

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

$$\begin{array}{r} 4900 \div 2 \\ 2 \overline{) 4900} \\ \underline{2} \\ 29 \\ \underline{2} \\ 90 \\ \underline{80} \\ 10 \\ \underline{10} \\ 0 \end{array}$$

$$4900 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

т.е. все возможные 8-ми значные числа состоят

из цифр 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7, 7, или из цифр
4, 4, 5, 5, 7, 7, 7, 7.

C_1 — кол-во 8-ми значных чисел из цифр
1, 1, 2, 2, 5, 5, 7, 7.

$$C_1 = \frac{M}{K_1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2520$$

M — общее кол-во 8-ми значных чисел, составленных
из 8-ми различных, ненулевых цифр

K_1 — кол-во перестановок одинаковых цифр.

C_2 — кол-во 8-ми значных чисел из цифр 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7, 7

$$C_2 = \frac{M}{K_2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 6} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 1680$$

K_2 — кол-во перестановок одинаковых цифр.

$$C = C_1 + C_2 = 1680 + 2520 = 4200$$

Ответ: 4200.

N3

свз.

$$x^3 - 64x + 200 \geq 0$$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$x^2 + 6x - 40$$

$$D = 36 + 4 \cdot 40 = 14^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 14}{2} \rightarrow -10 \text{ и } 4$$

$$\frac{(x+10)}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4)$$

$x_1 = -10$ (проверим, подставляем $x_1 = -10$ по свз)

$$x^3 - 64x + 200 \geq 0$$

$$-1000 + 640 + 200 < 0 \Rightarrow x_1 - \text{не подходит по свз}$$

$$(x+10) \neq 0$$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x-4) \cdot 2\sqrt{2}$$

возведем в квадрат. (этим мы возьмем только положительные корни уравнения)

$$x^3 - 64x + 200 = (x-4)^2 \cdot 4 \cdot 2$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 16 \cdot 8$$

$$x^3 - 8x^2 + 42 = 0$$

$$x_2 = 6$$

$$\begin{cases} 36 \cdot 6 - 38 \cdot 8 + 42 = 0 \\ -42 + 42 = 0 \end{cases}$$

проверим по свз и начальному уравнению

$$6^3 - 64 \cdot 6 + 200 = 200 - 168 > 0 \text{ (подходит по свз)}$$

$$\sqrt{6^3 - 64 \cdot 6 + 200} \neq (6-4) \cdot 2\sqrt{2}$$

$$4\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow$$

$x_2 = 6$ - искомым корнем уравнения

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} x^3 - 8x^2 + 42x - 64 \quad | \quad x - 6 \\ x^3 - 6x^2 \\ \hline -2x^2 + 42x - 64 \\ -2x^2 + 12x \\ \hline -12x + 42 - 64 \\ -12x + 42 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\sqrt{(7 + \sqrt{13})^3 - 64 \cdot (7 + \sqrt{13}) + 200}$$

$$\sqrt{(7 + \sqrt{13})^3 - 64\sqrt{13} + 736}$$

$$\sqrt{40 + 16\sqrt{13} - 64\sqrt{13} + 736}$$

$$\sqrt{746 - 48\sqrt{13}}$$

то $x_3 = 7 + \sqrt{13}$ — искомый корень уравнения

проверим $x_4 = 7 - \sqrt{13}$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} \geq 0$$

x_4 — не подходит.

Ответ. $x_3 = 7 + \sqrt{13}$, $x_2 = 6$.

$$x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 12 = 4 \cdot 13$$

$$x_{3,4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 1 \pm \sqrt{13}$$

подставим в уравнение:

