

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

1) Разложим 700 на простые числа:

$$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

⇒ в числе должны содержаться:

1) 2, 2, 5, 5, 7 и три единицы, таких чисел:

(т.к. только при умножении числа на один получается то же число)

$$N_1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2! \cdot 2!} = 30 \cdot 56 = 1680$$

(2 одинаковые 2) (2 одинаковые 5)

2) 4, 5, 5, 7 и четыре единицы, таких чисел

$$N_2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2!} = 28 \cdot 30 = 840$$

$$N = N_1 + N_2 = 2520$$

Ответ: $N = 2520$

№ 2

$(b_n): b_1, b_2, \dots, b_{3000}$ (для $\forall b_k \geq 0$)

$S_{3000} = S$ Запишем формулу для S : $S = \frac{b_1 \cdot (1 - q^{3000})}{1 - q}$

где $q = \frac{b_2}{b_1}$

Для второго условия сумма равна $S + (b_{n+1} - b_n)$, где

$(b_{n+1}): 50b_3, 50b_4, \dots, 50b_{3000}$, а $(b_n)_2: b_3, b_4, \dots, b_{3000}$, тогда

$$10S = S + S(b_{n+1} - b_n)$$

$$\frac{10 \cdot b_1(1-q^{3000})}{1-q} = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q} + \frac{50 \cdot b_1 \cdot q^2(1-q^{3000})}{1-q^3} - \frac{b_1 q^4(1-q^{3000})}{1-q^3}$$

(1-50b₃) (коп-во членов, которые убавились в раз)

$$\frac{9b_1(1-q^{3000})}{1-q} = \frac{49b_1 q^2(1-q^{3000})}{(1-q)(q^2+q+1)}$$

$$40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$D = 9^2 + 40 \cdot 9 = 9 \cdot 169 = 3^2 \cdot 13^2 = (39)^2$$

$$q_{1,2} = \frac{9 \pm 39}{80} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} \\ 0,6 \end{bmatrix} \quad \text{т.к. } \forall b_k > 0 \Rightarrow q > 0 \Rightarrow -\frac{3}{8} \notin \mathbb{Q} \text{ и } q = 0,6$$

Для последнего случая: $S_3 = S_{(b_n)_3} + S_{(b_n)_4}$, где

$$(b_n)_3: b_1, b_3, b_5, \dots, b_{2999} \quad q_3 = q^2 \quad n = 15000$$

$$(b_n)_4: 2b_2, 2b_4, 2b_6, \dots, 2b_{3000} \quad q_4 = q^2 \quad n = 1500$$

$$S_3 = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q^2} + \frac{2b_1 \cdot q(1-q^{3000})}{1-q^2} = \frac{b_1(1-q^{3000})(1+2q)}{(1-q)(1+q)}$$

$$S = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q}$$

$$\frac{S_3}{S} = \frac{1+2q}{1+q}$$

$$\frac{S_3}{S} = \frac{1+2 \cdot 0,6}{1+0,6} = \frac{2,2}{1,6} = \frac{11}{8}$$

Ответ: S увеличится в $\frac{11}{8}$ раз.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\left(\frac{x+6}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ОДЗ: $x^3 - 4x + 80 \geq 0$, проанализируем: при $x = \{0; 4\}$ выражение ≥ 0 , при дальнейшем увеличении x оно только увеличивается, т.к. $4x$ не может быть больше x^3 (для последующих после данных чисел). Рассмотрим $x < 0$: при $x = -4$ выражение ≥ 0 , при $x = -5$ выражение < 0 и дальше только уменьшается, т.к. $-4x + 80$ могут скомпенсировать сильно уменьшающийся $x^3 \Rightarrow$ есть только один ноль (назовем его y) $y \in (-5; -4)$ $x \in [y; +\infty)$

