

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Разложим число 4900 на простые множители ^{N1}

$$4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

Можем получить 2 группы по 8 цифр, произведение которых равно 4900:

1) 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7, 7

2) 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7, 7

1-ая группа даёт $\frac{8!}{(2!)^4}$ различных чисел

2-ая группа даёт $\frac{8!}{3! \cdot (2!)^2}$ различных чисел

$$\frac{8!}{2^4} + \frac{8!}{3 \cdot 2^3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 (3+2) = 42 \cdot 20 \cdot 5 = 4200$$

Ответ: 4200

N2.

$(b_n): b_1, b_2, b_3, \dots, b_{3000}$ — геометрическая прогрессия

$$S_{3000} = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} = 5$$

Рассмотрим следующую последовательность:

$$b_1, b_1 \cdot q, b_1 \cdot q^2 \cdot 40, b_1 \cdot q^3, b_1 \cdot q^4, b_1 \cdot q^5 \cdot 40, \dots, b_1 \cdot q^{2999} \cdot 40$$

Пусть $x_1 = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 \cdot 40$, $x_2 = b_1 \cdot q^3 + b_1 \cdot q^4 + b_1 \cdot q^5 \cdot 40$ и т.д.

$$x_{1000} = b_1 \cdot q^{2992} + b_1 \cdot q^{2998} + b_1 \cdot q^{2999} \cdot 40$$

Заметим, что $x_2 = x_1 \cdot q^3$ и т.д. Следовательно, (x_n) — геометрическая прогрессия, знаменатель которой равен q^3

По условию

По формуле сумма всех членов (x_n) равна

$$55 = \frac{(b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 \cdot 40) (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{b_1 (1 + q + 40q^2) (q^{3000} - 1)}{(q - 1) (q^2 + q + 1)} =$$

$$= \frac{40q^2 + q + 1}{q^2 + q + 1} \cdot \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} = \frac{40q^2 + q + 1}{q^2 + q + 1} \cdot 5$$

$$\frac{40q^2 + q + 1}{q^2 + q + 1} = 5$$

$$\frac{40q^2 + q + 1 - 5q^2 - 5q - 5}{q^2 + q + 1} = 0$$

$$\frac{35q^2 - 4q - 4}{q^2 + q + 1} = 0$$

$$35(q^2 + q + 1) \cdot (35q^2 - 4q - 4) = 0$$

$$q^2 + q + 1 \neq 0$$

$$D = 16 + 16 \cdot 35 = 16 \cdot 36 ; \sqrt{D} = 24$$

$$\left[\begin{array}{l} q = \frac{4-24}{70} \\ q = \frac{4+24}{70} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} q = -\frac{2}{7} \\ q = \frac{2}{5} \end{array} \right] \text{ - не удовлетворяет условию задачи, т.к. по условию все члены } (v_n) \text{ положительные.}$$

Рассмотрим следующую последовательность:

$$v_1, v_1 \cdot q \cdot 3, v_1 \cdot q^2, v_1 \cdot q^3 \cdot 3, \dots, v_1 \cdot q^{2999} \cdot 3$$

Пусть $y_1 = v_1 + v_1 \cdot q \cdot 3$, $y_2 = v_1 \cdot q^2 + v_1 \cdot q^3 \cdot 3$ и т.д. $y_{1500} = v_1 \cdot q^{2998} + v_1 \cdot q^{2999} \cdot 3$. Заметим, что $y_2 = y_1 \cdot q^2$ и т.д. Значит, (y_n) - геометрическая прогрессия, знаменатель которой равен q^2 .

Найдем сумму всех членов (y_n) :

$$\frac{(v_1 + v_1 \cdot q \cdot 3) \cdot ((q^2)^{1500} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{v_1 \cdot (1 + 3q) \cdot (q^{3000} - 1)}{(q-1)(q+1)} = \frac{1+3q}{q+1} \cdot \frac{v_1(q^{3000} - 1)}{q-1} =$$

$$= \frac{1+3q}{q+1} \cdot S = \frac{1+\frac{6}{5}}{\frac{7}{5}+1} S = \frac{11}{5} : \frac{7}{5} S = \frac{11}{7} S$$

Ответ: увеличится в $\frac{11}{7}$ раз

№ 3.

