МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФІ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2;-2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5;5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12, \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $700 = 2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot7$ $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$: $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8 = 700$

Единственная цифра, кратная 7 — это 7. Значит, среди цифр числа должна быть 7. Среди цифр числа не может быть 0. При этом оно должно делиться на 5^2. Значит, среди ~~ее~~ его цифр есть две 5. Произведение 4 может быть получено двумя способами: $4\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1$ или $2\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1$.

1) Найдём кол-во чисел с набором цифр 7, 5, 5, 4, 1, 1, 1, 1

$\cancel{8\cdot\frac{7\cdot6}{1\cdot2}}$ $8\cdot7\cdot\frac{6\cdot5}{1\cdot2}\cdot1$

„7" можно поставить 8-ю способами; „4" же — 7-ю способами; две „5" — на 6 оставшихся мест; оставшиеся 4 места занимают „1" $\left(\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=1\right)$

$8\cdot7\cdot\frac{6\cdot5}{1\cdot2}\cdot1 = 15\cdot8\cdot7 = 840$ ~~способ~~ чисел.

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times\ 15 \\ \hline 280 \\ 56 \\ \hline 840 \end{array}$$

2) Найдём кол-во чисел с набором цифр

7, 5, 5, 2, 2, 1, 1, 1

$8\cdot\frac{7\cdot6}{1\cdot2}\cdot\frac{5\cdot4}{1\cdot2}\cdot1$

„7" на 8 мест; две „5" на 7 мест; две „2" на 5 мест; ~~на о~~ три „1" на 3 места $\left(\frac{3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3}=1\right)$

$8\cdot\frac{7\cdot6}{1\cdot2}\cdot\frac{5\cdot4}{1\cdot2}\cdot1 = 8\cdot21\cdot10 = 1680$ чисел

3) $$\begin{array}{r} 1680 \\ +\ 840 \\ \hline 2520 \end{array}$$ Значит, всего 2520 чисел

Ответ: 2520.

№2. $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$ — геом. прогр. →

пусть $b_2 = qb_1,\ b_3 = q^2 b_1,\ \ldots,\ b_{3000} = q^{2999}\cdot b_1$

$$\left.\begin{array}{l} b_1 > 0 \\ b_2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{q > 0}$$

$$S = b_1 + qb_1 + \ldots + q^{2999}\cdot b_1 = b_1(1 + q + \ldots + q^{2999}) =$$

$$= b_1 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

$$b_3 + b_6 + b_9 + \ldots + b_{3000} = b_1 \cdot q^2 + q^3 \cdot b_1 q^2 + q^6 \cdot b_1 q^2 + \ldots + q^{2997} \cdot b_1 q^2 =$$

$$= b_1 q^2 \cdot (1 + q^3 + (q^3)^2 + \ldots + (q^3)^{999}) = b_1 \cdot q^2 \cdot \frac{(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1} =$$

$$= b_1 \cdot q^2 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} = b_1 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} \cdot q^2 \cdot \frac{q - 1}{q^3 - 1} = S \cdot \frac{q^2}{q^2 + q + 1}$$

По условию,

$$S + 49 \cdot S \cdot \frac{q^2}{q^2 + q + 1} = 10S$$

$$49 \cdot \frac{q^2}{q^2 + q + 1} = 9$$

$$\frac{49}{9} = \frac{q^2 + q + 1}{q^2}$$

$$\frac{40}{9} = \frac{q + 1}{q^2}$$

$$\begin{cases} 40q^2 - 9q - 9 = 0 \\ q > 0. \end{cases} \quad \begin{array}{l} D = 9 \cdot 169 \\ \sqrt{D} = 39 \end{array} \Leftrightarrow q = \frac{9 + 39}{2 \cdot 40} = \frac{48}{80} = \frac{3}{5}$$

$$\boxed{q = \frac{3}{5}}$$

Тогда:

$$b_2 + b_4 + \ldots + b_{3000} = b_1 \cdot q + q^2 b_1 q + q^4 \cdot b_1 q + \ldots + q^{2998} \cdot b_1 q =$$

$$= b_1 q \cdot (1 + q^2 + (q^2)^2 + \ldots + (q^2)^{1499}) = b_1 q \cdot \frac{(q^2)^{1500} - 1}{q^2 - 1} =$$

$$= b_1 q \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1} = b_1 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} \cdot \frac{(q - 1)q}{q^2 - 1} = S \cdot \frac{q}{q + 1}$$

$$q = \frac{3}{5} \Rightarrow b_2 + b_4 + \ldots + b_{3000} = S \cdot \frac{\frac{3}{5}}{\frac{8}{5}} = \frac{3}{8} S$$

Значит,

$$S_2 = S + (2 - 1) \cdot \frac{3}{8} S = \frac{11}{8} S \Rightarrow \boxed{\frac{S_2}{S} = \frac{11}{8}}$$

