

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1)

$$\begin{array}{r|l} 4900 & 2 \\ \hline 2450 & 2 \\ \hline 1225 & 5 \\ \hline 245 & 5 \\ \hline 49 & 7 \\ \hline 7 & 7 \end{array}$$

$$4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$$

Число: $abcde\bar{f}gh$, где

$$a, b, c, d, e, \bar{f}, g, h \in \mathbb{Z},$$

$$b, c, d, e, \bar{f}, g, h \in [0, 9]$$

$$a \in [1, 9]$$

$$\text{Т.к. } 2 \cdot 5 = 10 > 9$$

$$2 \cdot 7 = 14 > 9$$

$$5 \cdot 7 = 35 > 9, \text{ то}$$

Цифры исходного числа: $\underline{1}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{2}, \underline{5}, \underline{5}, \underline{7}, \underline{7}$.

их можно расставить $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$ различными спо-

собами:

$$\frac{8!}{(2!)^4} = \frac{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}{2^4} = 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 360 \cdot 7 = 2520$$

Ответ: 2520.

$$\text{№2) } b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000} = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} = 5 \quad (1)$$

$$b_1 + b_2 + 40b_3 + b_4 + b_5 + 40b_6 + \dots + b_{2999} + 40b_{3000} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \overbrace{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + \dots + b_{3000}}^{1000 \text{ членов}} + 39b_3 + 39b_6 + 39b_9 + \dots + 39b_{3000} = \\
 &= 5^5 + 39 \frac{b_3 (q^{3 \cdot 1000} - 1)}{q^3 - 1} = 5 + 39 \frac{b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = 55 \quad \dots (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S' &= b_1 + 3b_2 + b_3 + 3b_4 + b_5 + 3b_6 + \dots + 3b_{3000} = \\
 &= \overbrace{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + \dots + b_{3000}}^5 + 2b_2 + 2b_4 + 2b_6 + \dots + 2b_{3000} = \\
 &= 5 + 2 \frac{b_2 (q^{2 \cdot 1500} - 1)}{q^2 - 1} = 5 + \frac{2q b_1 (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} \quad \dots (3)
 \end{aligned}$$

Из (2): $45 = 39 \frac{b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$ — поделим на (1)

$$\frac{45}{5} = \frac{\frac{39 b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}}{\frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}}$$

$$4 = 39 \frac{q^3 - 4q^2}{q^3 - 1}$$

$$4q^3 - 4 = 39q^3 - 39q^2$$

$$35q^3 - 39q^2 + 4 = 0, \quad q = 1 - \text{корень, тогда}$$

$$(q - 1)(35q^2 - 4q - 4) = 0$$

$$\Delta = 16 + 16 \cdot 35 = 24^2$$

$$\begin{cases} q = 1 - \text{не может быть} \\ q = \frac{2}{10} \dots (4) \\ q = \frac{2}{14} \dots \end{cases}$$

$$\begin{array}{r}
 35q^3 - 39q^2 + 4 \quad | \quad q - 1 \\
 \underline{35q^3 - 35q^2} \quad \quad \quad 35q^2 - 4q - 4 \\
 \quad \quad \quad \underline{-4q^2 + 4} \quad \quad \quad \quad \\
 \quad \quad \quad \quad \underline{-4q^2 + 4q} \quad \quad \quad \quad \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{-4q + 4} \quad \quad \quad \quad \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{-4q + 4} \quad \quad \quad \quad \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$U_2(z): 6z(q^{3000} - 1) = 5(q - 1) - 6(3)$$

$$5' = 5 + \frac{2q \cdot 5(q-1)}{q^2 - 1}$$

$$\frac{5'}{5} = 1 + \frac{2q^2 - 2q}{q^2 - 1} = 1 + \frac{2q}{q+1}$$

$$\textcircled{I}: U_2(4): q = \frac{9}{10}: \frac{5'}{5} = 1 + \frac{2 \cdot \frac{9}{10}}{\frac{9}{10} + 1} = 1 + \frac{\frac{18}{10}}{\frac{19}{10}} = \frac{37}{19}$$

$$\textcircled{II}: U_2(4): q = \frac{3}{14}: \frac{5'}{5} = 1 + \frac{2 \cdot \frac{3}{14}}{\frac{3}{14} + 1} = 1 + \frac{\frac{6}{14}}{\frac{17}{14}} = \frac{23}{17}$$