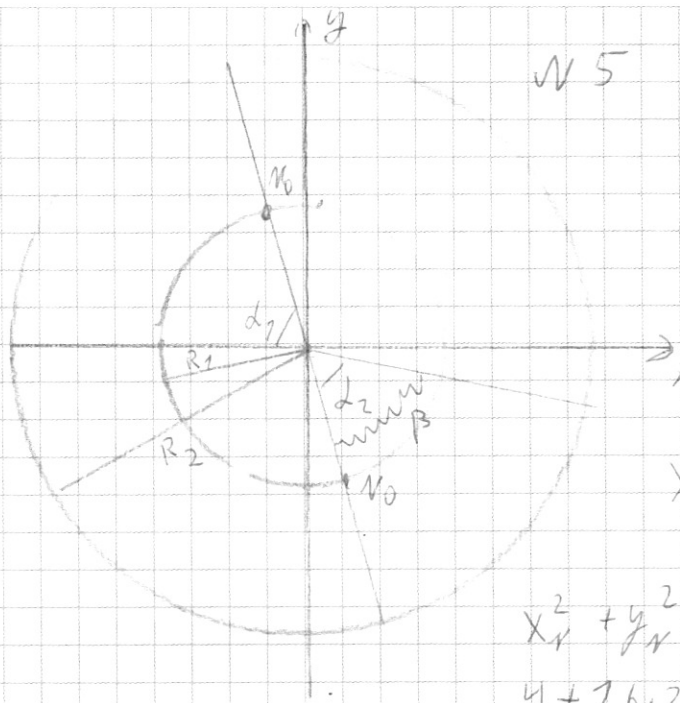
$$\ast (\sqrt{13} - 3) \cdot 2\sqrt{2}$$

$$\ast \sqrt{4 \cdot (\sqrt{26} - 3\sqrt{2})^2}$$

$$\ast \sqrt{146 - 48\sqrt{13}}$$

$$= \sqrt{746 - 48\sqrt{13}}$$

$$(x - 4) \cdot 2\sqrt{2} = (-3 - \sqrt{13}) \cdot 2\sqrt{2} < 0 \Rightarrow$$



окружность окружности:
(с центром в точке $(0,0)$)

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$M_0 (-1, 2\sqrt{2}) \text{ (корреляция)}$$

$$N_0 \text{ (некорреляция)} (2, -4\sqrt{2})$$

$$x_m^2 + y_m^2 = R_m^2$$

$$1 + 2 \cdot 4 = R_m^2 \Rightarrow R_m = 3 \text{ (м.к. } R \geq 0)$$

$$x_n^2 + y_n^2 = R_n^2$$

$$4 + 16 \cdot 2 = R_n^2 \Rightarrow R_n = 6 \text{ (м.к. } R \geq 0)$$

м.е. некорреляция находится по окружности R_2 , корреляция находится по окружности R_1 ($R_2 = 2R_1$)

$$|tg \alpha_1| = \left| \frac{2\sqrt{2}}{1} \right|, |tg \alpha_2| = \left| \frac{4\sqrt{2}}{2} \right| \Rightarrow |tg \alpha_1| = |tg \alpha_2| \Rightarrow$$

$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow$ точки находятся в диаметрально противоположных точках d_1, d_2 - углы под которыми видны радиусы

$$V_m = 2,5 V_n$$

$$R_2 = R_n = 2R_m = R_1 \quad \left(\begin{array}{l} V_m - \text{скорость корреляции} \\ V_n - \text{скорость некорреляции} \end{array} \right)$$

$$L = 2\pi R - \text{длина окружности}$$

$$L_m = \frac{1}{2} L_1 \Rightarrow \text{угловая скорость корреляции в 5 раз больше угловой скорости некорреляции.}$$

Между радиусами расстояние - кратчайшее, если они находятся в диаметрально противоположных точках. Но на одном луче, проведенном из центра

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

когда пелкарь проложит 1 круг, карась проложит
5 кругов $\Rightarrow$ будет 4 точки, в которых карась
сложит пелкаря (всего числовые точки)

Пусть карась пролетит $\angle 5\beta \Rightarrow$ пелкарь пролетит $\angle \beta \Rightarrow$
 $\angle 180^\circ = 4\angle \beta \Rightarrow \beta = 45^\circ$ ($\angle \beta$ — угол между направлением
пелкаря, до первой встречи с карасем)

N_1 — первая числовая точка.