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\text{Обз: } x^3 - 64x + 200 \geq 0$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 64x + 200} - (x+10)(x-4) = 0$$

$$(x+10) \left(\frac{\sqrt{x^3 - 64x + 200}}{2\sqrt{2}} - (x-4) \right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -10 \\ \sqrt{\frac{x^3 - 64x + 200}{8}} = x - 4 \end{array} \right]$$

$$x^2 + 6x - 40 = 0$$

$$D = 36 + 160 = 196$$

$$\sqrt{D} = 14$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-20}{2} \\ x = \frac{8}{2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x = -10 \\ x = 4 \end{array} \right]$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \frac{x^3 - 64x + 200}{8} \geq 0 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\frac{x^3 - 64x + 200}{8} = x^2 - 8x + 16 \quad | \times 8$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$216 - 384 + 72 = 0$$

$$x = 6 - \text{корень}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 8x^2 + 0x + 72 & x - 6 \\ \hline x^3 - 6x^2 & x^2 - 2x - 12 \\ \hline -2x^2 + 0x & \\ -2x^2 + 12x & \\ \hline -12x + 72 & \\ -12x + 72 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$(x - 6)(x^2 - 2x - 12) = 0$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ x^2 - 2x - 12 = 0 \end{cases}$$

$$D = 4 + 48 = 52; \quad \sqrt{D} = 2\sqrt{13}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2 - 2\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{2 + 2\sqrt{13}}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 1 - \sqrt{13} - \text{не удовлетворяет ОДЗ} \\ x = 1 + \sqrt{13} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } -10; 6; 1 + \sqrt{13}$$

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16 & (1) \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a & (2) \end{cases} \quad \begin{matrix} N.7. \\ - 2 \text{ решения.} \end{matrix}$$

$$1) \text{ I. } \begin{cases} y + x + 8 \geq 0 \\ y \geq -x - 8 \end{cases}$$

$$\text{I. I } \begin{cases} y - x + 8 \geq 0 \\ y \geq x - 8 \end{cases}$$

2) Уравнение задаёт на координатной плоскости 4 части окружностей радиусом $\sqrt{a}$ с центрами $(8; 8)$, $(15; -8)$, $(-15; 8)$, $(-15; -8)$, каждая окружность не выходит за пределы координатной четверти, в которой