ответ: сумма увеличится в $\frac{37}{19}$ раз.

$$D3) \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x - 200} = x^2 + 6x - 40, \quad D3: \underline{x^3 - 64x - 200 \geq 0}$$

$$(x+10) \sqrt{x^3 - 64x - 200} = 2\sqrt{2}(x+10)(x-4)$$

$$(x+10) \left(\sqrt{x^3 - 64x - 200} - 2\sqrt{2}(x-4) \right) = 0$$

$x = -10$; проверим, подходит ли в D3: $(-10)^3 - 64(-10) - 200 = -160 < 0$
не удовл. D3, т.е. $x = -10$ не корень

$$\sqrt{x^3 - 64x - 200} = 2\sqrt{2}(x-4)$$

$$\begin{cases} x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128 \\ x^3 - 64x + 200 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 - 8x^2 + 128 = 0 & x=6 - \text{корень} \\ x^3 - 64x + 200 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-6)(x^2-2x-12)=0 & \textcircled{2} = 52 \\ x^3 - 64x + 200 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=1+\sqrt{13} \\ x=1-\sqrt{13} \end{cases} \quad x^3 - 64x + 200 \geq 0$$

1) $x=6$: $6^3 - 64 \cdot 6 + 200 = 216 - 384 + 200 = 32 > 0$
 $x=6$ - корень

2) $x=1+\sqrt{13}$: $(1+\sqrt{13})^3 - 64(1+\sqrt{13}) + 200 = 1+3\sqrt{13}+3\sqrt{13}+\sqrt{13} - 64 - 64\sqrt{13} + 200 = 176 - 61\sqrt{13} + 3\sqrt{13}$
 $= 176 - 58\sqrt{13}$

$\sqrt{13} \approx 3,6$, тогда $176 - 58\sqrt{13} \approx 176 - 219,6 + 3\sqrt{13} = -43,6 + 3\sqrt{13} < 0$
 $x=1+\sqrt{13}$ не корень

3) $x=1-\sqrt{13}$: $(1-\sqrt{13})^3 - 64(1-\sqrt{13}) + 200 = 1-3\sqrt{13}+3\sqrt{13}-\sqrt{13} - 64 + 64\sqrt{13} + 200 = 176 + 61\sqrt{13} - 3\sqrt{13} > 0$
 $x=1-\sqrt{13}$ корень.

Отв: $6; 1-\sqrt{13}$

№4) $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 / (x+2) + 4 \geq 0$

1) $x \geq -2$
 $4x^4 - 5x^2 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = -1$ — корень,

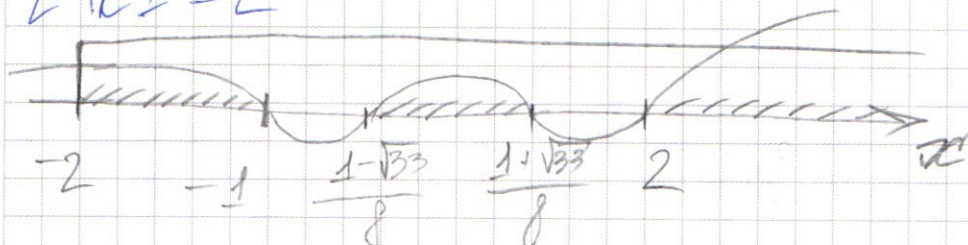
$$\begin{array}{r} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \mid x + 1 \\ - 4x^4 + 4x^3 \\ \hline - 9x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \\ - 9x^3 - 9x^2 \\ \hline 4x + 4 \\ - 4x - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0$, $x = 2$ — корень

$$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0$$

$$D = 1 + 32 = (\sqrt{33})^2$$

$$\begin{cases} (x+1)(x-2)(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8})(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}) \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$



$$x \in [-2; -1] \cup [\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}] \cup [2; \infty) \dots (1)$$

$x < -2$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

верно $\forall x \in (-\infty; -2)$, тогда с учетом (1):

ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}] \cup [2; +\infty)$

$$\sqrt{x} \sqrt{|y+8|+|y-8|} = 16 \quad \dots (1)$$

$$\sqrt{(|x|-15)^2 + (y-8)^2} = a \quad \dots (2)$$

При $a < 0$ корней нет.