$$\sin \alpha_2 = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sin(\alpha_2 - \beta) = \sin \alpha_2 \cdot \cos \beta - \cos \alpha_2 \cdot \sin \beta =$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\alpha_2 > \beta)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}$$

$$\sin(\alpha_2 - \beta) = \frac{4 - \sqrt{2}}{6} \Rightarrow N_1 = (\sqrt{18 + 8\sqrt{2}}; -4 + \sqrt{2})$$

т.к. всего 4 числовые координаты
и скорости $v = \omega = \text{const} \Rightarrow$

ответ. $N_1 = (\sqrt{18 + 8\sqrt{2}}; -4 + \sqrt{2})$

$$N_2 = (4 - \sqrt{2}; \sqrt{18 + 8\sqrt{2}})$$

$$N_3 = (-\sqrt{18 + 8\sqrt{2}}; 4 - \sqrt{2})$$

$$N_4 = (-4 + \sqrt{2}; -\sqrt{18 + 8\sqrt{2}})$$

№ 41.

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 : (x+2) + 4 \geq 0$$

I) $x \geq -2$

$$4x^4 + x^2 - 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$x_1 = -1$$

$$(x+1) \cdot (4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0$$

$$x_2 = 2$$

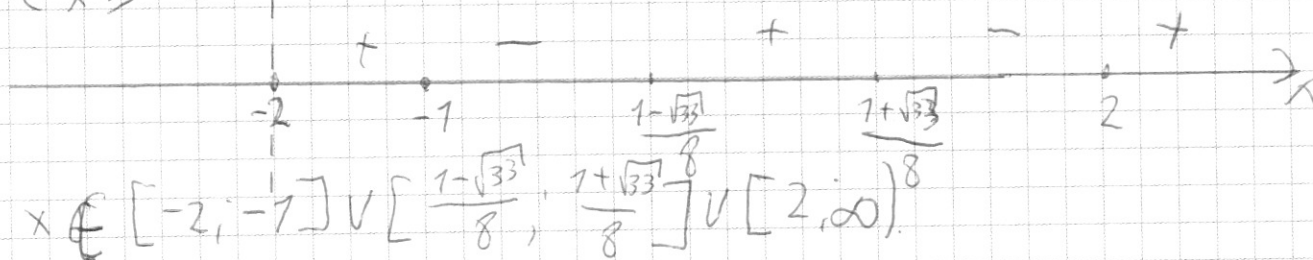
$$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0$$

$$4x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 \cdot 2 = 33$$

$$x_{7,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+1)(x-2) \cdot \left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \cdot \left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0 \\ x \geq -2 \end{array} \right.$$



II) $x < -2$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5 - x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$(x+2)^2 + x^2 \cdot \left(3x^2 + 5x + 4 + \frac{4}{x}\right) \geq 0$$

$$(x < -2) \Rightarrow \frac{4}{x} > -2 \Rightarrow 3x^2 + 5x + 4 + \frac{4}{x} > 3x^2 + 5x + 4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3x^2 + 5x + 5$$

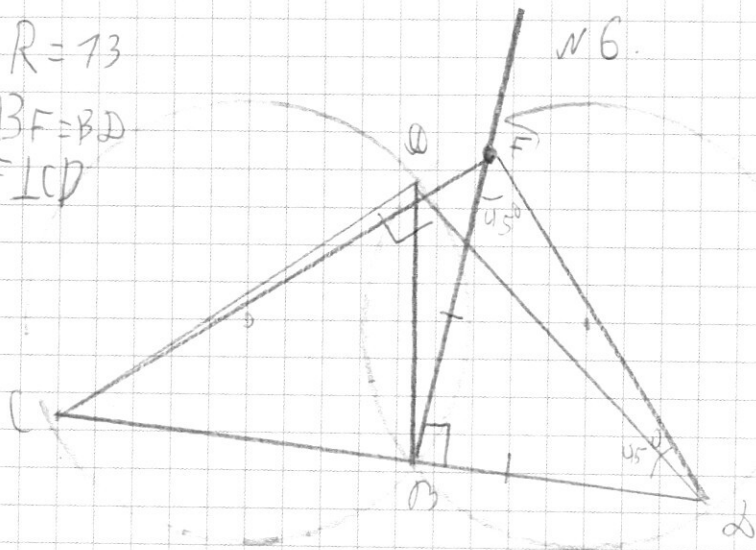
$$D = 25 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = 25 - 60 < 0 \Rightarrow \text{kein Konvex} = >$$