Ответ: увеличится в $\frac{11}{8}$ раз. →

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3. $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$

$(x+6)\sqrt{\frac{1}{2}x^3-2x+40}=(x+4)(x+6)$

проверим, ~~корень ли~~ подходит ли $x=-6$ под ОДЗ:

$-\frac{1}{2}\cdot 6^3+12+40=52-\frac{6\cdot 36}{2}=52-3\cdot 36<0$

не подходит => -6 – не корень => можно сократить

$\sqrt{\frac{1}{2}x^3-2x+40}=x+4$

$\begin{cases} x\geqslant -4 \\ \frac{1}{2}x^3-2x+40=x^2+8x+16 \end{cases}$

$\begin{cases} x\geqslant -4 \\ \frac{1}{2}x^3-x^2-10x+24=0 \end{cases}$

	$\frac{1}{2}$	-1	-10	24
4	$\frac{1}{2}$	1	-6	0

$\begin{cases} x\geqslant -4 \\ (x-4)\left(\frac{1}{2}x^2+x-6\right)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x\geqslant -4 \\ (x-4)(x^2+2x-12)=0 \end{cases}$

$x^2+2x-12=0 \quad D=4+4\cdot 12=4\cdot 13$

$x=\frac{-2\pm 2\sqrt{13}}{2}=-1\pm\sqrt{13}$

$\begin{cases} x\geqslant -4 \\ (x-4)\left(x-(-1+\sqrt{13})\right)\left(x-(-1-\sqrt{13})\right)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x\geqslant -4 \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-1+\sqrt{13}>-4 \\ x=-1-\sqrt{13}<-4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-1+\sqrt{13} \end{array}\right.$

Ответ: $\{-1+\sqrt{13};\ 4\}$.

№ 4. $2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geqslant 0$

Рассмотрим 2 случая: →

1) $x \geqslant 2 \Leftrightarrow |x-2| = x-2$

$2x^4+x^2-4x-3x^3+6x^2+4 \geqslant 0$

$2x^4-3x^3+7x^2-4x+4 \geqslant 0$

$$\begin{cases} 2x^4+7x^2+4 \geqslant 3x^3+4x \\ x \geqslant 2 \end{cases}$$

а) $2x^4 \geqslant 3x^3$

$x^3(2x-3) \geqslant 0$

при $x \geqslant 2$: $\left.\begin{matrix} x^3>0 \\ 2x-3>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^3(2x-3) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x^4 \geqslant 3x^3$

б) $7x^2 \geqslant 4x$

$x(7x-4) \geqslant 0$

при $x \geqslant 2$: $\left.\begin{matrix} x>0 \\ 7x-4>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x(7x-4) \geqslant 0 \Leftrightarrow 7x^2 \geqslant 4x$

Значит, при $x \geqslant 2$: $\begin{cases} 2x^4 \geqslant 3x^3 \\ 7x^2 \geqslant 4x \end{cases} \Rightarrow 2x^4+7x^2+4 \geqslant 3x^3+4x$ $(>)$

$$\begin{cases} 2x^4+7x^2+4 \geqslant 3x^3+4x \\ x \geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2;+\infty)$$