$\Rightarrow$ можем сократить на $(x + 5)$ т.к. $x \geq -5$

$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2} (x + 4)$, здесь уже очевидное ОДЗ: $x \geq -4$

$$x^3 - 4x + 80 = 2(x^2 + 8x + 16) \quad (\text{можем возвести в квадрат, т.к. обе части неотрицательны})$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

По схеме Горнера:

$$1 \quad -2 \quad -20 \quad 48$$

$$x = 4$$

$$\Rightarrow (x - 4)(x^2 + 2x - 12) = 0$$

$$1 \quad 2 \quad -12 \quad 0$$

$$D = 52$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = -1 \pm \sqrt{13}$$

$$-1 - \sqrt{13} < 4 \quad (\text{т.к. } -\sqrt{13} < -3 \Rightarrow \text{ОДЗ})$$

$$\text{Ответ: } x = \{4; -1 + \sqrt{13}\}$$

№5

Дано:

$$v_{\text{вод.}} = 2 v_{\text{жук.}}$$

$$M_0(-2; -2\sqrt{7}) \text{ (водоизмеритель)}$$

$$N_0(5; 5\sqrt{7}) \text{ (жук)}$$

$$N - ? (p = p_{\min})$$

Т.к. и M_0 , и $N_0 \in O_{\text{кр}}(O; R) \cap O_{\text{кр}}(O; R')$

$O(0; 0)$, то:

Для водоизмерителя:

$$x_0^2 + y_0^2 = R^2$$

$$4 + 28 = R^2 \Rightarrow R = 4\sqrt{2}$$

Для жука:

$$25 + 175 = R'^2 \Rightarrow R' = 10\sqrt{2}$$

Тогда $p = p_{\min}$, когда жук и водоизмеритель находятся на прямой, проходящей через $O(0; 0)$, $p_{\min} = R' - R = 6\sqrt{2}$ (и жук с водоизмерителем должны находиться в одной четверти)

Т.к. они будут на одной прямой, то:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 32 \\ x_2^2 + y_2^2 = 200 \\ \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \\ (x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) = 72 (p_{\min}^2) \end{cases}$$

Необходимо выразить изменение координат через скорость и время.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓ 4

Рассмотрим два случая: x

1) $x < 2$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

По схеме Горнера

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 3 & -5 & -4 & 4 \\ x-1 & & & & & \end{array}$$

$x=1$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 5 & 0 & -4 & 0 \\ x-1 & & & & & \end{array}$$

$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & 0 & -4 \\ x-2 & & & & \end{array}$$

$x=2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -2 & 0 \\ x-2 & & & & \end{array}$$

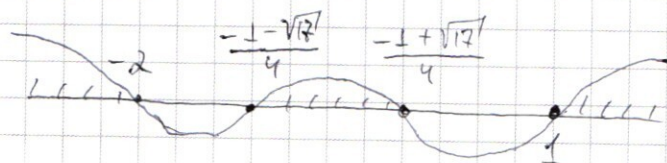
$$(x-1)(x+2)(2x^2 + x - 2) \geq 0$$

$$\begin{aligned} D &= 17 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} \end{aligned}$$

По методу интервалов



$$x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{17}}{2}] \cup [-2; 1] \cup [\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; +\infty)$$



$$x \in (-\infty; -2] \cup [\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}] \cup [1; +\infty)$$

Но т.к. $x < 2$ $x \in (-\infty; -2] \cup [\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}] \cup [1; 2)$