$$3x^2 + 5x + 5 > 0 \Rightarrow x^2 \cdot \left(3x^2 + 5x + 4 + \frac{1}{x} \right) \geq 0 \Rightarrow$$

$$(x+2)^2 \geq 0$$

$$\begin{cases} x^2 \cdot (3x^2 + 5x + 7 + \frac{4}{x}) > 0 \Rightarrow 4x^3 + x^2 + 4x + 5x^3 + 70x^2 + 4x \geq 0 \\ x < -2 \end{cases} \Rightarrow \text{für } x < -2.$$

Umgekehrt: $x \in (-\infty, -1] \cup [\frac{1-\sqrt{3}}{8}, \frac{1+\sqrt{3}}{8}] \cup [2, \infty)$

$$R = 73$$
$$BF = BD$$
$$BF \perp CD$$


Болливудский голливудский
индийский

изм. BF Colman

$$C \cap B = \emptyset$$

$$\angle CAB = \angle AOB$$

и $(AB = B \cap (m, k) \text{ и } AB \perp (d)) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \angle CAD = \angle CBD \\ \angle CAB = \angle CBA = 90^\circ \Rightarrow \angle CAD = \angle CBD = 45^\circ \Rightarrow \end{cases}$$

$$CB = AB = A_2 \quad (f\text{-coboundary } (A) = \rightarrow$$

$C \subseteq A = \mathbb{A}^n$
 Umkehr: $C \subseteq \mathbb{A}^n \Rightarrow C = \mathbb{A}^n = 26$

Omben: $CF = 26$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7.

$$\begin{array}{r|l} 4900 & 2 \\ \sim 450 & 5 \\ 490 & 2 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 4 & 4 \end{array}$$

$$4900 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

т.е. ~~восемь~~ т.е. ~~иногда~~ ~~восьмизначное~~
число состоит из цифр 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7, 7.

I) пусть если 8-ми значное число состоит из 8-ми перестановок 0 чисел, то тогда чисел $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

$C_1 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ — (количество чисел 8-ми значных чисел составленных из 8-ми различных, перестановки 0 чисел)

$$C_2 = \frac{C_1}{k} = \text{иногда кол-во чисел}$$

k — количество перестановок одинаковых чисел в данном 8-ми значном числе

$$C_2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 7 \cdot 4 \cdot 90 = 360 \cdot 4 = 1440$$

$$\begin{array}{r} \times 360 \\ 4 \\ \hline 12960 \end{array}$$

Ответ: кол-во 8-ми значных чисел, произведение цифр которых = 4900, = 2520.

$$\begin{array}{r} \times 240 \\ 12 \\ \hline 5760 \end{array}$$

№ 2.

Дана геометрическая прогрессия $(b_1, b_2, \dots, b_{3000}) \Rightarrow$

$$\begin{cases} b_2 = b_1 \cdot q & (q - \text{шаг прогрессии}) \\ b_n = b_{n-1} \cdot q & (b_n = b_1 \cdot q^{(n-1)}) \end{cases}$$

тогда

$$\begin{aligned} b_6 &= b_3 \cdot q^3 \\ b_n &= b_{n-3} \cdot q^3 \end{aligned}$$

$$b_1 \cdot (1+q \cdot (1+q \cdot (1+q \cdot \dots \cdot (1+q) \dots)))$$

№ 3.