2) $x<2 \Leftrightarrow |x-2| = 2-x$

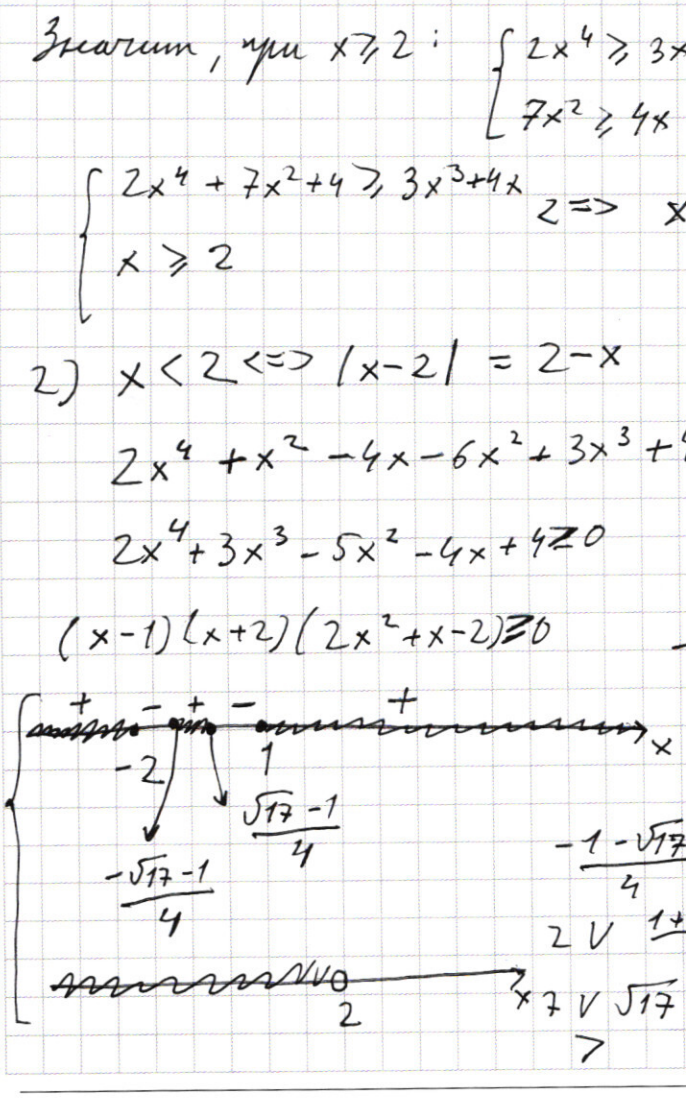
$2x^4+x^2-4x-6x^2+3x^3+4 \geqslant 0$

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4 \geqslant 0$

	2	3	-5	-4	4
1	2	5	0	-4	0
-2	2	1	-2	0	

$(x-1)(x+2)(2x^2+x-2) \geqslant 0$

$D = 1+4\cdot2\cdot2 = 17$ $\quad \dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$



$\dfrac{\sqrt{17}-1}{4} \vee 1$ $\qquad \dfrac{\sqrt{17}-1}{4} \overset{>}{\vee} -2$

$\sqrt{17} \vee 5$ $\qquad \cancel{\sqrt{17} \vee}$ $\quad \sqrt{17}-1>0$

$<$

$\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} \vee -2$

$2 \vee \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$

$7 \vee \sqrt{17}$

$>$ $\Rightarrow \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} > -2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-\sqrt{17}-1}{4}; \frac{\sqrt{17}-1}{4}\right] \cup [1; +\infty) \\ x \in (-\infty; 2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

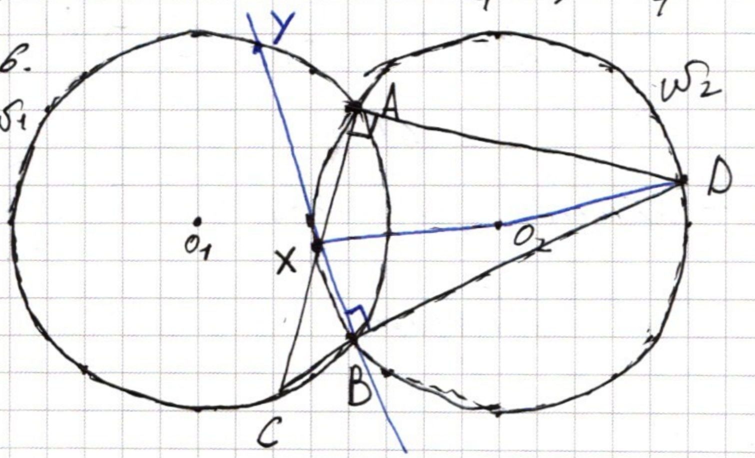
$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; 2)$

3) $\left[\begin{array}{l} x \in [2; +\infty) \\ x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; 2) \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty)$

№ 6.



Дано: $R_1 = R_2 = 5$

$C \in \omega_1(O_1; R)$; $D \in \omega_2(O_2; R)$

$B \in [CD]$

$\angle CAD = 90°$

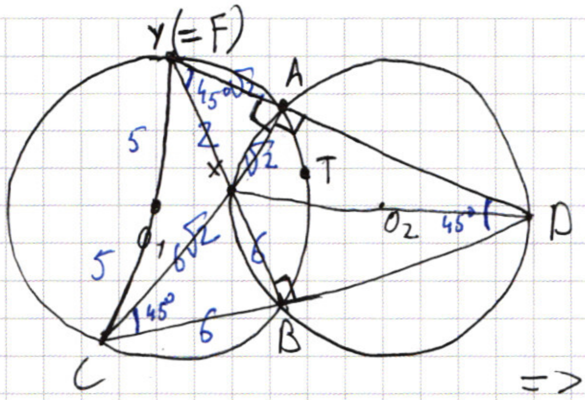
1) т. $X = [AC] \cap \omega_2(O_2; R)$

2) $\angle XAD = 90° \Rightarrow XD$ – диаметр $\omega_2(O_2; R)$, то есть $O_2 \in [XD]$

3) XD – диаметр $\omega_2 \Rightarrow \angle DBX = 90° \Rightarrow (BX)$ – перпендикуляр к (DC)

значит, F $(BF = BD)$ принадлежит прямой (BX)