(1): 1) $\begin{cases} y+8 \geq 0 \\ y-8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x-8 \\ y \geq x-8 \end{cases} : y=0$

2) $\begin{cases} y < -x-8 \\ y < x-8 \end{cases} : y = -16$

3) $\begin{cases} y \geq -x-8 \\ y < x-8 \end{cases} : x=8$

4) $\begin{cases} y < -x-8 \\ y \geq x-8 \end{cases} : x=-8$

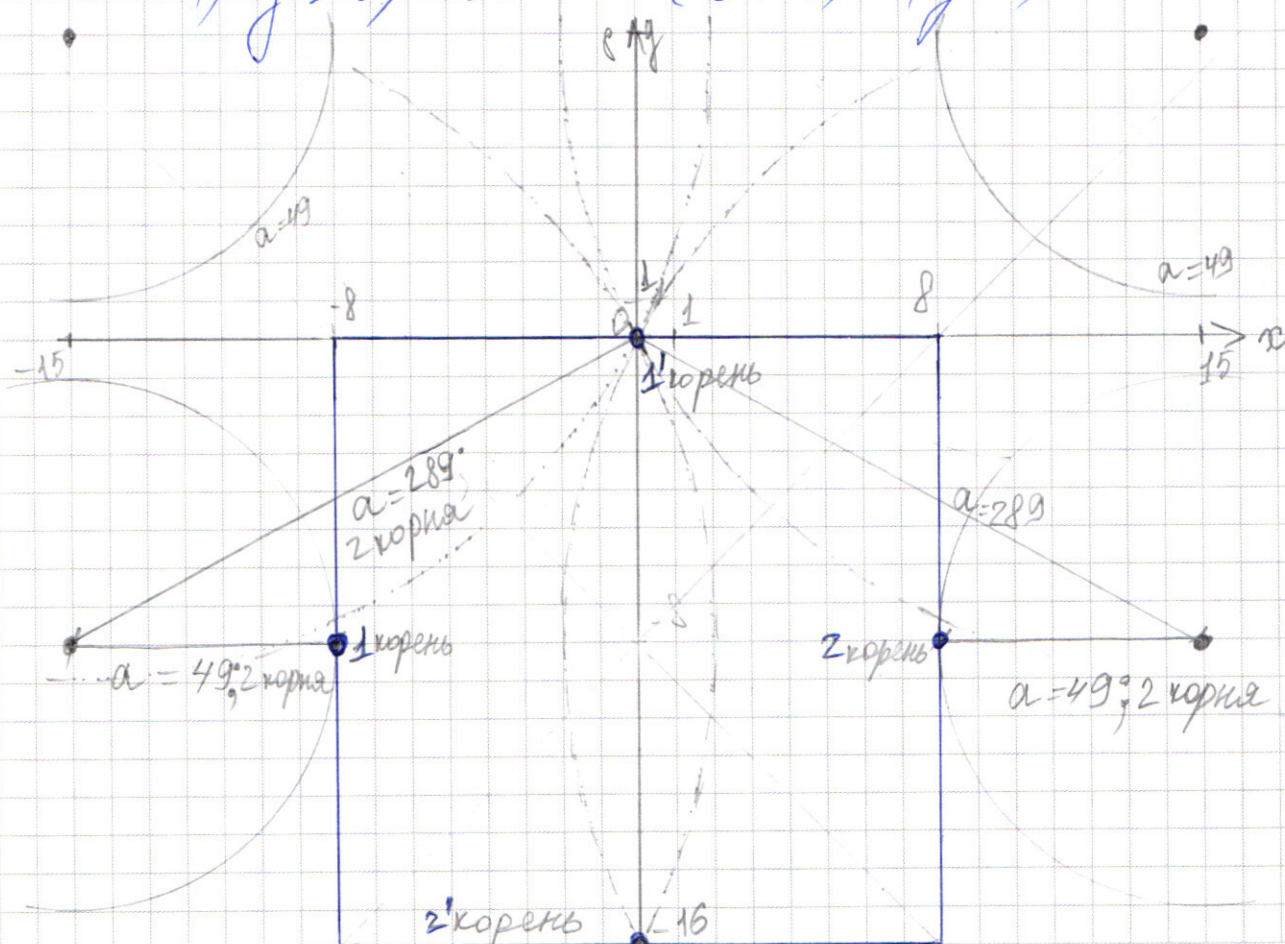
(2): 1) $x < 0, y < 0 : (x+15)^2 + (y+8)^2 = a$