2) $x \geq 2$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 7x^2 > 0 \quad (\text{при } x \geq 2)$$

$$2x^4 - 3x^3 = x^3(2x-3) \geq 0 \quad (\text{при } x \geq 2)$$

$$7x^2 - 4x + 4 = (7x-4)x + 4$$

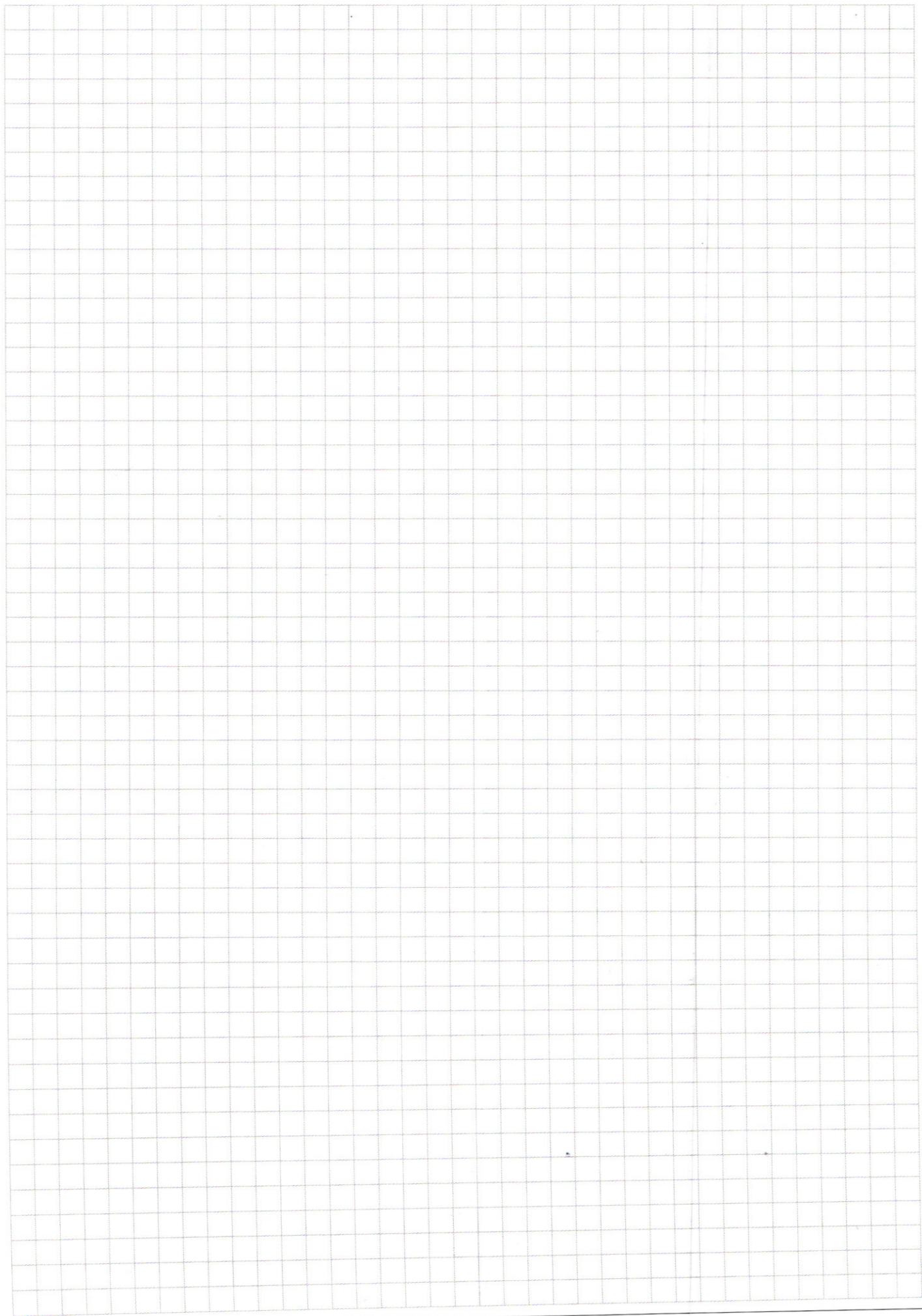
$$7x^2 - 4x \geq x(7x-4) > 0 \quad (\text{при } x \geq 2)$$

$$4 > 0 \Rightarrow 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

при $\forall x \geq 2$

Объединим ответы:

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup [\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}] \cup [1; +\infty)$



☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

2	3	-5	-4	4
---	---	----	----	---

$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0$$

2	5	0	-4
---	---	---	----

$$(x-1)(x^2(2x+5) - 4) \geq 0$$

2	5	0	-4
---	---	---	----

$$x^2(2x+5) - 4 = 0$$

2	5	0	-4
---	---	---	----

$$x^2(2x+5) = 4$$

$$32 - 24 + 28 - 8 + 4 = 32$$

$$2x^4 + 7x^2 > 0$$

$$2x^2 - 4x = 2x(x-2)$$

$$-3x^3 + 4x$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$8 = 60 = -49$$

$$-27 + 18 = -9$$

1	-2	-20	48
---	----	-----	----

1	2	-12	0
---	---	-----	---

$$(x-4)(x^2 + 2x - 12) \geq 0$$

$$(x-4)(2x^4 + 14x^3 + 48x^2 - 72x - 432) = 0$$

$$2x^4 \Rightarrow 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

2	-3	7	-4	4
---	----	---	----	---

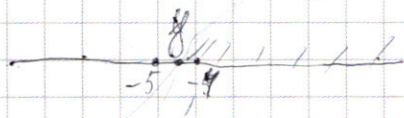
2	-2	5	-1
---	----	---	----

$$\frac{56}{8} - \frac{5}{8} = \frac{51}{8}$$

$$\frac{51}{32} - \frac{4 \cdot 32}{32} = \frac{87}{32}$$

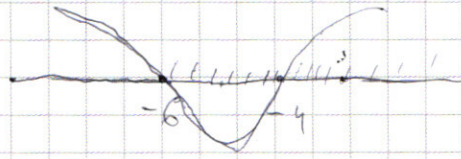
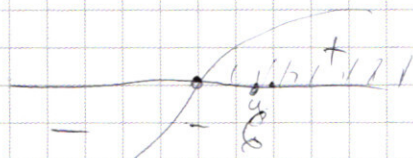
$$x^3 - 4x + 80 = 0$$

$$y \in (-5; -4)$$



$$\text{ODS: } x \in [-4; +\infty)$$

$$\frac{x+6}{\sqrt{2}}$$



$$100 - 96 = 4$$

$$x_1 = -6$$

$$x_2 = -4$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 26 \\ \hline 144 \\ + 480 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 2 \\ \hline 52 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2880 \\ - 1452 \\ \hline 1428 \end{array}$$

$$\frac{x^2 + 12x + 38}{2}$$

$$(x^3 - 4x + 80) = x^4 + 10x^3 + 24x^2 + 10x^3 + 100x^2 + 240x + 24x^2 + 240x + 576$$

$$32 - 286 = 264$$

$$+ 32x^3$$

$$x^5 - 4x^3 + 80x^2 + 12x^4 - 48x^2 + 360x + 36x^3 - 144x + 2880 = 2x^5 + 40x^3 + 296x^2 + 960x + 1452$$

$$x^5 + 10x^4 - 8x^3 - 264x^2 - 144x + 1728 = 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 10 \\ -8 \\ -264 \\ -144 \\ 1728 \end{array}$$

$$4$$

$$\begin{array}{r} 288 \\ - 144 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 464 \\ - 144 \\ \hline 320 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 14 \\ 48 \\ -144 \\ -432 \end{array}$$

$$32 \cdot 4 = 128$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 14 \\ 48 \\ -120 \\ -432 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 288 \\ + 144 \\ \hline 432 \end{array}$$

$$(x-4)(x^4 + 14x^3 + 48x^2 - 22x - 432) = 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 14 \\ 48 \\ -72 \\ -432 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 14 \\ 48 \\ -72 \\ -432 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 432 \\ 3 \overline{) 1296} \\ \underline{1296} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 432 \\ 32 \overline{) 14976} \\ \underline{12800} \\ 2176 \end{array}$$

$$240000$$

$$5294$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 14 \\ 48 \\ -144 \\ -432 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 14 \\ 48 \\ -144 \\ -432 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$7+6+5+4+3+2+1 = 28$$

