

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.1 Число a — восьмизначное $a_8 a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1$

$$\text{где } a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = 700$$

т.к. $700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$, то ~~восьмизначное~~ ~~число~~ ~~выбрав~~

два варианта заполнения: цифр: 1. $\{1; 1; 1; 2; 2; 5; 5; 7\}$

2. $\{1; 1; 1; 1; 4; 5; 5; 7\}$

получаем: $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} + \frac{8!}{2! \cdot 4!} = 2520$

Ответ: 2520

1.2 Дано: $S = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q}$ и $b_1, b_2 > 0$

коэффициент кратная трех это $b_3, b_6, \dots$ т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} (b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) = \frac{b_1 q^2 (1-q^{3000})}{1-q^3}$

тогда $10S = 50 \frac{b_1 q^2 (1-q^{3000})}{1-q^3} + \underbrace{\frac{b_1 (1-q^{3000})}{1-q^3}}_{\text{где } b_1 + b_2 + \dots + b_{2998}} + \underbrace{\frac{b_1 q (1-q^{3000})}{1-q^3}}_{\text{где } b_2 + b_5 + \dots + b_{2999}}$

тогда образуется система

$$\begin{cases} S = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q} \\ 10S = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q^3} (50q^2 + q + 1) \end{cases}$$

$$\frac{0}{0} \quad 10 = \frac{50q^2 + q + 1}{1-q^3} \cdot (1-q)$$

решим: $10 - 10q^3 = 49q^2 - 50q^3 + 1$

$$q = \frac{3}{5}$$



обозначим искомую S за x и составим систему

$$\begin{cases} x = 2 \frac{b_1 q (1 - q^{3000})}{1 - q^2} + \frac{b_1 (1 - q^{3000})}{1 - q^2} \\ S = \frac{b_1 (1 - q^{3000})}{1 - q} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{b_1 (1 - q^{3000})}{1 - q^2} (1 + 2q) \\ S = \frac{b_1 (1 - q^{3000})}{1 - q} \end{cases} \quad \frac{q}{2}$$

$$x = S \cdot \frac{(1 - q)(1 + 2q)}{1 - q^2} = S \cdot \frac{\frac{2}{5} + \frac{11}{5}}{\frac{2}{5} + \frac{16}{25}} = \frac{11}{8} S$$

Ответ: увеличится в $\frac{11}{8}$ раз, т.е. бюджет равен $\frac{11}{8} S$

нЗ $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \leq \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$

для начала проверим, что $x \neq -6$, тогда $x^2 + 10x + 24 = 36 - 60 + 24 = 0$

что < 0 , такое не может быть т.к. тогда $x^3 - 4x + 80 = -216 + 24 + 80 = -112$,
~~тогда~~ $x^3 - 4x + 80 \geq 0$

тогда перенесем $\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}$

и получим $\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \frac{x^2 + 10x + 24}{\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}}$ положим

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}x + 4\sqrt{2}, \text{ возведем в квадрат}$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

получаем ур-ие 3ей степени $x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$

по т.н. Безу находим корень: $x = 4$ и делим $-(x - 4)(x^2 + 2x - 12) = 0$

решим квадратное ур-ие $x^2 + 2x - 12$ $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{2} = -1 \pm \sqrt{13}$