2) $x \geq 0, y \geq 0 : (x-15)^2 + (y-8)^2 = a$

3) $y < 0, x \geq 0 : (x-15)^2 + (y+8)^2 = a$

4) $y \geq 0, x < 0 : (x+15)^2 + (y-8)^2 = a$

части
окр-стей
с радиусами
 $\sqrt{a}$



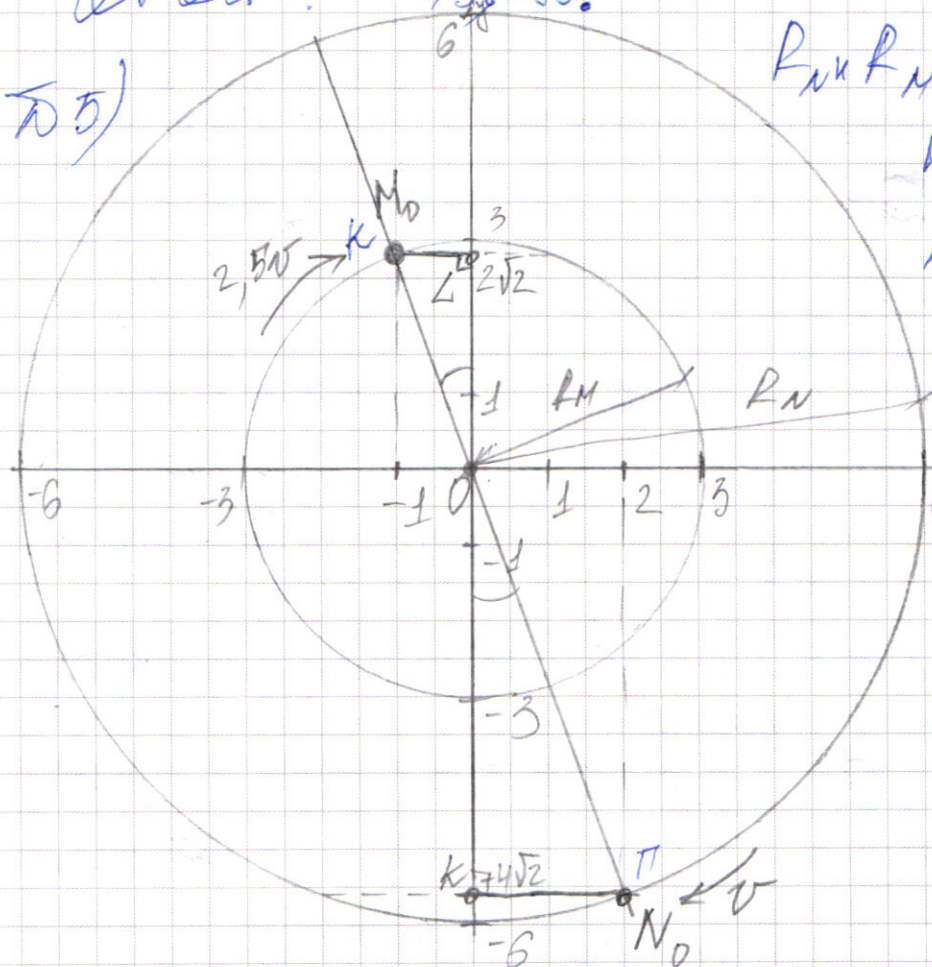
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