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40 \quad \text{откуда } x^3 - 64x + 200 \geq 0$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$x^2 + 6x - 40$$

$$D = 36 + 4 \cdot 40 = 196 = 14^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 14}{2} \rightarrow \begin{matrix} -10 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\frac{(x+10)}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10) \cdot (x-4)$$

$$x_1 = -10 \quad (\text{проверим, подходит ли } x_1 = -10)$$

$$\text{откуда } x^3 - 64x + 200 \geq 0$$

$$-1000 + 640 + 200 < 0 \Rightarrow x_1 - \text{не подходит}$$

$$\text{откуда } \text{т.е. } (x+10) \neq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x - 4) \cdot 2\sqrt{2}$$

возведем в квадрат. (этими мы возьмем
добавим корни уравнения)

$$x^3 - 64x + 200 = (x - 4)^2 \cdot 4 \cdot 2$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 16 \cdot 8$$

$$x^3 - 8x^2 + 42 = 0$$

x^3

$$x_2 = 6$$

$$\begin{pmatrix} 36 - 36 \cdot 8 + 42 = 0 \\ -42 + 42 = 0 \end{pmatrix}$$

проверим по формуле и по формуле уравнения

$$6^3 - 64 \cdot 6 + 200 = 6 \cdot (36 - 64) + 200 = -6 \cdot 28 + 200 = 200 - 168 = 32$$

(по формуле)

$$\sqrt{6^3 - 64 \cdot 6 + 200} = (6 - 4) \cdot 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32} = 2 \cdot 2\sqrt{2}$$

$$4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$x_2 = 6$ — ~~корень~~ ~~использованный~~ корень уравнения

$$\begin{array}{r} x^3 - 8x^2 + 42 \mid x - 6 \\ \underline{-x^3 + 6x^2} \\ -2x^2 + 42 \\ \underline{-2x^2 + 12x} \\ -12x + 42 \\ \underline{-12x + 72} \\ 0 \end{array}$$

$$x^2 - 2x - 72$$

$$D = 4 + 4 \cdot 72 = 4 \cdot 73$$

$$x_{3,4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{73}}{2} = 1 \pm \sqrt{73}$$

подставим в уравнение

$$\sqrt{(1 + \sqrt{73})^3 - 64 \cdot (1 + \sqrt{73}) + 200} \neq (\sqrt{73} - 3) \cdot 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{(1+\sqrt{13})^3 - 64 - 64\sqrt{13} + 200} \cdot (-3+\sqrt{13}) \cdot 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{(1+\sqrt{13})^3 - 64\sqrt{13} + 136} \cdot 2\sqrt{26} - 6\sqrt{2} \quad (2\sqrt{26} - 6\sqrt{2} > 0)$$

$$\sqrt{(1+\sqrt{13})^3 - 64\sqrt{13} + 136} \cdot \sqrt{4(\sqrt{26} - 3\sqrt{2})^2}$$

$$\sqrt{(1+\sqrt{13})^3 - 64\sqrt{13} + 136} \cdot \sqrt{4(26 - 6\sqrt{2 \cdot 13} + 9 \cdot 2)}$$

$$\sqrt{(1+\sqrt{13})^3 - 64\sqrt{13} + 136} \cdot \sqrt{4 \cdot 44 - 48\sqrt{13}}$$

$$(1+\sqrt{13})^3 = (1+2\sqrt{13})(1+\sqrt{13}) = (1+14\sqrt{13}+2\sqrt{13}+26) = 40+16\sqrt{13}$$

$$\sqrt{40+16\sqrt{13} - 64\sqrt{13} + 136} \cdot \sqrt{242 - 48\sqrt{13}}$$

$$\sqrt{746 - 48\sqrt{13}} = \sqrt{746 - 48\sqrt{13}}$$

т.е. $x_3 = 1 + \sqrt{13}$ - искомый корень уравнения

проверим $x_4 = 1 - \sqrt{13}$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} \geq 0 \quad (x-4) \cdot 2\sqrt{2} \cdot (-3-\sqrt{13}) \cdot 2\sqrt{2} < 0 \Rightarrow$$

x_4 не подходит уравнению

Ответ: $x_3 = 1 + \sqrt{13}$; $x_2 = 6$

✓✓

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 / (x+2) + 4 \geq 0.$$

$$I) x \geq -2.$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 - 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0.$$

$$x_1 = -1.$$

$$4 - 5 - 9 - 4 + 4 = 0.$$

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 : x + 1 \\ \underline{4x^4 + 4x^3} \\ -9x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \\ \underline{-9x^3 - 9x^2} \\ 4x + 4 \\ \underline{4x + 4} \\ 0 \end{array}$$