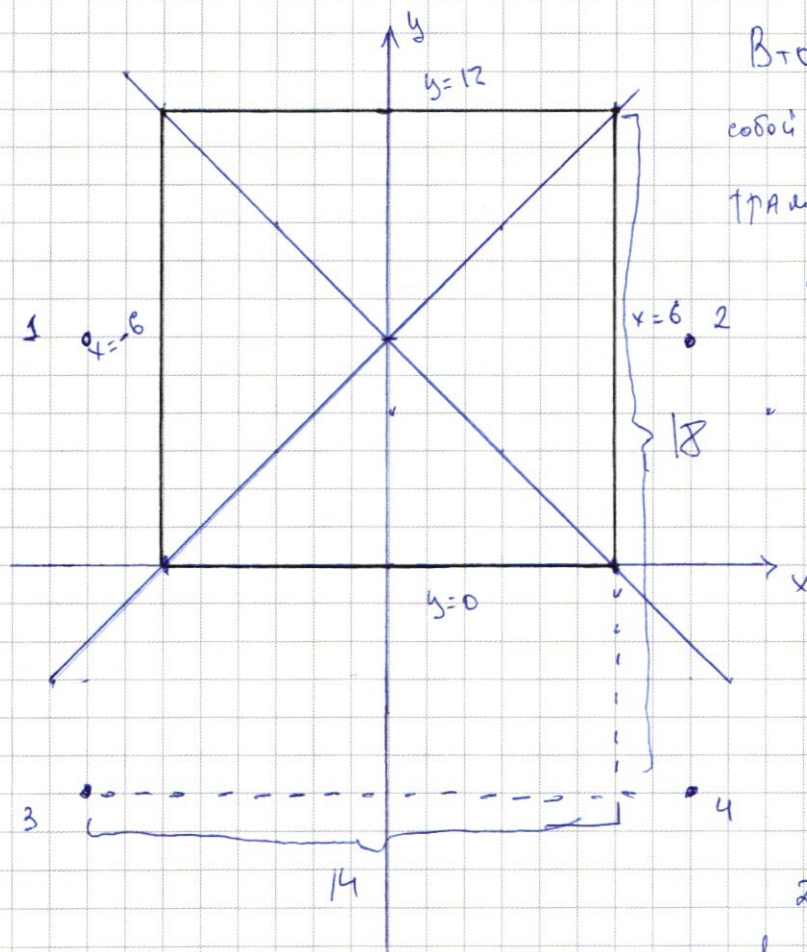
Ответ: $x = -1 - \sqrt{13}; -1 + \sqrt{13}; 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

① $|y-6-x| + |y-6+x| = 12$ // ① раскроем четыре случая и получим
сез график

② $((|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = 9$



Второй график представляет собой две окружности с центрами в точках 1 2 3 и 4 и радиусами 3

Тогда всего образуется два случая решения.

1. Окружности 1, 2 касаются боковых ребер квадрата

2. Окружности 3, 4

касаются квадрата в точках $(6; 12)$ $(6; -12)$

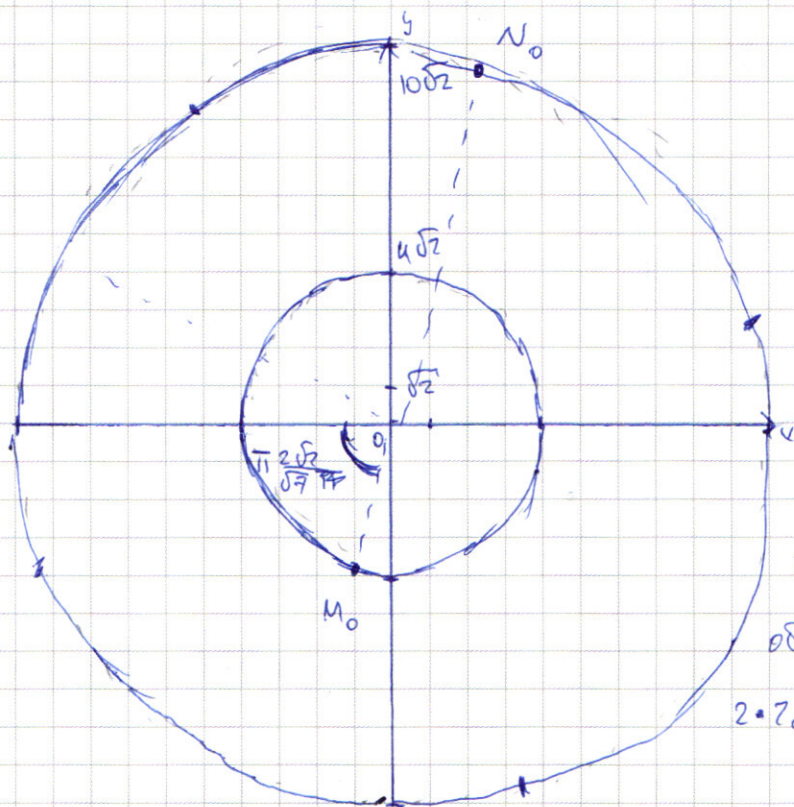
Мы рассматриваем всего два случая потому что наши графики симметричны относительно Oy , тогда будет верно только тогда, когда один из парных графиков касаются квадрата, а другая пара не имеет общих точек. Всего возможно два варианта (касание графиков окружностей 3, 4 в нижних вершинах квадрата не подходит, т.к. 1, 2 имеют общие точки)