- 1) при $a < 0$ корней нет
- 2) при $a = 0$ график (2) представляет собой 4 ~~точки~~ точки, корней нет.
- 3) при $a \in (0; 49)$ график (2) представляет собой окружности, не пересекающие квадрат-
график (1)
- 4) при $\underline{a = 49}$ две из окружностей (2) касаются квадрата (1), 2 корня
- 5) при $a \in (49; 113)$ нижние окружности пересекают квадрат в 2 ~~точках~~ точках
(при $a = 113$ окружности пересекают квадрат в 4 точках: $(8; 0)$, $(-8; 0)$, $(8; -16)$, $(-8; -16)$)
левая окр. и в 2 точках
правая окр. 4 корня
верхние окр.-сти не пересекают квадрат
- 6) при $a \in (113; 289)$ график (2) представляет собой части окружностей, при этом они пересекают квадрат: на верхней и нижней стороне по 2 пересечения, 4 корня
- 7) при $\underline{a = 289}$ график (2) представляет собой фигуру из 4 частей окружностей и точку $(0; 0)$ в центре фигуры, квадрат при этом имеет две общие точки с фигурой: в центрах верхней и нижней сторон, 2 корня

8) $a > 289$ - график (2)-фигуры 4-частные окружностей, не пересекающиеся с квадратом, корней нет.

Ответ: $49:289$.

П5)



R_M, R_N - радиусы окружностей по которым проходят точки, тогда

$$R_M = \sqrt{(-1)^2 + (2.5)^2} = 3$$

$$R_N = \sqrt{(2)^2 + (-4)^2} = 4$$

$\triangle M_0LO \sim \triangle N_0KO$ (т.к. $\frac{OM_0}{ON_0} = \frac{KO}{LO} = 2$), тогда

M_0, O, N_0 лежат на одной прямой

пусть касательная пройдет L , тогда касательная пройдет $\frac{2L}{5}$.

$L =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^3 - 8x^2 + 12 = 0$$

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36, \pm 12$$

~~$$-27 - 12 + 12 = 0$$~~

$$64 - 8 \cdot 16 + 12 = 0$$

$$16 - 32 + 18 = 0$$

$$(x-6)(x^2-2x-12)=0 \quad 36 \cdot 6 - 48 \cdot 6 + 12 \cdot 6 = 0$$

$$36 - 48 + 12 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 8x^2 + 12 \\ \underline{x^3 - 6x^2} \\ -2x^2 + 12 \\ \underline{-2x^2 + 12x} \\ 12x + 12 \\ \underline{-12x + 12} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x-6 \\ \hline x^2-2x-12 \end{array}$$

$$D = 4 - 4(-12) = 52$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{13}}{2} = 1 + \sqrt{13}$$

$$x = \frac{2 - 2\sqrt{13}}{2} = 1 - \sqrt{13}$$

$$x = 6$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3ab^2 + 3a^2b - b^3$$

$$\begin{array}{r} 164 \\ 6 \\ \hline 384 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 61 \\ 36 \\ \hline 366 \\ 183 \\ \hline 2196 \\ 17610 \\ \hline 43,6 \end{array}$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 / (x+2) + 4 \geq 0$$

$$x+2 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 : x+1 \\ \underline{4x^4 + 4x^3} \\ -9x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -9x^3 - 9x^2 \\ \underline{-9x^3 - 9x^2} \\ 0 + 4x + 4 \\ \underline{4x + 4} \\ 0 \end{array}$$

16+

$$\begin{array}{l} q = \frac{39+24}{40} = \frac{63}{40} = 1\frac{23}{40} \\ q = \frac{39-24}{40} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8} \end{array}$$

300061

$$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 4 = 35$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 9x^2 + 4 : x-2 \\ \underline{4x^3 - 8x^2} \\ -x^2 + 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^2 + 4 \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ -2x + 4 \\ \underline{-2x + 4} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \\ x = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \\ x = \frac{1-\sqrt{33}}{8} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (q-1)(35q^2-4q-4)=0 \\ 35q^2-4q-4=0 \\ q = \pm 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4(15) = 60 \\ 5 = \frac{4(15)}{1} = 28 \end{array}$$

$$5 = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$$

$$b_1, q, b_2, q^2 b_2, q^3 b_2, \dots$$

$$\begin{array}{l} 4 \cdot 4^4 - 5 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 - 4^2 + 4 = 4^2 + 4 \\ 4^4 - 5 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - 4 + 1 = -84 + 48 + 256 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