$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0.$$

$$x_2 = 2.$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 9x^2 + 4 : x - 2 \\ \underline{4x^3 - 8x^2} \\ -x^2 + 4 \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ -2x + 4 \\ \underline{-2x + 4} \\ 0 \end{array}$$

$$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0$$

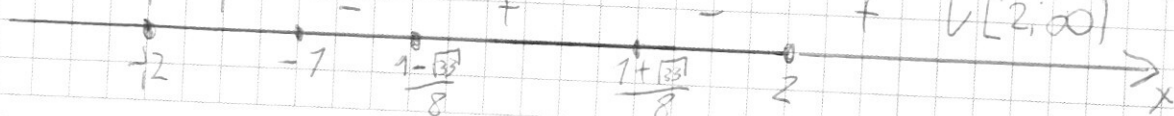
$$4x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 \cdot 2 = 33$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$\begin{cases} (x+1)(x-2) \left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$x \in [-2, -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}, \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2, \infty)$$



$$II) x < -2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 70x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 71x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

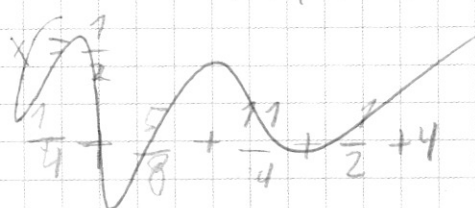
$$(2x^2+2)^2 + 5x^3 + 7x^2 + 4x \geq 0$$

$$(2x^2+2)^2 + x \cdot (5x^2+7x+4) \geq 0$$

$$5x^2+7x+4$$

$$D = 49 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 49 - 80 < 0 \text{ т.е. нет корней } \Rightarrow$$

$$5x^2+7x+4 > 0$$



$$((x^2+2)^2 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 4x) \geq 0$$

$$(x+2)^2 + x^2 \cdot (3x^2 + 5x + 4 + \frac{4}{x}) \geq 0$$

$$(x < -2) \Rightarrow \frac{4}{x} > -2$$

$$3x^2 + 5x + 4 + \frac{4}{x} > 3x^2 + 5x + 5$$

$$3x^2 + 5x + 5$$

$$D = 25 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = 25 - 60 < 0 \Rightarrow \text{нет корней} \Rightarrow$$

$$3x^2 + 5x + 5 > 0 \Rightarrow x^2 \cdot (3x^2 + 5x + 5) > 0 \Rightarrow$$

$$x^2 \cdot (3x^2 + 5x + 5 + \frac{4}{x}) > 0$$

$$(x < -2)$$

$$(x+2)^2 \geq 0$$

$$\begin{cases} x^2 \cdot (3x^2 + 5x + 5 + \frac{4}{x}) > 0 \\ x < -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x^2 + x^2 + 4x + 5x^3 + 70x^2 + 4 \geq 0 \\ \text{при } x < -2 \end{cases} \Rightarrow$$