24

N1

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} 145 \overline{) 15} \\ 15 \overline{) 35} \\ \underline{25} \\ 25 \overline{) 0} \end{array}$$

$$+ \sqrt{145}$$

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10^3$$

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$$

$$q = \frac{b_2}{b_1}$$

$$S_1 = \frac{b_1(1-q_1^{3000})}{1-q_1}$$

$$(b \geq 0)$$

N2

$$S_2 = \frac{b_1(1-q_1^{3000})}{1-q_1} + \frac{b_1 q_1^2(1-q_1^{3000})}{1-q_1^3} + \frac{b_1 q_1^2(1-q_1^{3000})}{1-q_1^3}$$

$$S_2 = \frac{b_1 q_1^2(1-q_1^{3000})}{1-q_1^3}$$

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_2 q_1}{b_1 q_1} = q_1$$

$$40q = \frac{40q_1(1-q_1^{3000})}{1-q_1} = \frac{40q_1^2(1-q_1^{3000})}{1-q_1^3}$$

N3

$$\left(\frac{x}{12} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$003: x^3 - 4x + 80 \geq 0$$

$$-125 + 20$$

$$x \neq 0$$

$$-64 + 46 + 80$$

$$x(x-2)(x+2) + 80 \geq 0$$

$$2 = q^2 + 4 \cdot 10 \cdot 8 = 3 \cdot 16 = 3^2 \cdot 13^2$$

$$x = 16$$

$$q_{1,2} = \frac{9 \pm 39}{80} = \frac{48}{80} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{2,2}{1,6} = \frac{22}{16} = \frac{11}{8}$$

$$S_3 = \frac{b_1(1-q_1^{3000})}{1-q_1^2} + \frac{2b_1 q_1(1-q_1^{3000})}{1-q_1^2} - \frac{b_1(1-q_1^{3000}) \cdot (1+2q_1)}{1-q_1^2}$$

$$\frac{S_3}{8} = \frac{1+2q_1}{1+q_1}$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 | x - 2 | + 4 \geq 0$$

$$x \geq 2$$

$$x < 2$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$3x - 24 + 28 - 8 + 4 =$$

$$256 \cdot 2 =$$

$$2 - 3 - 4 + 4$$

$$2 - 3 - 4 + 4$$

$$\frac{1}{8} - \frac{3}{8} + \frac{14}{8} - 2 + 4 =$$

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{14}{8} + 2 + 4 =$$

$$S_B = 2 S_{MC}$$

$$M_0(-2; -2\sqrt{7})$$

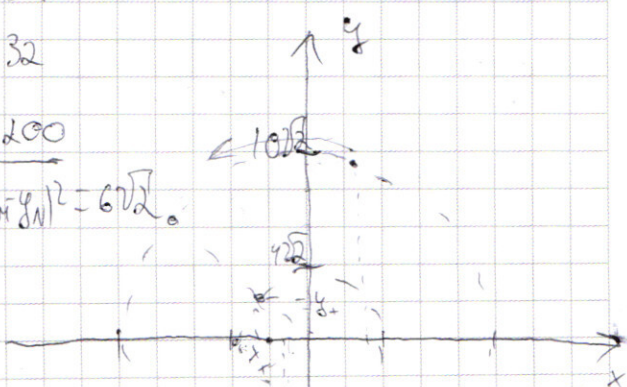
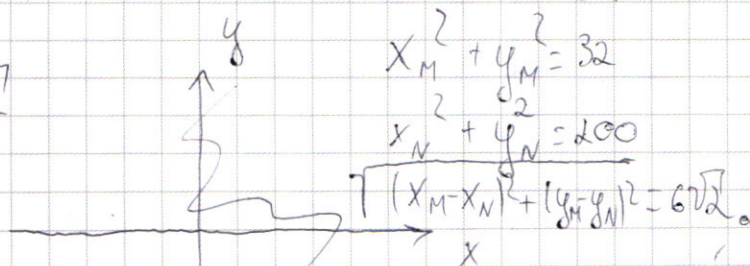
$$N_0(5; 5\sqrt{7})$$