4) пусть прямая (BX) пересекает ω_1 во второй раз в точке Y. →



5) $\angle CBY = 180° - \angle XBD = 90°$

значит, CY – диаметр ω_1,

т.е. $O_1 \in [CY]$

6) CY – диаметр ω_1 =>

=> $\angle CAY = 90°$

7) $\left.\begin{aligned}&\angle CAY = 90°\\&\angle CAO = 90°\end{aligned}\right\}$ => точки Y, A и O лежат на одной прямой

8) $\angle AYB = \frac{1}{2}\angle AO_1B$ (опираются на дугу $\overset{\frown}{ATB}$)

$\angle BDA = \frac{1}{2}\angle BO_2A$ (опираются на дугу $\overset{\frown}{AXB}$) =>

~~Ax~~ $\angle AO_1B = \angle BO_2A$ (так как $R_1 = R_2 = R$ и

O_1AO_2B – ромб)

$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow \angle AYB = \angle BDA\\&Y, A, O \text{ на одной прямой}\end{aligned}\right\}$ => $\angle DYB = \angle YDB = \frac{180° - \angle DBY}{2} =$

$= 45°$

Таким образом, $\triangle DBY$ – прямоуг. равнобедренный, т.е.

$BD = BY$

$BD \perp BY$

A и F по одну стор. от CD

=> точки F и Y совпадают!

9) $\underline{CF = 2R = \cancel{5}\,10.}$

10) Аналогично п. 8, $\angle DCA = \angle CDA = 45°$

В $\triangle CBX$: $BX = BC = 6$

$BF = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

=> $FX = 8 - 6 = 2$

$CX = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$

$AX = AF = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

=> В $\triangle FAC$: $AF = \sqrt{2}$, $AC = 7\sqrt{2}$, $\angle CAF = 90°$ => $\underline{S_{ACF} = 7.}$

Ответ: а) $CF = 2R = 10$

б) $S_{ACF} = 7.$

→

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7. a - ? : ровно 2 решения: $\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12, \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$

Заметим, что если пара $(x;y)$ является решением, то пара $(-x;y)$ тоже является решением:

$$\begin{cases} |y-6-(-x)|+|y-6-x| = |y-6-x|+|y-6+x| \\ |x| = |-x| \end{cases}$$

Значит, такие a, при которых пара $(0;y)$ - решение, не подходят, так как тогда у системы будет либо нечётное, либо бесконечное число корней.

То есть, нужно найти такие a, при которых y и $|x|$ - единственны, причём $|x|\neq 0$, и система имеет решения $\{(-|x|;y), (|x|;y)\}$.

1) $\begin{cases} y-6-x\geq 0 \\ y-6+x\geq 0 \end{cases}$ $-(y-6)\leq x \leq y-6$

$|y-6-x| + |y-6+x| = 2(y-6)$, $y-6\geq 0$

$2(y-6)=12 \iff y-6=6$

$\underline{y=12}$

$\begin{cases} y=12 \\ 0<|x|\leq 6 \end{cases}$

$(|x|-8)^2+(|y|-6)^2 = 36+(|x|-8)^2 = a$

$-8<|x|-8\leq -2 \Rightarrow$ ~~$|x=18$~~ $|x|-8 = -\sqrt{a-36}$

$\begin{cases} |x| = 8-\sqrt{a-36} \\ 0<|x|\leq 6 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$0 < 8 - \sqrt{a-36} \leq 6$

$-8 < -\sqrt{a-36} \leq -2$

$2 \leq \sqrt{a-36} < 8 \iff \boxed{a \in [40; 100)}$

2) $\begin{cases} y-6-x \leq 0 \\ y-6+x \leq 0 \end{cases}$ $-(6-y) \leq x \leq 6-y$

$|y-6-x| + |y-6+x| = -y+6+x-y+6-x = -2y+12 = 12$

$\begin{cases} y=0 \\ -6 \leq x \leq 6 \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 \\ 0<|x| \leq 6 \end{cases}$

$(|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a$

$(|x|-8)^2 + 36 = a$

$-8 < |x| - 8 \leq -2 \Rightarrow |x|-8 = -\sqrt{a-36}$

$|x| = 8 - \sqrt{a-36}$

$0 < 8 - \sqrt{a-36} \leq 6$

$-8 < -\sqrt{a-36} \leq -2$

$2 \leq \sqrt{a-36} < 8$

$40 \leq a < 100 \iff \boxed{a \in [40; 100)}$

3) $\begin{cases} y-6-x \leq 0 \\ y-6+x \geq 0 \end{cases}$

$|y-6-x| + |y-6+x| = -y+6+x+y-6+x = 2x = 12$

$\begin{cases} x=6 \\ y \leq 12 \\ y \geq 0 \quad y=|y| \end{cases}$

$(|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = 4 + (y-6)^2 = a$ $\quad y-6 = \pm\sqrt{a-4}$

$y = 6 \pm \sqrt{a-4}$

$(y-6)^2 \in [0; 36] \Rightarrow \underline{a \in [4; 40]}$

4) $\begin{cases} y-6-x \geq 0 \\ y-6+x \leq 0 \end{cases}$ $|y-6-x| + |y-6+x| = y-6-x-y+6-x = -2x =$

$= 12$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} x=-6 \\ y \geq 0 \\ y<12 \end{cases}$ $y=|y|$ $\quad (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=4+(y-6)^2=a \quad y=6\pm\sqrt{a-4}$

$(y-6)^2 \in [0;36] \Rightarrow \underline{a\in[4;40]}$.

