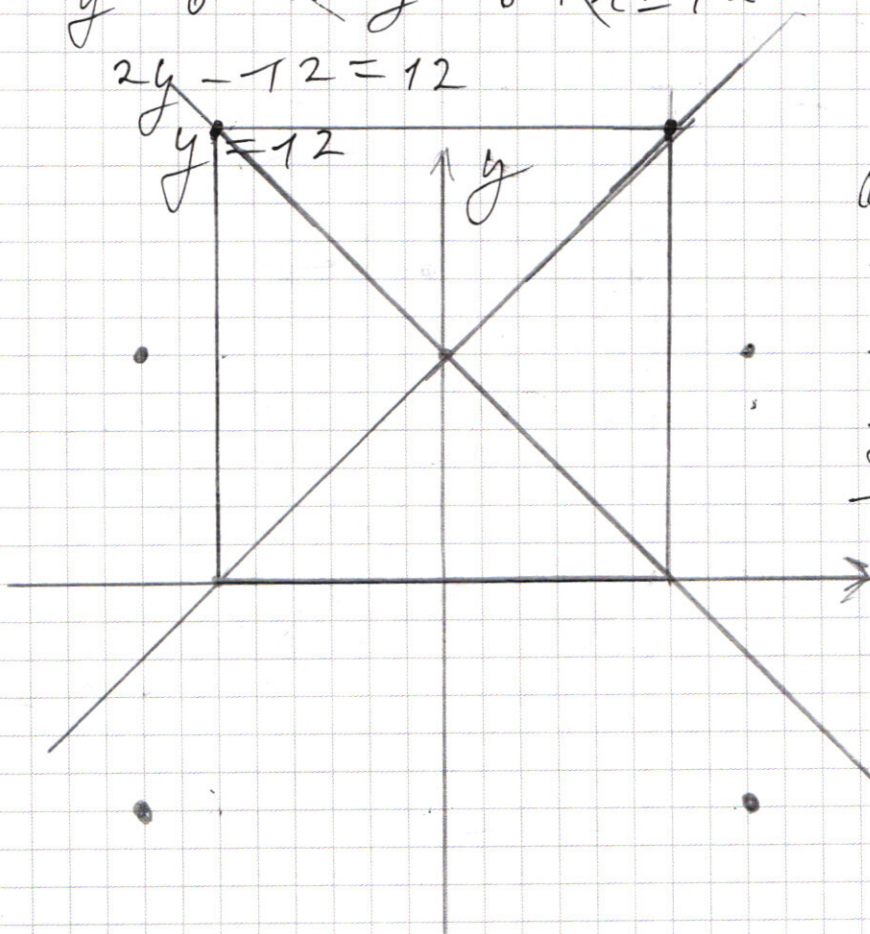
III

1 + 2 +

$$y - 6 - x + y - 6 + x = 12$$

$$2y - 12 = 12$$

$$y = 12$$



IV

1 - 2 +

$$x - y + 6 + y - 6 + x = 12$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

$$(x-8)^2 + (y-6)^2 = a$$

$$I \quad (x-8)^2 + (y-6)^2 = a$$

$$II \quad (x+8)^2 + (y-6)^2 = a$$

$$III \quad (x+8)^2 + (y+6)^2 = a$$

$$IV \quad (x-8)^2 + (y+6)^2 = a$$

$$a = 196 + 36 = 232$$

$$a = 4$$

$$14^2 + 18^2 = 196 +$$

$$+ 324 = 520$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$V_B = 2V_*$

$\frac{I_A}{I_0} = \frac{L}{2\pi}$

$L = \frac{I_A \cdot 2\pi}{I_0} = \frac{I_A}{R}$

$\tau_B = \frac{2\pi \cdot 4\sqrt{2}}{V_B} =$

$\tau_* = \frac{2\pi \cdot 10\sqrt{2}}{V_*}$

$x_B(t) = 4\sqrt{2} \cdot \cos\left(\arctg \sqrt{7} + \frac{2V_* t}{4\sqrt{2}}\right)$