$$(x_1^2 - x_2^2) / (x_1^2 + x_2^2) = 7/2$$

$$M_0: 4 + 28 = 32 \quad R = 4\sqrt{2}$$

$$N_0: 25 + 175 = 200 \quad R = 10\sqrt{2}$$

$$P = 6\sqrt{2}$$



$$Q = S_{MC}$$

$$2Q = S_B$$

$$\omega = \frac{Q}{10\sqrt{2}} = \frac{Q\sqrt{2}}{20}$$

$$\omega = \frac{2Q}{6\sqrt{2}} = \frac{Q}{3\sqrt{2}} = \frac{Q\sqrt{2}}{6}$$

$$x_2 = kx_1$$

$$y_2 = ky_1$$

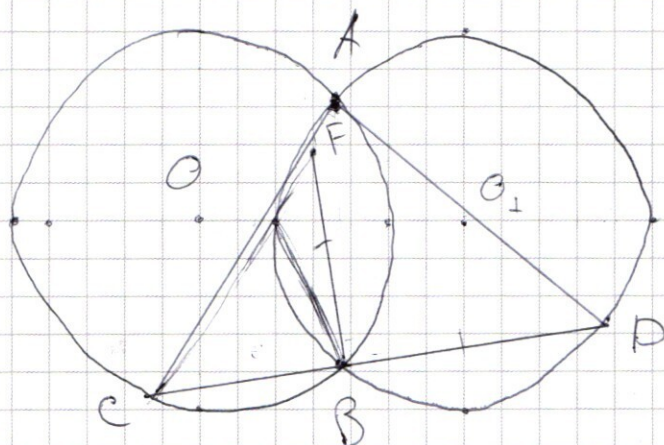
$$k = 2,5$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 32$$

$$k^2 x_1^2 + k^2 y_1^2 = 200$$

$$(k-1)^2 (x_1^2 + y_1^2) = 200 \cdot \frac{k-1}{k}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$R = 5$$

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12 \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

$$\frac{2\sqrt{R} \cdot \frac{2}{\sqrt{a}}}{a} = \frac{2\sqrt{R} \cdot \frac{2'}{\sqrt{a}}}{a}$$

$$x = \frac{R \cdot \frac{a\sqrt{2}}{a^2} \cdot x}{a} = R \cdot \frac{a\sqrt{2}}{a^2} \cdot x$$

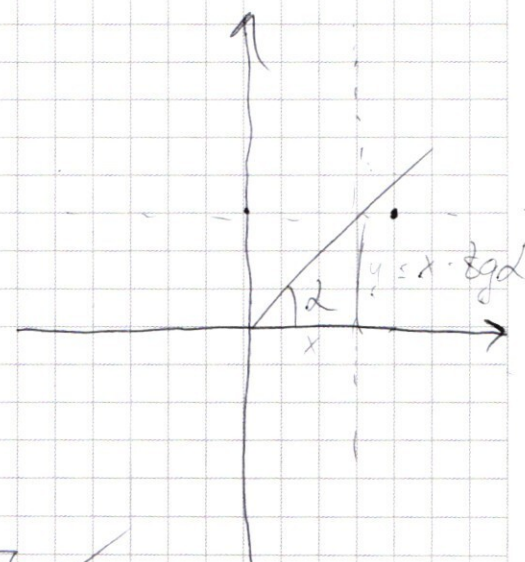
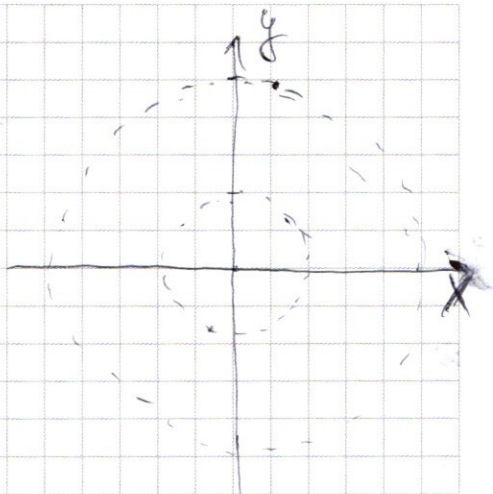
$$y = kx$$