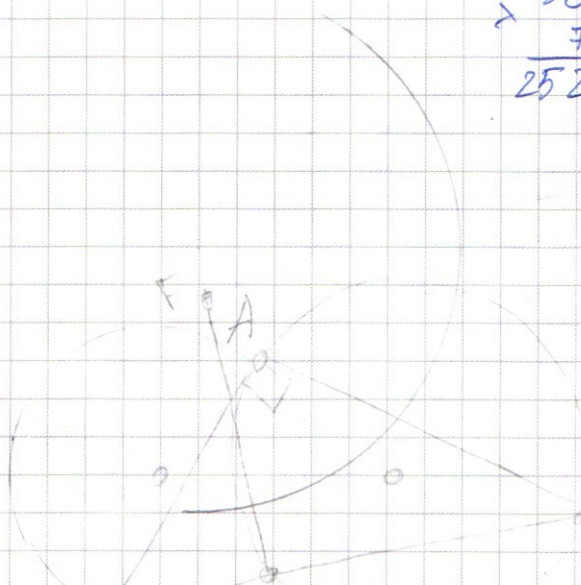
$$\begin{array}{r} 1) \quad 4900 \mid 2 \\ \hline 2450 \mid 2 \\ \hline 1225 \mid 5 \\ \hline 245 \mid 5 \\ \hline 49 \mid 7 \\ \hline 7 \mid 7 \\ \hline \end{array}$$

$$4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$$

$$\frac{80}{74} = \frac{12.522.523.722.2}{2.2.2.2}$$

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 = 360 \cdot 7 = 2520$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 7 \\ \hline 252 \end{array}$$



$$|y+x+8| + |y-x+8| = 16$$

$$\begin{array}{l} 1) \begin{cases} y+x+8 \geq 0 \\ y-x+8 \geq 0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -x-8 \\ y \geq x-8 \\ y \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