Значит, при $a\in[40;100]$: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=12 \\ |x|=8-\sqrt{a-36} \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ |x|=8-\sqrt{a-36} \end{cases} \end{array}\right.$

при $a\in[4;40]$: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6 \\ y=6\pm\sqrt{a-4} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-6 \\ y=6\pm\sqrt{a-4} \end{cases} \end{array}\right.$

при $a\in(-\infty;4)\cup[100;+\infty)$ – либо нет решений, либо нечётное число решений, либо бесконечное число решений.

Значит, ровно два решения при $a=4$:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6 \\ y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-6 \\ y=6 \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $\{4\}$.

~~N. 6~~ N. 5.

$R_N=10\sqrt2$

$R_M=4\sqrt2$ $\quad \omega=\frac{v}{R}$

$\omega=\frac{v}{10\sqrt2}$; $5\omega=\frac{2v}{4\sqrt2}$

$x_N=5\cos\omega t-5\sqrt7\sin\omega t$

$y_N=5\sin\omega t+5\sqrt7\cos\omega t$

$x_M=-(2\cos5\omega t-2\sqrt7\sin5\omega t)$

$y_M=-(2\sin5\omega t+2\sqrt7\cos5\omega t)$

(ω – угловая скорость жука; 5ω – водомерки)

кратчайшее расстояние – $r_{min}=R_N-R_M=6\sqrt2$ $\longrightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$r(t) = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$

значит, нужно решить ур-е $r(t) = r_{min}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

700 $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}$ 1 1 1 1 4 5 5 7

$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot7$ 4

7 5 5 4 1 1 1 1

2 2 1 1 1

$\frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot5}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}} = 70$

$70\cdot6\cdot2$

1 1 1 5 5 2 2 7

$\frac{4\cdot3}{1\cdot2} = 6$

$\frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}} = 56$ $56\cdot10\cdot3 = 70\cdot12$

840

$70\cdot6\cdot2 + 56\cdot10\cdot3 = 70\cdot6\cdot2 + 70\cdot8\cdot3 =$

5 $\frac{5\cdot4}{1\cdot2} = 10$

$= 70\cdot(12+24) = 70\cdot36 = \boxed{2520}$

$b_1 \quad qb_1 \quad q^2b_1 \quad \dots \quad q^{n-1}b_1$ $\quad b_1(1+q+q^2+\dots+q^{n-1}) =$

1 2 3 n

$= b_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$

$q_1 > 0$ $q \neq 0$

$b_1\cdot\frac{q^{3000}-1}{q-1} = S$

$(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) + \sqcup = S$

$50\cdot(b_3+b_6+\dots+b_{3000}) + \sqcup = 10S$

$49\cdot(b_3+b_6+\dots+b_{3000}) = 9S$

$b_1\cdot\frac{q^{3000}-1}{q-1}\cdot q\cdot\frac{1}{q+1} =$

$= S\cdot\frac{q}{q+1} = S\cdot\frac{\frac{3}{5}}{\frac{8}{5}} =$

$= \frac{3}{8}S$ $1+\frac{3}{8} = \boxed{\frac{11}{8}}$

$b_3 = q^2\cdot b_1$

$b_6 = q^5\cdot b_1$

$b_9 = q^8\cdot b_1$

$b_{3000} = q^{2999}\cdot b_1$

$9S = 49\cdot q^2\cdot b_1\frac{(q^3)^{1000}-1}{q^3-1}$

$9S = 49q^2b_1\cdot\frac{q^{3000}-1}{q^3-1}$

$9 = 49q^2\cdot\frac{q-1}{q^3-1}$

$S = b_1\cdot\frac{q^{3000}-1}{q-1}$

$9 = 49q^2\cdot\frac{q-1}{(q-1)(q^2+q+1)}$

$\frac{q^2+q+1}{q^2} = \frac{49}{9}$

$9 = 49q^2\cdot\frac{1}{q^2+q+1}$

$\frac{q+1}{q^2} = \frac{40}{9}$

$40q^2 = 9q+9$

$D = 81 + 4\cdot9\cdot40 = 9\cdot169$

$40q^2 - 9q - 9 = 0$

$\sqrt{D} = 39$

$q = \frac{9+39}{2\cdot40} = \frac{48}{2\cdot40} = \frac{16\cdot3}{16\cdot5} = \boxed{\frac{3}{5}}$