Тогда решаем след. уравнение

$$\begin{cases} \sqrt{a} = 2 \\ \sqrt{a} = \sqrt{14^2 + 18^2} \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 4 \\ a = 520 \end{matrix}$$

Ответ: $a = 4, 520$

15



найдем их R

$$R_m = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2}$$

$$R_N = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{2})^2} = 10\sqrt{2}$$

возьмем за 1 эд времени
время за которое воз-
мерка сделает 1 полный оборот,
тогда чтобы точку считать
оборот требуется в

$2 \cdot 7,5$ (скорость + периметр) больше.
т.к. $v_m = \frac{v_N}{2}$ $R_m = 2,5 R_N$

выразим углы $\sin$ каждого (углы относительно Ox)
возвращения: $\frac{2\sqrt{2}}{5} \pi + \pi + 2 + \pi$

точка: $\frac{2\sqrt{2}}{5} \pi + \frac{2 + \pi}{5}$

Они должны быть сравнимы по mod 2

$$\frac{2\sqrt{2}}{5} \pi + \pi + 2 + \pi \equiv \frac{2\sqrt{2}}{5} \pi + \frac{2 + \pi}{5}$$

это будет $1 + 2 + \frac{2 + \pi}{5}$ найдем $\frac{2 + \pi}{5}$ найдем $\frac{2 + \pi}{5}$ в диапазоне $(0; 5)$

т.к. после 5 циклов возвращая

вернется на позиции N_0 и M_0
(все повторится)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Найдем t : $t = \frac{5}{8} ; \frac{15}{8} ; \frac{25}{8} ; \frac{35}{8}$ (всего 4 встречи)

Нужно заметить, что ~~на~~ наименьшее расстояние, это когда
мук и возокерка находятся в одинаковых координатах
четвертей и образуют прямую с точкой $(0;0)$