$y_B(t) = 4\sqrt{2} \sin\left(\arctg \sqrt{7} + \frac{2V_* t}{4\sqrt{2}}\right)$

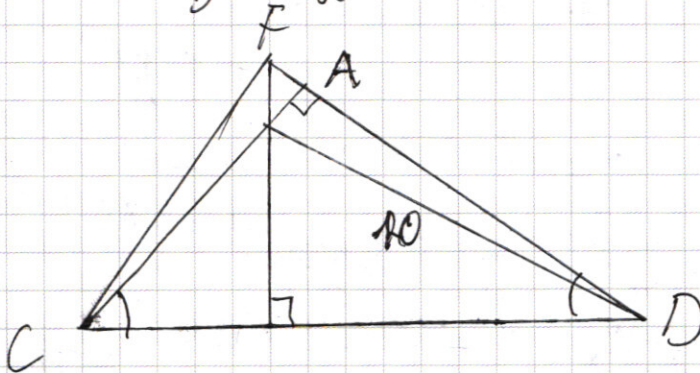
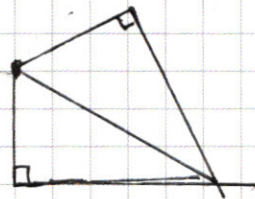
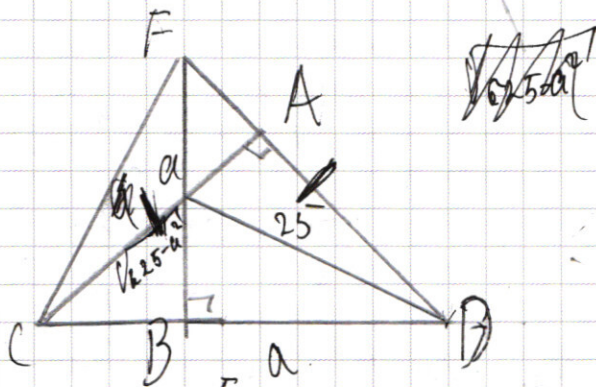
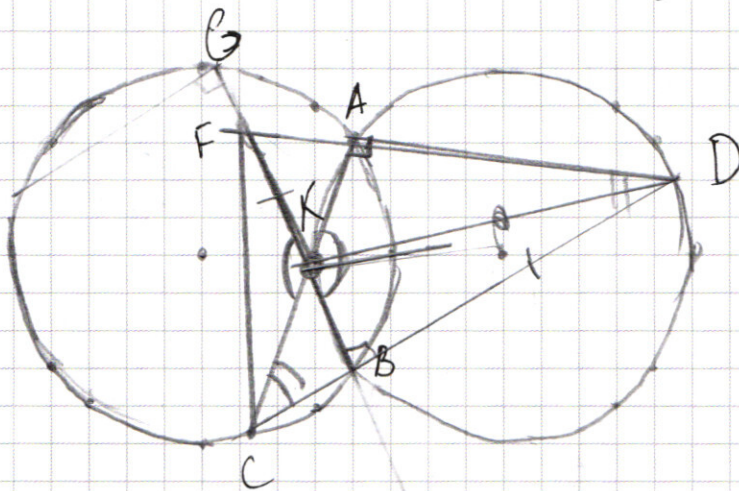
$z_2 = \left(4\sqrt{2} \cos\left(\arctg \sqrt{7} + \frac{2V_* t}{4\sqrt{2}}\right) - 10\sqrt{2} \cos\left(\arctg \sqrt{7} + \frac{2V_* t}{10\sqrt{2}}\right) + (4\sqrt{2})\right)$

$z_2 = 4\sqrt{2} \left(2 \cos\left(\arctg \sqrt{7} + \frac{V_* t}{2\sqrt{2}}\right) - 5 \cos\left(\arctg \sqrt{7} + \frac{V_* t}{10\sqrt{2}}\right)\right)$

$z_2(t) = 10\sqrt{2} \cos\left(\arctg \sqrt{7} + \frac{2V_* t}{10\sqrt{2}}\right)$