$$y + x + 8 + y - x + 8 = 16$$

$$2y = 0$$

$$y = 0$$

$$I. II \quad y < x - 8$$

$$y + x + 8 - y + x - 8 = 16$$

$$2x = 16$$

$$x = 8$$

$$II. \quad y < -x - 8$$

$$II. I \quad y \geq x - 8$$

$$-y - x - 8 + y - x + 8 = 16$$

$$-2x = 16$$

$$x = -8$$

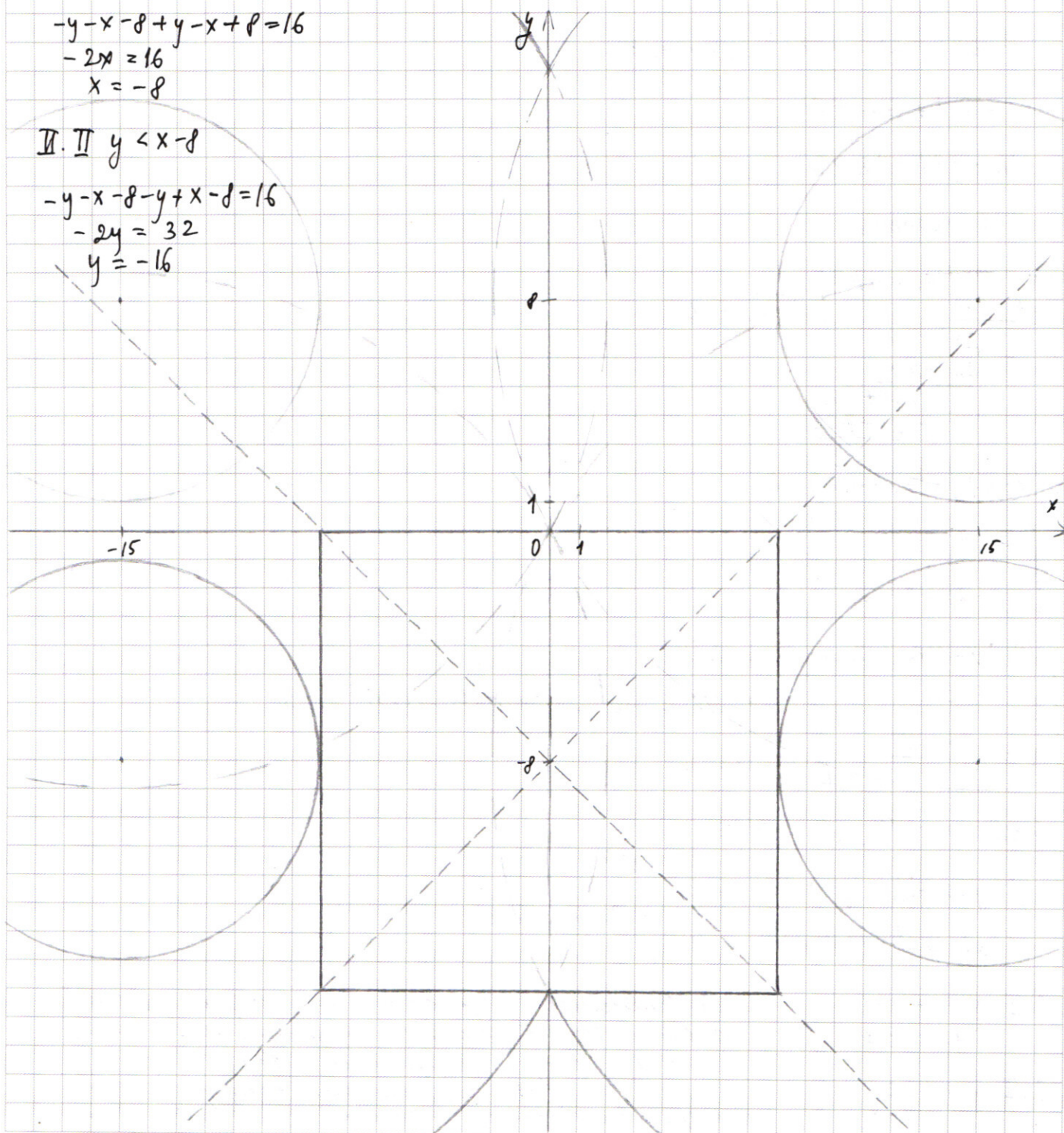
$$II. II \quad y < x - 8$$

$$-y - x - 8 - y + x - 8 = 16$$

$$-2y = 32$$

$$y = -16$$

2) *поставить её центр*



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \begin{array}{c} 4900 \\ 2450 \\ 1225 \\ 245 \\ 49 \\ 7 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 11225577 \\ 11145577 \end{array}$$

$$\frac{8!}{(2!)^4} = \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$$

$$\frac{8!}{(2!)^4} + \frac{8!}{3!(2!)^2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 (3+2) = 42 \cdot 20 \cdot 5 = 4200$$

$$\textcircled{2} (b_n): b_1, b_2, \dots, b_{3000} - \text{ГПП} \quad (x_n): b_1, b_2, b_3 \cdot 40, b_3 \cdot q^3, b_3 \cdot (q^3)^2, \dots, b_{3000} \cdot (q^3)^{999}$$

$$S_{\text{башни}} = S$$

$$(y_n): b_1, b_1 \cdot q \cdot 3, b_1 \cdot q^2 \cdot b_1 \cdot q^3 \cdot 3, \dots, b_{3000} \cdot 3$$

$$S_b = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} = S$$

$$S_x = \frac{(b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 \cdot 40)(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = 5S = \frac{b_1(1 + q + 40q^2)(q^{3000} - 1)}{(q - 1)(q^2 + q + 1)} = \frac{1 + q + 40q^2}{1 + q + q^2} \cdot \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$S_y = \frac{(b_1 + b_1 \cdot q \cdot 3)(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{b_1(1 + 3q)(q^{3000} - 1)}{(q - 1)(q + 1)} = \frac{1 + 3q}{q + 1} \cdot S$$

$$\frac{1 + q + 40q^2}{1 + q + q^2} = 5 \quad \frac{1 + q + 40q^2 - 5q - 5q^2}{1 + q + q^2} = 0 \quad \frac{35q^2 - 4q - 4}{q^2 + q + 1} = 0$$

$$\Delta = 16 + 16 \cdot 35 = 16(1 + 35) = 16 \cdot 36; \sqrt{\Delta} = 24$$

$$\begin{cases} q = \frac{4 - 24}{20} \\ q = \frac{4 + 24}{20} \end{cases} \quad \begin{cases} q = -\frac{2}{5} - \text{не ур. уса.} \\ q = \frac{28}{20} = \frac{7}{5} \end{cases}$$