$b_1 q\cdot\frac{(q^2)^{1500}-1}{q^2-1} =$

$b_2 + b_4 + \dots + b_{3000} = b_1\cdot q + q^2\cdot b_1 q + q^4\cdot b_1 q + \dots = b_1 q\cdot\frac{q^{3000}-1}{q^2-1}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$ $D=\cancel{\sqrt{100}}\ 4$

$(x+6)(x+4)$ $\frac{-10\pm2}{2}$ -6 -4

$\cancel{x^3}$ 1 0 −4 80

~~−4 1 −4 12~~

~~−6 1 −6 32~~

−6 1 −6 32

$(x+6)\sqrt{\frac{x^3}{2}-2x+40}=(x+6)(x+4)$

$\sqrt{\frac{x^3}{2}-2x+40}=x+4$, $x\geqslant-4$

$\begin{cases}\frac{x^3}{2}-2x+40=x^2+8x+16\\ x\geqslant-4\end{cases}$

$\frac{1}{2}x^3-x^2-10x+24=0$

$\frac{1}{2}$ −1 −10 24

~~$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$~~

2 $\frac{1}{2}$ 0 −10

4 $\frac{1}{2}$ 1 −6 0

$\frac{1}{2}x^3-x^2-10x+24=(x-4)\left(\frac{1}{2}x^2+x-6\right)$

$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=4\\ x^2+2x-12=0\end{array}\right.\\ x\geqslant-4\end{array}\right.$ $D=4+48=52$

$\frac{-2\pm2\sqrt{13}}{2}=-1\pm\sqrt{13}$

$\boxed{\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=\sqrt{13}-1\end{array}\right.}$

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geqslant0$

$(x^4+4x^2+4)+x^4-3x^2-4x-3x^2|x-2|\geqslant0$

$(x^2+2)^2$ $\boxed{x\geqslant2}$ $2x^4-3x^3+7x^2-4x+4$

$2x^4+x^2-4x-3x^3+6x^2+4\geqslant0$ 2 −3 7 −4 4

$2x^4-3x^3+7x^2-4x+4\geqslant0$ ~~1 2 −1 6 2~~

$2x^4-3x^3+6x^2+x^2-4x+4\geqslant0$ ~~−1 2 −5 12 −16~~

$2x^4+7x^2+4\geqslant3x^3+4x$ 2 2 1 9 14

$\frac{\sqrt{17}-1}{2}\ \overset{<}{\vee}\ 2$

$\sqrt{17}\ \underset{<}{\vee}\ 5$

$2x^4<3x^3$ $x\geqslant2$

$2x\leqslant3$

$x<2$

$2x^4+x^2-4x-3x^2(2-x)+4\geqslant0$

$2x^4+x^2-4x-6x^2+3x^3+4\geqslant0$

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4\geqslant0$

$x\in\left(-\infty;\frac{-\sqrt{17}-1}{2}\right]\cup[-2;1]\cup$
$\cup\left[\frac{\sqrt{17}-1}{2};+\infty\right)$

2 3 −5 −4 4

1 2 5 0 −4 0

−2 2 1 −2 0

$\begin{cases}(x-1)(2x^3+5x^2-4)\geqslant0\\ x<2\end{cases}$

$\begin{cases}(x-1)(x+2)(2x^2+x-2)\geqslant0\\ x<2\end{cases}$

$1+16=17$

$\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

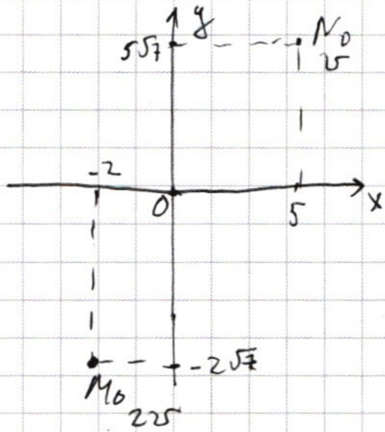
$(x-1)(x+2)\left(x-\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)\geqslant0$

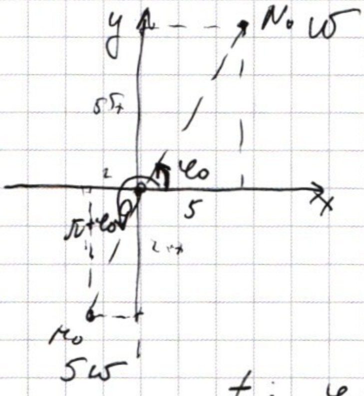
$\frac{-\sqrt{17}-1}{2}$ -2 1 $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ x

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$R_M = \sqrt{4+4\cdot7} = \sqrt{4\cdot8} = 4\sqrt2$

$R_N = \sqrt{25+25\cdot7} = \sqrt{25\cdot8} = 10\sqrt2$

$\omega_M = \frac{2v}{R_M} = \frac{2v}{4\sqrt2} = \frac{v}{2\sqrt2} = 5\cdot\omega$