$z_2(t) = 40\sqrt{2} \sin\left(\arctg \sqrt{7} + \frac{V_* t}{10\sqrt{2}}\right)$

$$AC = AD$$





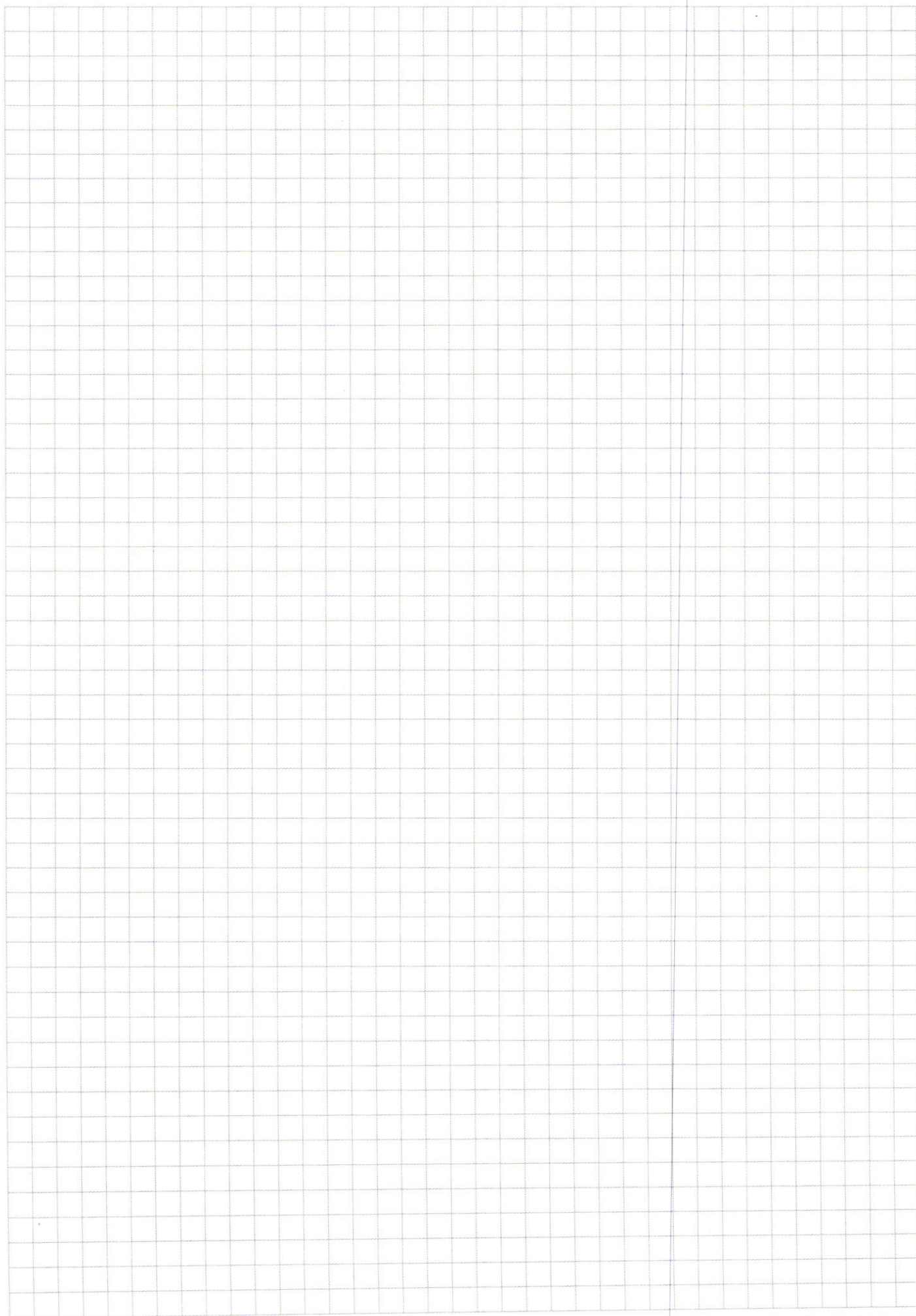
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|n-2| \geq 3n^2$$