$$\frac{1 + 3q}{q + 1} = \frac{1 + \frac{6}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{11}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{11}{7}$$

$$\boxed{\text{Увеличился в } \frac{11}{7}}$$

$$3) \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\text{ОДЗ: } x^3 - 64x + 200 \geq 0$$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right)^2 \sqrt{x^3 - 64x + 200}^2 = (x^2 + 6x - 40)^2$$

$$\left(\frac{x^2}{8} + \frac{50}{4} + \frac{2 \cdot x \cdot 5\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot 2} \right) (x^3 - 64x + 200) = x^4 + 12x^3 + 36x^2 - 80(x^2 + 6x) + 1600$$

$$\cancel{\frac{x^2+10}{8}} \left(\frac{x^2}{8} + \frac{5x}{2} + \frac{25}{2} \right) (x^3 - 64x + 200) = x^4 + 12x^3 + 36x^2 - 80x^2 - 480x + 1600 \quad | \times 8$$

$$(x^2 + 20x + 100)(x^3 - 64x + 200) = (x^4 + 12x^3 - 44x^2 - 480x + 1600) \cdot 8$$

$$x^5 + 20x^4 + 100x^3 + 20x^4 - 1280x^2 + 4000x + 100x^3 - 6400x + 20000 =$$

$$= 8x^4 + 96x^3 - 352x^2 - 3840x + 12800$$

$$x^5 + 32x^4 + 104x^3 - 1128x^2 + 1440x + 7200 = 0$$

$$-1 + 32 - 104 - 1128 - 1140$$

$$-32 + -2^5 + 2^9 - 104 \cdot 2^3 - 1128 \cdot 2^2 - 1140 \cdot 2 + 7200 =$$

$$= 2^3 (2^2 + 2^6 - 104 - 2^5 (-1 + 2^4 - 26 - 141 -$$

$$2^3 (-4 + 64 - 104 - 564 - 285 + 900) = 2^3 (-4$$

$$\left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \right)^2 (x^3 - 64x + 200) = x^4 + 12x^3 + 36x^2 - 80(x^2 + 6x) + 1600$$

$$\frac{x^2 + 20x + 100}{8} (x^3 - 64x + 200) = x^4 + 12x^3 + 36x^2 - 80x^2 - 480x + 1600$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4)$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 64x + 200} - (x+10)(x-4) = 0$$

$$(x+10) \left(\frac{\sqrt{x^3 - 64x + 200}}{2\sqrt{2}} - (x-4) \right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -10 \text{ — не ур. ОДЗ} \\ \sqrt{\frac{x^3 - 64x + 200}{8}} = x - 4 \end{array} \right.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^3 - 64x + 200 \geq 0 \\ x - 4 \geq 0 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\frac{x^3 - 64x + 200}{8} = x^2 - 8x + 16 \quad | \times 8$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128$$

$$x^3 - 8x^2 + 42 = 0$$

$$64 - 128 + 72 \quad 216 - 288 + 72 = 0$$

$$288 - 9^3 + 72 = 9^3 - 8(81 - 9)$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 8 \\ \hline 352 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 8 \\ \hline 384 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1280 \\ - 352 \\ \hline 1128 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2900 \\ - 2840 \\ \hline 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3840 \\ - 2400 \\ \hline 1440 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20000 \\ - 12800 \\ \hline 7200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1140 \quad | \quad 16 \\ - 112 \quad | \quad 7 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$A = 36 + 160 = 196$$

$$SD = 14$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-6 - 14}{2} \\ x = \frac{-6 + 14}{2} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -10 \\ x = 4 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -10 \\ x = 4 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 8 \\ \hline 288 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = 6$ - корень

$$\begin{array}{r} x^3 - 8x^2 + 72x - 72 \\ \underline{x^3 - 6x^2} \\ -2x^2 + 72x - 72 \\ \underline{-2x^2 + 72x} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^3 - 8x^2 + 0x + 72 \\ \underline{x^3 - 6x^2} \\ -2x^2 + 0x + 72 \\ \underline{-2x^2 + 12x} \\ -12x + 72 \\ \underline{-12x + 72} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 8x^2 + 0x + 72 \\ \underline{x^3 - 6x^2} \\ -2x^2 + 0x + 72 \\ \underline{-2x^2 + 12x} \\ -12x + 72 \\ \underline{-12x + 72} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 176 \\ 10 \ 56 \\ \underline{10 \ 56} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 176 \\ 10 \ 56 \\ \underline{10 \ 56} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 176 \\ 10 \ 56 \\ \underline{10 \ 56} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 176 \\ 10 \ 56 \\ \underline{10 \ 56} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 176 \\ 10 \ 56 \\ \underline{10 \ 56} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 176 \\ 10 \ 56 \\ \underline{10 \ 56} \\ 0 \end{array}$$