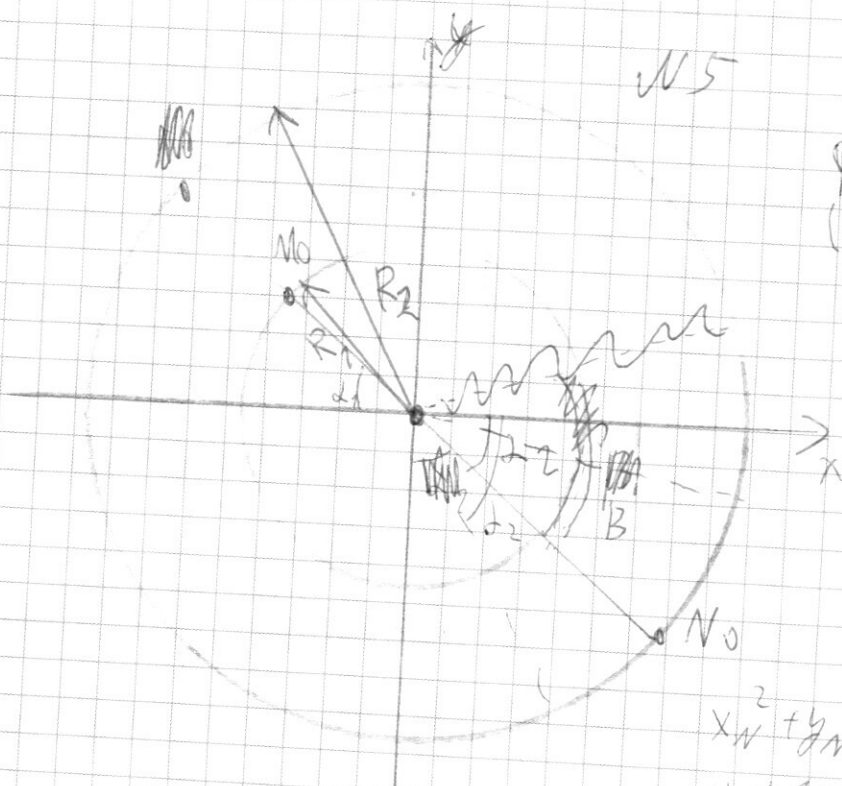
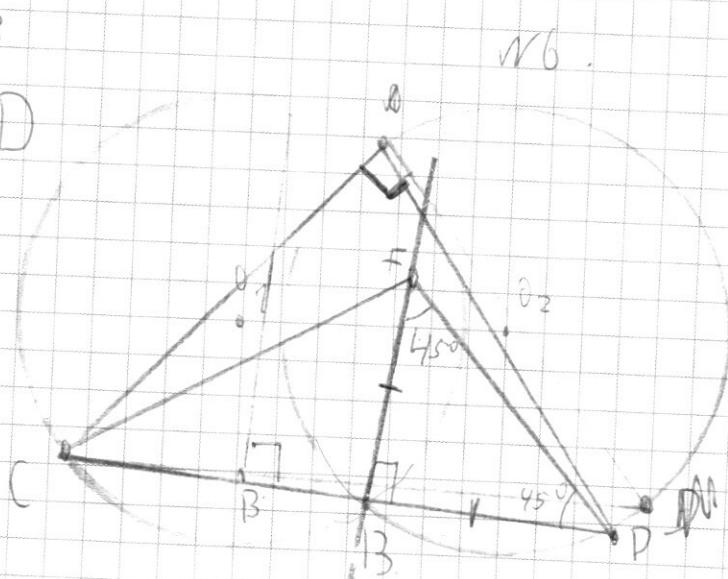
$$\text{Ответ: } x \in (-\infty, -1] \cup [\frac{1-\sqrt{33}}{8}, \frac{1+\sqrt{33}}{8}] \cup [2, \infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$R = 73$$

$$BF = BD$$

BFLCD



формула окружности
(центр в точке $O(0,0)$)

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$M_0(-7, 2\sqrt{2})$ (максимум)

$$N_0(2-4\sqrt{2})/(\text{newsp})$$

$$x_m^2 + y_m^2 = R_m^2$$

$$1 + 2 \cdot 4 = R_m^2 \Rightarrow R_m = 3$$

$$(m, k, R \geq 0)$$

$$x_N^2 + y_N^2 = R_N^2$$

$$4 + 16 \cdot 2 = 0^2 \Rightarrow R_N = 0$$

$$1/m, K, R \geq 0,$$

н. л. некая модель по окружности R_2
 другая модель по окружности R_1
 $R_2 = 2R_1$

$$R_2 = 2R_1$$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)

$$\sin \alpha_1 = |\operatorname{tg} \alpha_1| = \left| \frac{2\sqrt{2}}{-1} \right|, |\operatorname{tg} \alpha_2| = \left| \frac{-4\sqrt{2}}{2} \right| \Rightarrow |\operatorname{tg} \alpha_1| \neq |\operatorname{tg} \alpha_2| \Rightarrow \alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow$$

мы находимся в двух только противоположных точках.