$$|n-2|$$

$$n \geq 2$$

$$n-2 \geq 3n^2$$

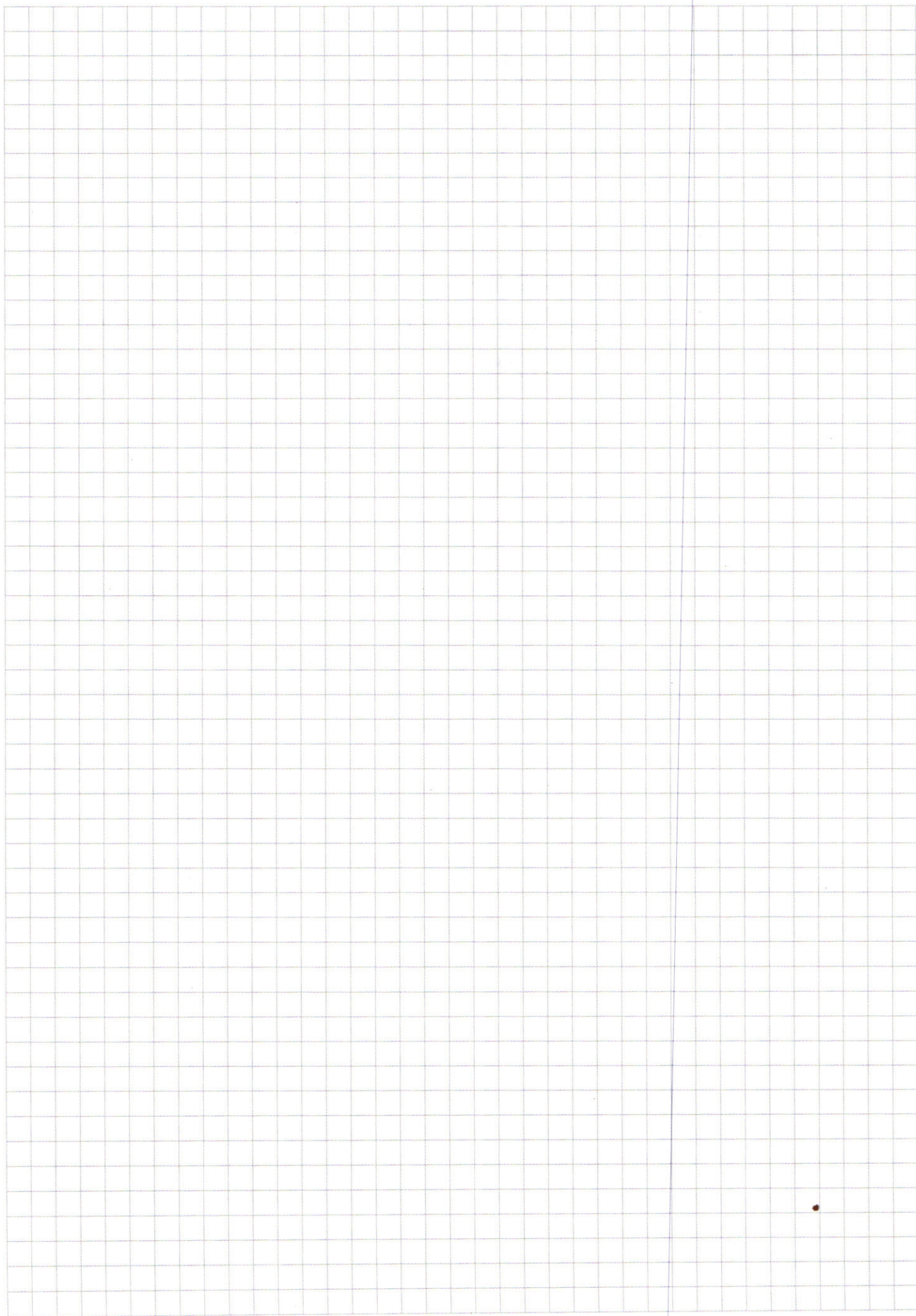
$$3n^2 - n + 2 \leq 0$$

нв

$$n < 2$$

$$2-n \geq 3n^2$$

$$3n^2 + n - 2 \leq 0$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$700 = 7 \cdot 5^2 \cdot 4$
 $C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$
 $C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$
 $C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 2 \cdot 4} = 70$
 $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

$8 - \text{ЗМ}$
 $7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$
 $7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$
 $70 \cdot 6 \cdot 2 + 2997 = 720 + 1680 = 2400$