$$(x-6)(x^2-2x-12)=0$$

$$\begin{cases} x=6 \\ x^2-2x-12=0 \end{cases}$$

$$D = 4 + 48 = 52; \sqrt{D} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2-2\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{2+2\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=6 \\ x=1+\sqrt{13} \\ x=1-\sqrt{13} \end{cases}$$

$$(1+\sqrt{13})^3 - 64(1+\sqrt{13}) + 200 \geq 0$$

$$\approx (1+\sqrt{13})((1+\sqrt{13})^2 - 64) + 200 = (1+\sqrt{13})(1+2\sqrt{13}+51) + 200 = 1+2\sqrt{13}-51+\sqrt{13}+26-$$

$$-51\sqrt{13}+200 = 100\sqrt{13}+173 = \sqrt{29929} - \sqrt{130000} > 0$$

$$\begin{cases} x=6 \\ x=1+\sqrt{13} \end{cases}$$

$$(4) 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 |x+2| + 4 \geq 0$$

$$1) x \leq -2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(2-x) + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 10x^2 + 5x^3 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4 - 5 + 11 - 4 + 4 = 10$$

$$4 - 5 + 11 - 4 + 4 = 10$$

$$2) x > -2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4 + 5 - 9 + 4 + 4 = 8$$

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \\ \underline{4x^4 - 5x^3} \\ -9x^2 + 4x + 4 \\ \underline{-9x^2 + 9x} \\ -5x + 4 \\ \underline{-5x + 5} \\ -1 \end{array}$$