$\omega_N = \frac{v}{10\sqrt2} = \omega$

$t:\ \varphi_0 + \omega t$ − N

$\pi + \varphi_0 + 5\omega t$ − M

$x_N = R_N\cdot\cos(\omega t+\varphi_0)$

$y_N = R_N\cdot\sin(\omega t+\varphi_0)$

$x_M = R_M\cdot\cos(5\omega t+\pi+\varphi_0)$

$y_M = R_M\cdot\sin(5\omega t+\pi+\varphi_0)$

~~$x_M - x_N =$~~

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\pi) = \cos\alpha\cdot(-1) - \sin\alpha\cdot 0 = -\cos\alpha$

$\sin(\alpha+\pi) = \sin\alpha\cdot(-1) + \cos\alpha\cdot 0 = -\sin\alpha$

$x_N = 10\sqrt2\cdot\cos(\omega t+\varphi_0)$ $\quad x_M = -4\sqrt2\cdot\cos(5\omega t+\varphi_0)$

$y_N = 10\sqrt2\cdot\sin(\omega t+\varphi_0)$ $\quad y_M = -4\sqrt2\cdot\sin(5\omega t+\varphi_0)$

$\cos(\omega t+\varphi_0) = \cos\omega t\cdot\cos\varphi_0 - \sin\omega t\cdot\sin\varphi_0$

$\cos\varphi_0 = \frac{1}{2\sqrt2}$ $\quad \sin\varphi_0 = \frac{\sqrt7}{2\sqrt2}$

$\cos(\omega t+\varphi_0) = \frac{1}{2\sqrt2}\cdot\cos\omega t - \frac{\sqrt7}{2\sqrt2}\cdot\sin\omega t$

$\sin(\omega t+\varphi_0) = \frac{1}{2\sqrt2}\sin\omega t + \frac{\sqrt7}{2\sqrt2}\cos\omega t$

$$\boxed{\begin{aligned} x_N &= 5\cos\omega t - 5\sqrt7\sin\omega t \\ y_N &= 5\sin\omega t + 5\sqrt7\cos\omega t \end{aligned}}$$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 2\omega t = 2\cos^2\omega t - 1$

$\cos 4\omega t = 2(2\cos^2\omega t - 1)^2 - 1 = 2\cdot(4\cos^4\omega t - 4\cos^2\omega t + 1) - 1$

~~cos 4ωt~~ $\cos(5\omega t+\varphi_0)=\frac{1}{2\sqrt2}\cos 5\omega t-\frac{\sqrt7}{2\sqrt2}\cdot\sin 5\omega t$

$\sin(5\omega t+\varphi_0)=\frac{1}{2\sqrt2}\sin 5\omega t+\frac{\sqrt7}{2\sqrt2}\cos 5\omega t$

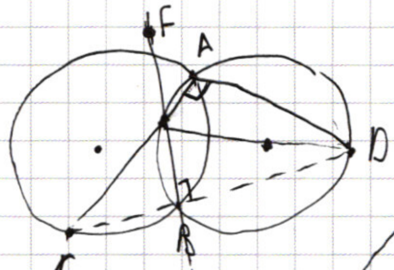
$$\boxed{\begin{aligned}x_M&=-\left(2\cos 5\omega t-2\sqrt7\sin 5\omega t\right)\\ y_M&=-\left(2\sin 5\omega t+2\sqrt7\cos 5\omega t\right)\end{aligned}}$$

$x_N=5\cos\omega t-5\sqrt7\sin\omega t$

$y_N=5\sin\omega t+5\sqrt7\cos\omega t$

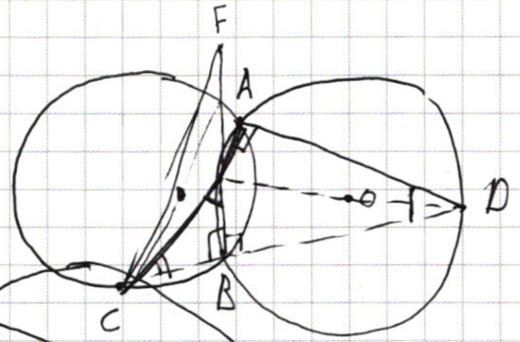
$6\sqrt2 \quad (x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2=x_M^2+x_N^2+y_M^2+y_N^2-2x_Mx_N-2y_My_N$