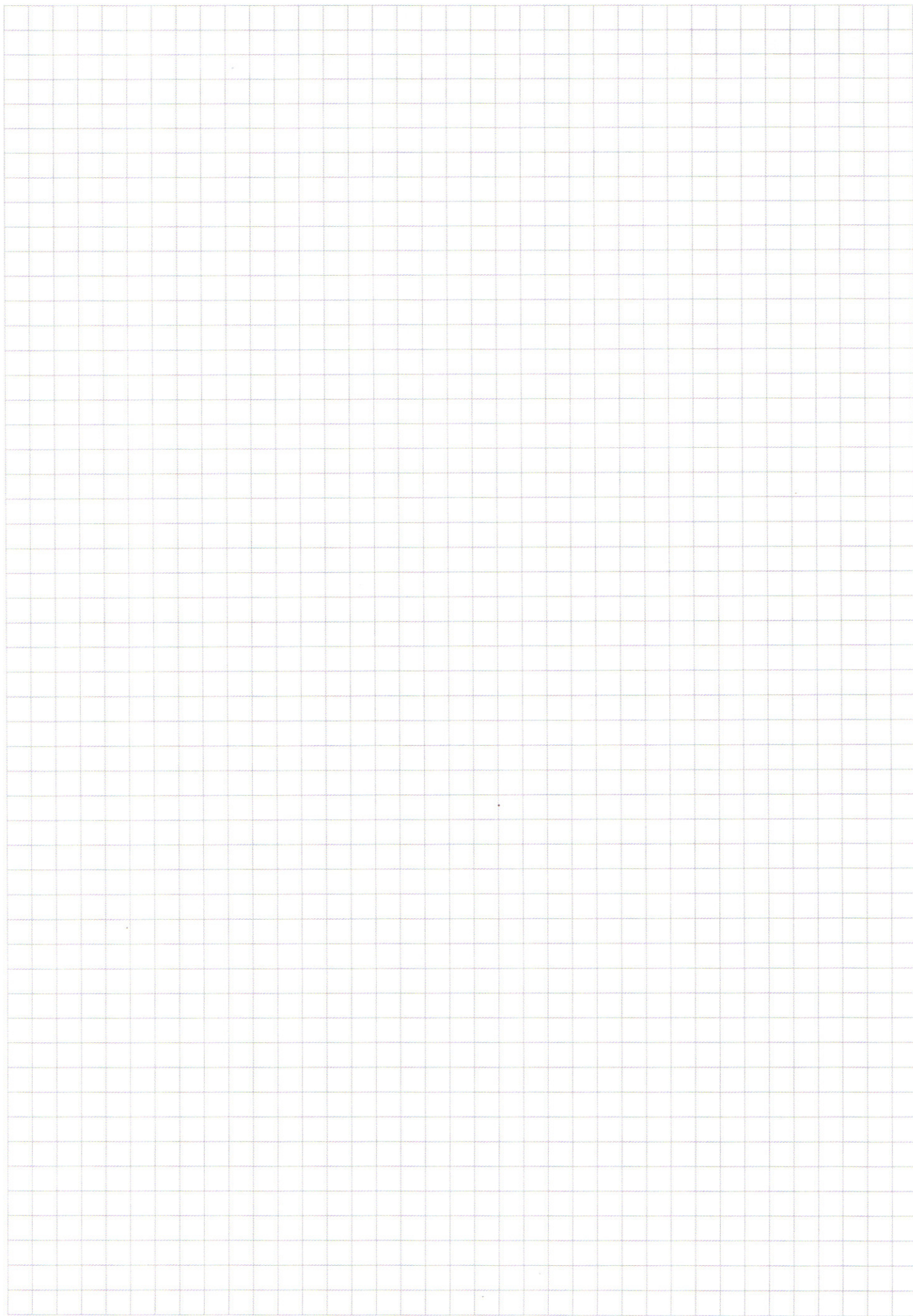
можно найти отношение $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ - это синус угла