α_1, α_2 — углы между векторами скорости

$$V_M = 2,5 V_N \quad (V_M - \text{скорость корабля})$$

$$R_2 = R_N = 2R_M = R \quad (V_N - \text{скорость пелкаря})$$

$L = 2\pi R$ — длина окружности.

$$L_M = \frac{1}{2} L_N \Rightarrow T_M = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2,5} \cdot T_N \text{ м. в кармане}$$

угловая скорость корабля в 5 раз больше угловой скорости пелкаря.

Метод проб и ошибок —
предположим, если они находятся на
одном луче (выходящем из центра)
(когда пелкарь встретит 1 корабль, корабль
встретит 5 кораблей. $\Rightarrow$ будет 4 точки,
в которых корабль обгонит пелкаря
(всего 4 именные точки))

корабль прошел угол $5\beta \Rightarrow$ пелкарь прошел угол $\beta \Rightarrow$

$$\beta \Rightarrow \angle 180^\circ = 4\beta \Rightarrow \beta = 45^\circ$$

N_1 — первая именная точка.

$$\sin \alpha_2 = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin(\beta - \alpha_2) = \sin \beta \cdot \cos \alpha_2$$

$$\sin \beta = \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \alpha_2 > \sin \beta \Rightarrow \alpha_2 > \beta \Rightarrow \sin(\alpha_2 - \beta) =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{3} \right) = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{10 \cdot 5}{3} = \frac{3 \cdot x}{2} \Rightarrow 80.5 = x.$$

$$\frac{5.3}{40} = \frac{2 \cdot x}{25} \quad 45 = 80x \Rightarrow x = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}.$$

№6.

Рассмотрим частный случай:

пусть BF совпадает с $AB \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \triangle CAB = \triangle ABA \quad & \left(\begin{array}{l} \text{отсюда по условию} \\ CB = BA \text{ (т.к. } AB \perp CD) \end{array} \right) \Rightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \angle CAB = \angle BAA \\ \angle CAB + \angle BAA = 90^\circ \end{array} \right. & \Rightarrow \angle CAB = \angle BAA = 45^\circ \Rightarrow \end{aligned}$$

$$CB = AB = AD \quad (F \text{ совпадает с } A) \Rightarrow$$

$$CF = CA = AD$$

и 5

$$\sin(\alpha_2 - \beta) = \frac{4 - \sqrt{2}}{6} \Rightarrow \text{координата перпендикуляра по}$$

$$y = (-4 + \sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$N_1 = \left(\sqrt{36 - (4 - \sqrt{2})^2}, -4 + \sqrt{2} \right) = \left(\sqrt{20 - 2 + 8\sqrt{2}}, -4 + \sqrt{2} \right) = \left(\sqrt{18 + 8\sqrt{2}}, -4 + \sqrt{2} \right)$$

$$N_1 = \left(\sqrt{18 + 8\sqrt{2}}, -4 + \sqrt{2} \right)$$

н.к. все 4 ~~матрицы~~ и их координаты
и скорости $v_{\text{пр}} = \text{const} \Rightarrow$

$$N_2 = (4 - \sqrt{2}, \sqrt{18 + 8\sqrt{2}})$$

$$N_3 = (-4 + \sqrt{2}, -\sqrt{18 + 8\sqrt{2}})$$

$$N_4 = (-4 + \sqrt{2}, -\sqrt{18 + 8\sqrt{2}})$$

$$N_4 = (-4 + \sqrt{2}, -\sqrt{18 + 8\sqrt{2}})$$

$$\text{Ответ: } N_1 = \left(\sqrt{18 + 8\sqrt{2}}, -4 + \sqrt{2} \right)$$

и 5.

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^2|x+2| + (x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2) = 4x^4 - 5x^2|x+2| + (x+2)^2 \geq 0$$

$$(x+2)^2 \geq 0 \Rightarrow 4x^4 - 5x^2|x+2| +$$

$$4x^4 - 5x^2 \cdot |x+2| + |x+2|^2 \geq 0$$

$$(2x^2)^2 - 2 \cdot 2x^2 \cdot |x+2| + |x+2|^2 - x^2|x+2| \geq 0$$

$$(2x^2 - |x+2|)^2 \geq x^2|x+2|$$

$$I) x > -2$$

$$(2x^2 - x - 2)^2 \geq x^2 \cdot (x+2)$$