2) $y < -x - 8$
 $y < x - 8$
 $y = -16$

3) $\int y + x + 8 \geq 0$
 $\int y - x + 8 < 0 \Rightarrow$
 $x = 8$

4) $\begin{cases} y < -x-8 \\ y \geq x-8 \\ x = -8 \end{cases}$

4) $x \geq 0, y \geq 0$ $(x-15)^2 + (y-15)^2 = a$

$$(|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = 20$$

1) $x < 0, y < 0$

$$(x+15)^2 + (y+8)^2 = a$$

2) $x \leq 0, y \geq 0$

$$(x+15)^2 + (y-8)^2 = a$$

3) $x \geq 0, y \leq 0$: $(x-15)^2 + (y+8)^2 = 2$

$$5 + 39(b_2 + b_3 + \dots + b_{3000}) = 55$$

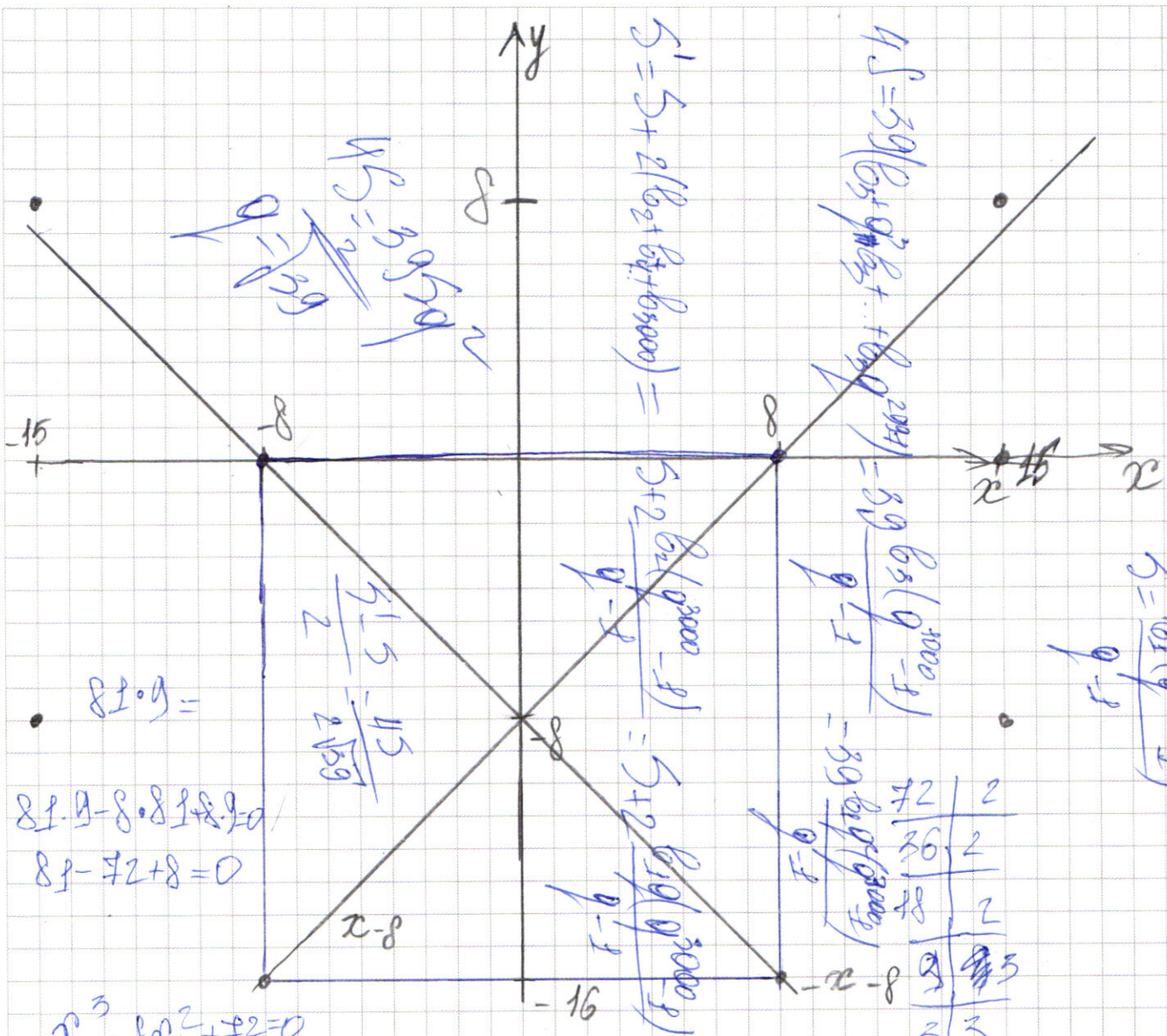
$$5 = \frac{b_2(b_2^2 - 1)}{b_2 - 1}$$

$$45 = 39(b_2 + b_3 + \dots + b_{3000}) = 39 \cdot \frac{b_2(b_2^2 - 1)}{b_2 - 1} = 39 \cdot \frac{b_2(b_2 - 1)(b_2 + 1)}{b_2 - 1} = 39 \cdot b_2(b_2 + 1)$$

72	2
36	2
48	2
3	3

$$5' = 5 + 2(b_2 + b_3 + \dots + b_{3000}) = 5 + 2 \cdot \frac{b_2(b_2^2 - 1)}{b_2 - 1} = 5 + 2 \cdot \frac{b_2(b_2 - 1)(b_2 + 1)}{b_2 - 1} = 5 + 2 \cdot b_2(b_2 + 1)$$

$$45 = 39 \cdot \frac{b_2(b_2^2 - 1)}{b_2 - 1}$$



$$81 \cdot 9 = 81 \cdot 9 - 8 \cdot 81 + 8 \cdot 90$$

$$81 - 72 + 8 = 0$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$\frac{5}{5} = \frac{5}{5} = \frac{4 + \sqrt{39}}{159}$$

$$\sqrt{a} = 7$$

$$a = 49$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289}$$

$$a = 289$$

$$(x + 10) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = 2\sqrt{2}(x + 10)(x + 4)$$

$$(x + 10)(\sqrt{x^3 - 64x + 200} - 2\sqrt{2}(x + 4)) = 0$$

$$x = -10$$

$$64^2 - 800 = 8^4 - 8 \cdot 100 = 8(8^3 - 100) = 8(512 - 100) = 8(412)$$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x - 4)\sqrt{2}$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$