$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$1 + 8 = 9$$

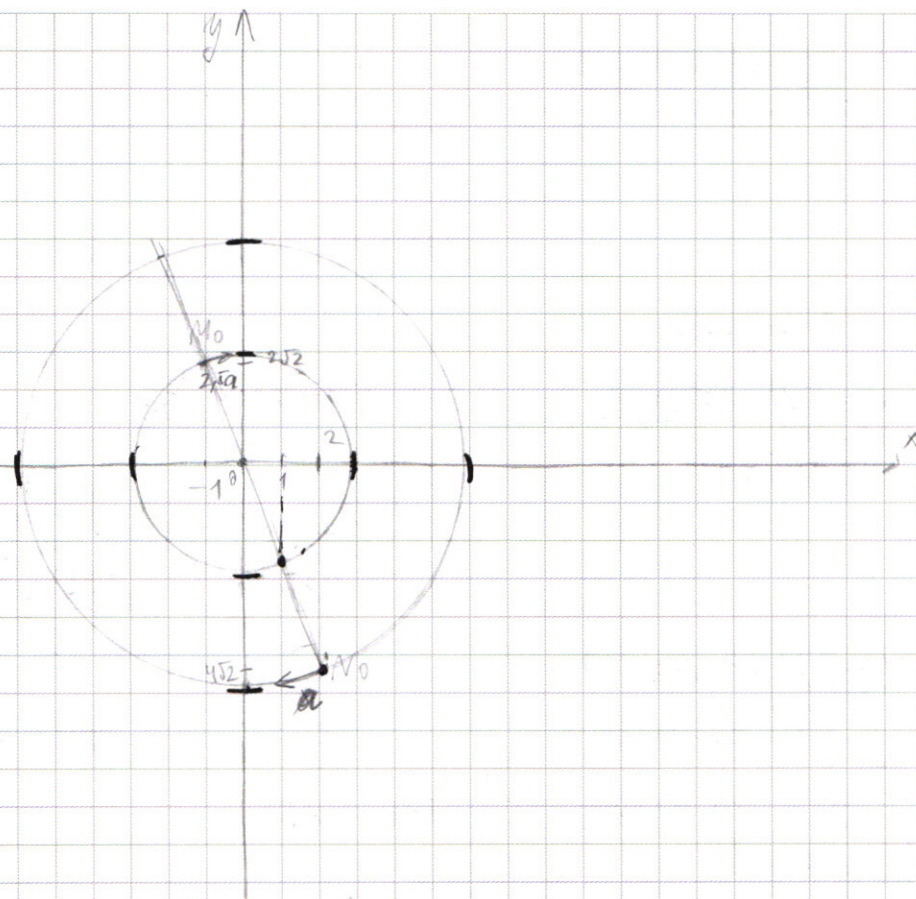
$$4 + 32 = 36$$

Карась: $x^2 + y^2 = 3$

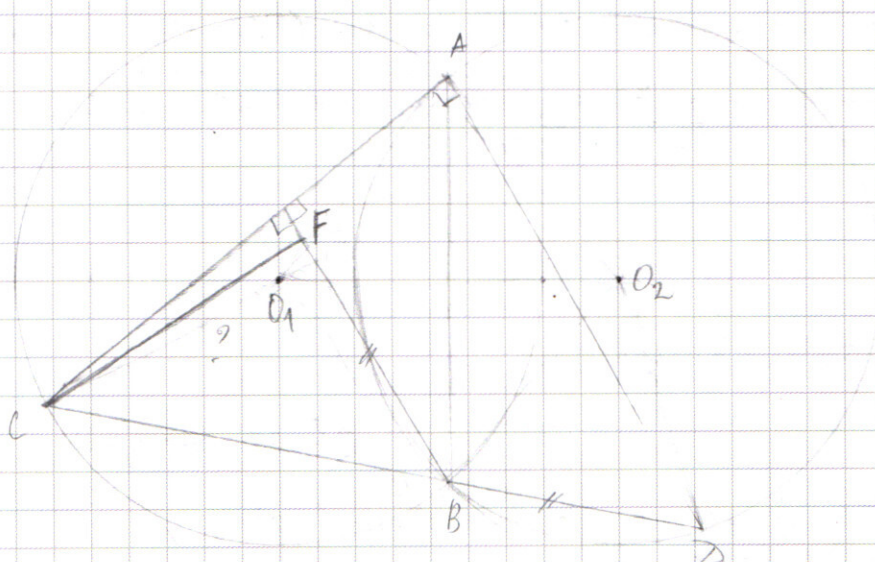
2 Пескарь: $x^2 + y^2 = 6$

$$x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0$$

$$4+32-(1+8) = 3$$



$$R = 13$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

Окружность, по которой
плавают карась
задается уравнением

$$x^2 + y^2 = 3,$$

пескарь —

$$x^2 + y^2 = 6$$

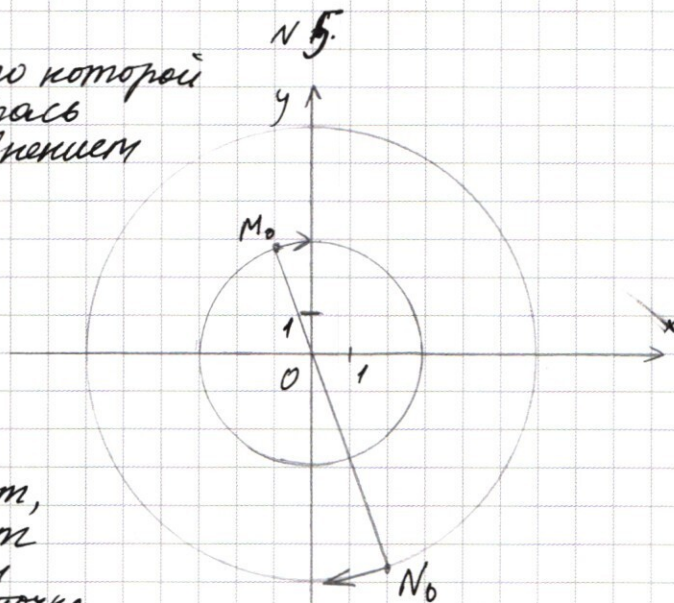
Когда пескарь
сделает 1 оборот,
карась сделает