т.к. $\sqrt{x^2+y^2} = 10\sqrt{2}$

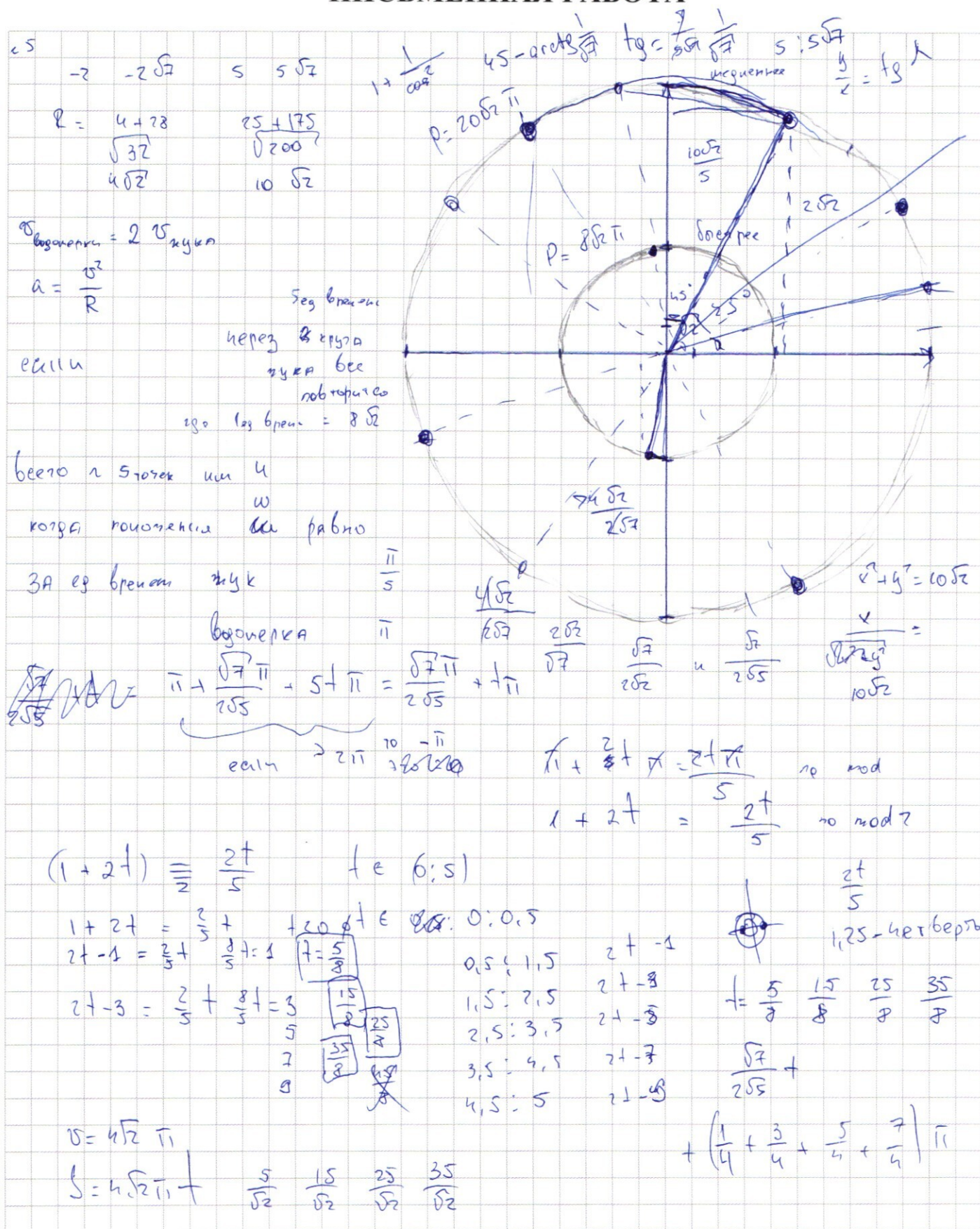
то $x = 10\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{5}} - \frac{3}{4} \right) = \sqrt{70} - 7,5\sqrt{2}$

т.к. ответ $(x;y)$ $(x;-y)$ $(-x;y)$ $(-x;-y)$ т.к. они через
каждое 90°

Ответ: $(\sqrt{70} - 7,5\sqrt{2}, \sqrt{70} - 7,5\sqrt{2})$
 $(\sqrt{70} - 7,5\sqrt{2}, 7,5\sqrt{2} - \sqrt{70})$
 $(7,5\sqrt{2} - \sqrt{70}, \sqrt{70} - 7,5\sqrt{2})$
 $(7,5\sqrt{2} - \sqrt{70}, 7,5\sqrt{2} - \sqrt{70})$



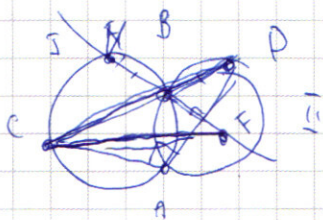
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{7}}{205} = \frac{3}{4}$$

$$x^2 = (x^2+y^2) \left(\frac{7}{10} - \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{80}} + \frac{9}{25} \right) \quad \frac{35}{50} \quad \frac{18}{50} \quad \frac{53}{50}$$

$$y^2 \left(\frac{53}{50} - \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{80}} \right) = \left(\frac{\sqrt{63}}{80} - \frac{3}{50} \right) x^2$$