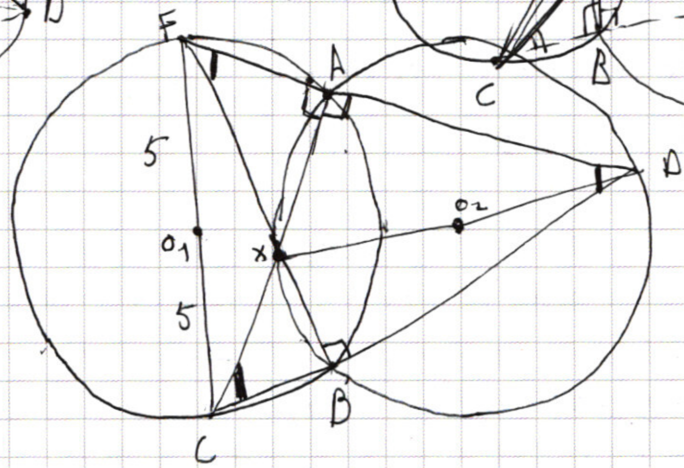
$4\cos^2 5\alpha+28\sin^2 5\alpha-4\sqrt7\cos5\alpha\sin5\alpha$



$BF=BD$

$CF-?$

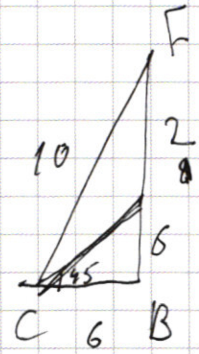




$BF=BD$

$CF=10$

$BC=6$



$AX=AF=\sqrt2$

$CX=6\sqrt2 \quad AC=7\sqrt2 \quad \boxed{S_{ACF}=7}$

~~t~~ ~~|t|+|t+x|~~ $\quad AF=\sqrt2$

$$\begin{cases}|y-6-x|+|y-6+x|=12\\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a\end{cases}$$

$a-?$: ровно 2 решения

$(0;0) \quad a=100$

$(x;y) \quad -x \quad -y$

~~$|-y-6+x|+|-y-6-x|=1$~~

$0;y$

$2|y-6|=12$

$|y-6|=6$

$y=0 \quad a=100$

$y=12 \quad a=100$

$-x \quad y$

$|y-6+x|+|y-6-x|$

y^x ~~$|a-x|$~~ $|t-x|+|t+x|$

$x^2+y^2+100-16|x|-12|y|=a$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y-6-x \geq 0$ $\cancel{-(y-6)} \leq x \leq y-6$

$y-6+x \geq 0$

$2y-12=12$

$\underline{y=12}$ $-6 \leq x \leq 6$ $0 \leq |x| \leq 6$

$36+x^2+64-16|x|=a$

$t^2-16t+64=a-36$

$(t-8)^2=a-36$

$t-8=-\sqrt{a-36}$

$t=8-\sqrt{a-36}$ $\cancel{a \geq 36}$

$0 \leq 8-\sqrt{a-36} \leq 6$

$-8 \leq -\sqrt{a-36} \leq -2$

$2 \leq \sqrt{a-36} \leq 8$

$4 \leq a-36 \leq 64$

$\boxed{40 \leq a < 100}$

$y-6-x \leq 0$

$y-6+x \leq 0$ $(y-6) \leq x \leq -(y-6)$

$-y+6+x-y+6-x=12$

$y=-6$ $-12 \leq x \leq 12$

$0 < |x| \leq 12$

$8-\sqrt{a} \leq 0$

$0 < 8+\sqrt{a} \leq 12$

$\sqrt{a} \geq 8$

$(|x|-8)^2=a$

$|x|-8=\pm\sqrt{a}$

$\begin{cases} |x|=8\pm\sqrt{a} \\ 0<|x|\leq 12 \end{cases}$

$8+\sqrt{a} > 8-\sqrt{a}$

$\begin{cases} 8+\sqrt{a} > 12 \\ 12 \geq 8-\sqrt{a} > 0 \end{cases}$

$\sqrt{a} > 4$

$-8 < -\sqrt{a} \leq 4$

$4 < \sqrt{a} < 8$ $-4 \leq \sqrt{a} < 8$

$\underline{16 < a < 64}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$y-6-x \geq 0$
$y-6+x \leq 0$

$\cancel{y-6}-x\cancel{-y+6}-x=12$

$\underline{x=-6}$

$y \geq 0$
$y-12 \leq 0$

$0 \leq y \leq 12$

$4+(y-6)^2=a$

$y-6=\pm\sqrt{a-4}$

$y=\cancel{\pm(}\ 6\pm\sqrt{a-4}$ $a=4$ $y=6$

$y-6-x \leq 0$
$y-6+x \geq 0$

$-y+6+x+y-6+x=12$

$x=6$

$s,t \geq 6$
$s+t=24$

$0 \leq y \leq 12$

$\cancel{4}$ $\underline{a=4}$

$$\left[\begin{array}{l} 40 \leq a < 100 \\ 16 < a < 64 \\ a=4 \end{array}\right.$$

$|s-6|+|t-6|=12$

$\left(\frac{|t-s|}{2}-8\right)^2+\left(\frac{|t+s|}{2}-6\right)^2=a$

$(|t-s|-16)^2+(|t+s|-12)^2=4a$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)