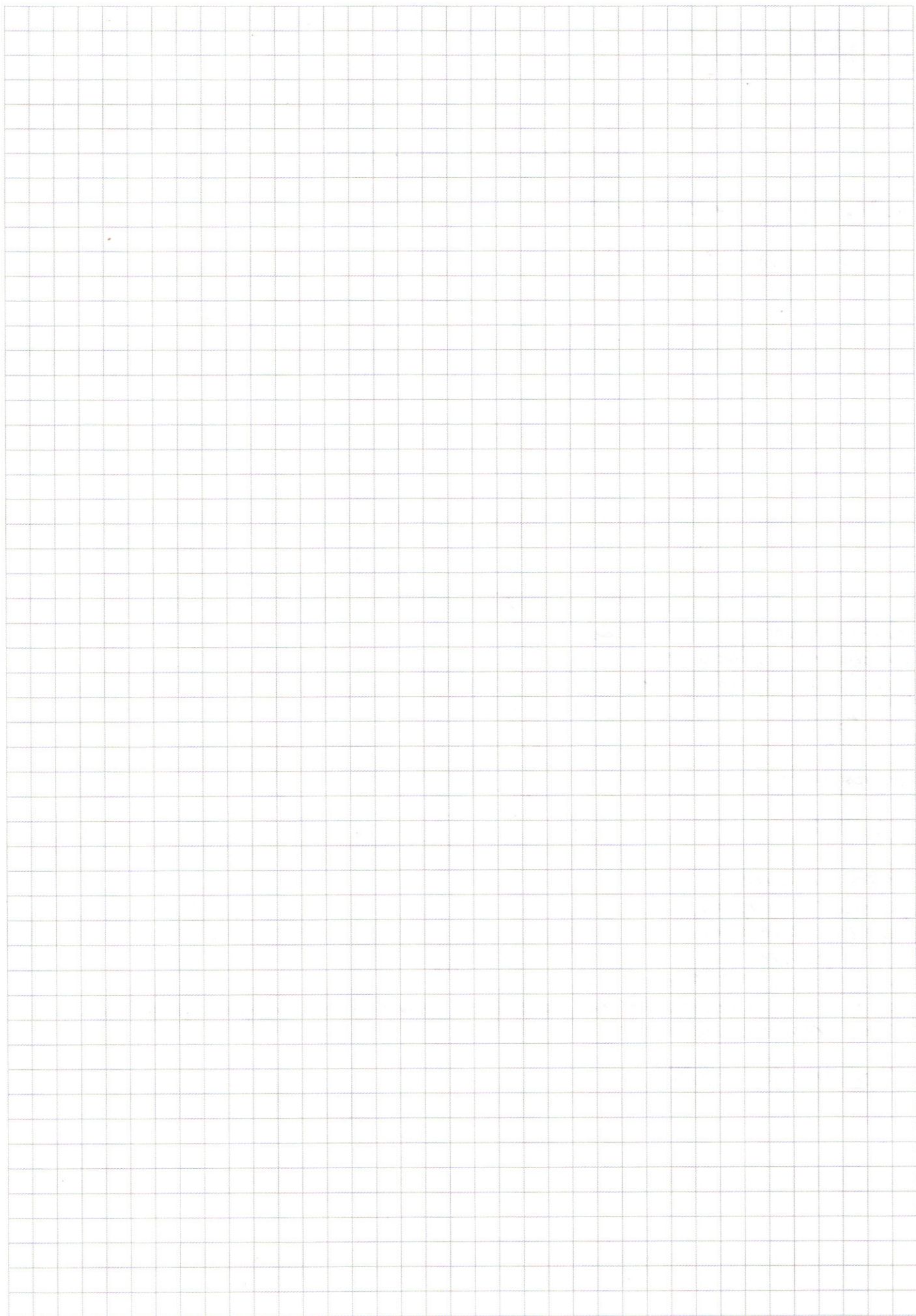
2,5 оборота и

окажется в точке

$(1; -2\sqrt{2})$, расстояние между рыбами будет равно 3,
т. е. минимальное

Ответ: $(2; -4\sqrt{2})$





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

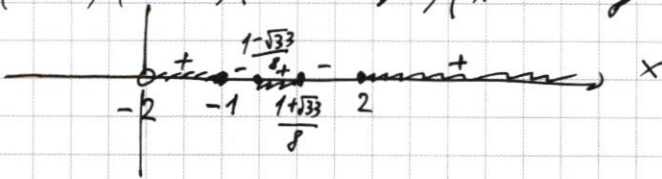
$$\begin{array}{r} 4x^3 - 9x^2 + 4 \quad | \quad x-2 \\ -4x^3 + 8x^2 \\ \hline -x^2 + 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4x^3 - 9x^2 + 0x + 4 \quad | \quad x-2 \\ -4x^3 + 8x^2 \\ \hline -x^2 + 0x + 4 \\ -x^2 + 2x \\ \hline -2x + 4 \\ -2x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$D = 1 + 32 = 33; \sqrt{D} = \sqrt{33}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{33}}{8} \\ x = \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \end{cases}$$