$S_0 = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$
 $S_1 = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} + \frac{b_1 q_0(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} + \frac{50 b_1 q_0^2(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} =$
 $= \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} (q + 1 + 50q^2) = 10 S$
 $q + 1 + 50q^2 = 10$
 $50q^2 + q - 9 = 0$
 $D = 1 + 1800 = 1801$
 $q_1 = \frac{-1 + \sqrt{1801}}{100}$
 $q_2 = \frac{-1 - \sqrt{1801}}{100}$

$S_2 = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} + \frac{2 b_1 q(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = n S$
 $\frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} (1 + 2q) = n S$
 $\frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} \left(\frac{2q + 1}{q + 1} \right) = n S$
 $h = \frac{2q + 1}{q + 1} = \frac{2,2}{1,6} = 1,375$
 $h = \frac{11}{8}$

$50q^2 + q + 1 = 10q^2 + 10q + 10$
 $40q^2 - 9q - 9 = 0$
 $D = 81 + 1440 = 1521$
 $q_{1,2} = \frac{9 \pm 39}{80}$

$$\left(\frac{n}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{n^3 - 4n + 80} = n^2 + 10n + 24$$

$$\frac{(n+6)}{\sqrt{2}} \sqrt{(n+4)} \sqrt{n^3 - 4n + 80} = (n+6)(n+4)$$

$$1 \ 2 \ 4 \ 5 \ 8 \ 10 \ 20 \ 40 \ 80_3$$

$$n^3 - 4n + 80 = 0$$

$$\sqrt[3]{40} \approx 3.42$$

$$\frac{(n+6)}{\sqrt{2}} \sqrt{n^3 - 4n + 80} = (n+6)(n+4) \sqrt{2}$$

$$(n+6) \left(\sqrt{n^3 - 4n + 80} - (n+4) \sqrt{2} \right) = 0$$

$$\left(\sqrt{13} - 1 \right)^3 = 13\sqrt{13} - 39 + 3\sqrt{13} + 1 - 4\sqrt{13} + 4 + 80 =$$

$$\left[\begin{array}{l} n = -6 \\ \sqrt{n^3 - 4n + 80} = (n+4) \sqrt{2} \end{array} \right. \quad n \geq -4 = 12\sqrt{13} + 42$$

$$n^3 - 4n + 80 = (n^2 + 8n + 16) 2$$

$$n^3 - 4n + 80 = 2n^2 + 16n + 32$$

$$n^3 - 2n^2 - 20n + 48 = 0$$

$$24 \ 689 - 1682 - 580 + 58 =$$

$$(20+9)^2 = 400 + 81 + 360 =$$

$$\begin{array}{r} 24 \ 689 \\ 841 \\ \times 23848 \\ 8 \\ \hline 190784 \end{array}$$

$$24689 \cdot 8 - 8 \cdot 841 + 20 \cdot 58 + 58 =$$

$$= 8(24689 - 841) + 20 \cdot 58 + 58 =$$

$$= (n-4)(n^2 + 2n - 12) = 0$$

$$(n-4)(n+1)(n+3) = 0$$

$$24(2n^4 + n^2 - 4n - 3n^3) | n-2 | + 4 \geq 0$$

$$(n-4)(n+1+\sqrt{13})(n+1-\sqrt{13}) = 0$$

$$n \geq 2$$

$$2n^4 + n^2 - 4n - 3n^3 + 6n^2 + 4 \geq 0$$

$$n-2-3n^2 = 0$$

$$2n^4 - 3n^3 + 7n^2 - 4n + 4 \geq 0$$

$$3n^2 + n + 2 = 0$$

$$512 + 192 + 112 + 4 \geq 0$$

$$0 < 0$$

$$2n^4 + (n^2 - 4n + 4) - 3n^2 | n-2 | \geq 0$$

$$n < 2$$

$$2n^4 + (n-2)^2 - 3n^2 | n-2 | \geq 0$$

$$2 - n - 3n^2 = 0$$

$$2n^4 + | n-2 | (| n-2 | - 3n^2) \geq 0$$

$$3n^2 + n - 2 = 0$$

$$2n^4 + n^2 - 4n - 3n^3 + 6n^2 + 4 \geq 0 \quad n_2 = -1$$

$$2n^4 - 3n^3 + 7n^2 - 4n + 4 \geq 0$$

$$D = 1 + 24 = 25$$

$$n_1 = \frac{-1 \pm 5}{6} = \frac{2}{3}$$