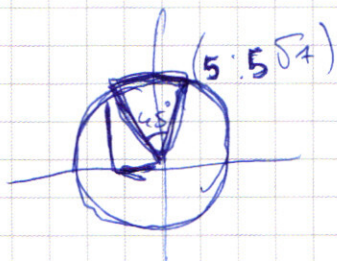


$$x = \frac{5 \cdot 1682 \cdot 57}{205} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 57}{4}$$

$$570 = 7.5 \sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 75 \\ \hline 75 \\ 105 \\ \hline 1125 \end{array}$$

$$182.5 -$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 700$

$700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = 210 \cdot 8 = 1680$

2. $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$ $S = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$

$(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) \cdot 50 + b_1 + b_2 + b_4 + b_5 + \dots + b_{2333} + b_{2993} = 10S$

$(b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) \cdot 2 + b_1 + b_3 + \dots + b_{2333} = ?$

$S = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ где $n = 3000$

$10S = \frac{b_1 q^2(1-q^{3000})}{1-q^3}$

$10S = \frac{b_1 q^2(1-q^{3000})}{1-q^3} = \frac{50 b_1 q^2(1-q^{3000})}{1-q^3} + \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q^3} + \frac{b_1 q(1-q^{3000})}{1-q^3}$

$10S = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q^3} \left(\frac{1}{2} + q + q^2 \right)$

$S = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q}$

$10 = \frac{1-q}{1-q^3} (1+q+q^2)$

$10 - 10q^3 = 1 + q + q^2 - q - q^2 - q^3 - 50q^3$

$40q^3 - 49q^2 + 9 = 0$

$q = \frac{3}{5}$

$S = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q} \left(1 + 2q \right)$

$S = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q}$

Ответ: $\frac{11}{8}$

$$3 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)^2 (x^3 - 4x + 80) = (x^2 + 10x + 75)^2$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}x + 4\sqrt{2} \quad |^2 \quad x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$\underline{x^3} - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$(x = 4)$$

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & -2 & -20 & 48 \\ u & 1 & 2 & -12 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 \mid x-4 \\ \underline{-x^3 + 4x^2} \\ 6x^2 - 20x + 48 \\ \underline{-6x^2 + 24x} \\ -4x + 48 \\ \underline{4x - 16} \\ 64 \end{array}$$

$$x^3 - 4x + 80 \geq 0$$

$x_1 =$

$$\begin{array}{ccccccc} & & -4 & & & & \\ \text{in} & \nearrow & & \searrow & & & \\ -4 & & 8 & & 1 & 0 & -4 & 80 \end{array}$$

$$(x-4)(x^2+2x-12)$$

$$D = 52$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{9} = (-4 \pm \sqrt{13})$$

$$a - 4,5 : 2,5$$

$$4\sqrt{2} \cdot \sqrt{128} = 80$$

$$37 \cdot 2 = 80$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$2^4 \quad 2x^4 + x^7 - 4x - 3x^2 \mid x - 2 \mid r_0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

	2	-3	7	-4	4
2	2	1	3		
-2	2	-7	47	-25	
3	2	3	2/16		
-3	2	-9	54		

$$\begin{array}{l} 2y = 24 \quad y = 12 \quad -2y = 0 \quad y = x + 6 \\ \text{c7} \quad -y + 8 + x + 8 - 8 + x \quad 2x = 12 \quad y - 6 - x = 0 \\ |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12 \quad y - 6 + x = 0 \end{array}$$

$$(x-8)^2 + (y-6)^2 = 9$$

⑦ $i \in (4, 40)$

$$a \in (232; 520)$$