$$(x+1)(x-2)(4x^2-x-2) \geq 0$$

$$4(x+1)(x-2)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0$$

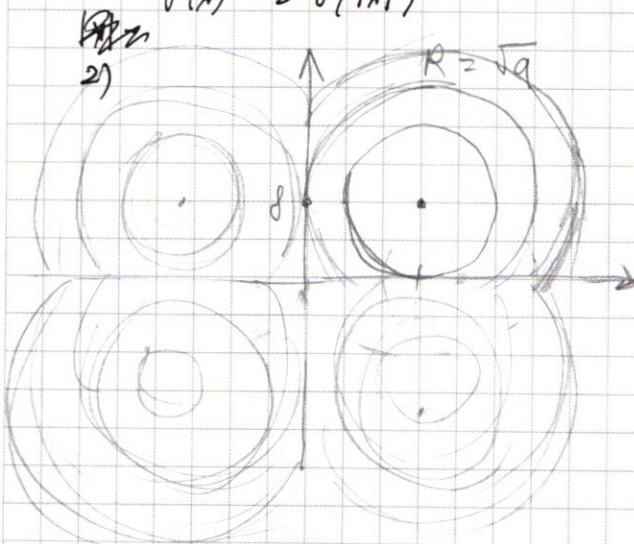


$$\frac{1}{16} - \frac{5}{8} + \frac{11}{4} - \frac{1}{2} + 4 = \frac{2-5+22}{8} + 2 =$$

$$\frac{4}{256} - \frac{5}{64} + \frac{11}{16} - 1 + 4 = \frac{1-5+44}{64} + 3 =$$

7) $|y+x+8| + |y-x+8| = 16$
 $(|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a$
 $f(x) \rightarrow 8/|x|$

- 2 реш.



$$a = 49,289$$

1) I. $y + x + 8 \geq 0$
 $y \geq -x - 8$

II. $y \geq x - 8$

$y + x + 8 + y - x + 8 = 16$
 $2y = 0 \quad y = 0$

I. $y < x - 8$

$y + x + 8 - y + x - 8 = 16$
 $2x = 16$
 $x = 8$

II. $y < -x - 8$

III. $y \geq x - 8$

$-y - x - 8 + y - x + 8 = 16$
 $-2x = 16$
 $x = -8$

IV. $y < x - 8$

$-y - x - 8 - y + x - 8 = 16$
 $-2y = 32$
 $y = -16$

Окружности, заданные 2-м уравнением имеют ровно 2 общие точки с квадратом, заданным 1-м уравнением, если

1) Окружности с центрами $(-15; -8)$ и $(15; -8)$ касаются сторон квадрата. При этом $\sqrt{a} = 7$, $a = 49$

2) Окружности пересекаются с квадратом и между собой в точках $(0; 0)$ и $(0; -16)$. При этом $a = 8^2 + 15^2 = 289$.

Ответ: 49; 289

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 | x+2 | + 4 \geq 0 \quad \text{N4.}$$

$$1) x \leq -1 \quad 1) x \geq -2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4 + 5 - 9 - 4 + 4 = 0$$

$$x = -1 - \text{корень}$$

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 & x+1 \\ \hline -4x^4 + 4x^3 & \\ \hline -9x^3 - 9x^2 & \\ -9x^3 - 9x^2 & \\ \hline 4x + 4 & \\ -4x + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0$$

$$32 - 36 + 4 = 0$$

$$x = 2 - \text{корень}$$

$$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0$$

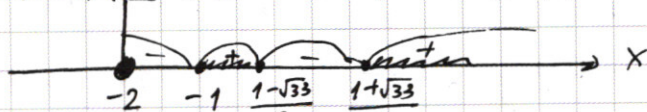
$$4x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 32 = 33; \sqrt{D} = \sqrt{33}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{33}}{8} \\ x = \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 9x^2 + 4x & x-2 \\ \hline -4x^3 + 8x^2 & \\ \hline -x^2 + 4x & \\ -x^2 + 2x & \\ \hline -2x + 4 & \\ -2x + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$(x+1)(x-2)\left(\frac{4x^2 - x - 2}{x-2}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right) \geq 0$$



$$x \in \left[-1; \frac{1 - \sqrt{33}}{8}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{33}}{8}; +\infty\right)$$

$$2) x < -2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(-x-2) + 4 \geq 0$$