$$y_1 = k_1 \cdot x_1 \quad y_2 = k_2 \cdot x_2$$

$$x_1^2 + k_1^2 x_1^2 = 32$$

$$k_1^2 x_1^2 + x_1^2 = 200$$

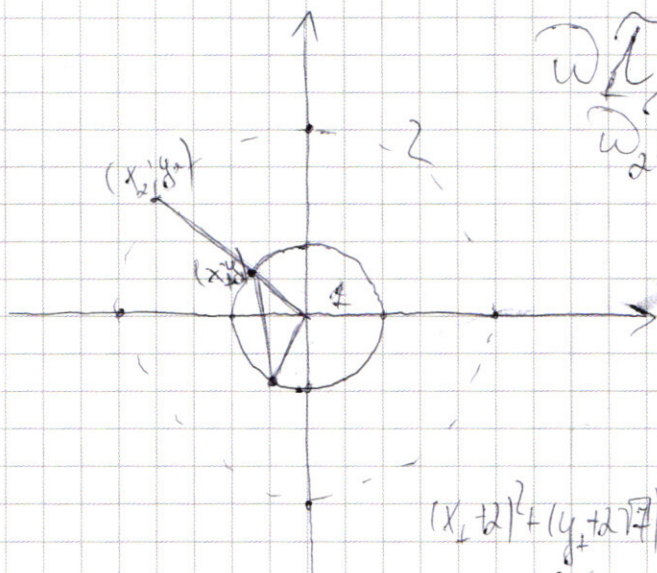
$$(x_1^2 - x_2^2)(1 + k^2) = 76$$



$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\sqrt{22}}{8} \quad k^2 = \frac{11}{8} \cdot \frac{11}{8} = \frac{121}{64}$$

$$1 + k^2 = \frac{32}{x_1^2}$$

$$32 \cdot \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = 44$$



$$\widehat{\alpha_1} = \alpha_1$$

$$\widehat{\alpha_2} = \alpha_2$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

$$v_1 = 2v_2$$

$$a_1 = a$$

$$a_1 = 2a$$

$$\omega_2 = \frac{a}{10\sqrt{2}}$$

$$\omega = \frac{a}{4\sqrt{2}}$$

$$(x_1 + 2)^2 + (y_1 + 2\sqrt{2})^2 = 4 - 2 \cos \alpha_1 \cdot 32$$

$$(x_2 - 5)^2 + (y_2 - 5\sqrt{2})^2 = 100 - 2 \cdot 200 \cdot \cos \alpha_2$$

$$\frac{9}{10\sqrt{2}} \cdot \widehat{\alpha_1} = \alpha_1$$

$$\frac{9}{4\sqrt{2}} \cdot \widehat{\alpha_2} = \alpha_2$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 2,5$$

$$\frac{\omega_1 \cdot \widehat{\alpha_1}}{2\pi} =$$

$$x_1^2 + k^2 x_1^2 = 32$$

$$x_2^2 + k^2 x_2^2 = 200$$

$$(x_2^2 + x_1^2)(k^2 + 1) = 72$$

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2^2} = \frac{50}{9}$$

$$x_2^2 = \frac{13}{4} x_1^2$$

$$\frac{9}{4} x_1^2 = \frac{50}{9} x_2^2$$