

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

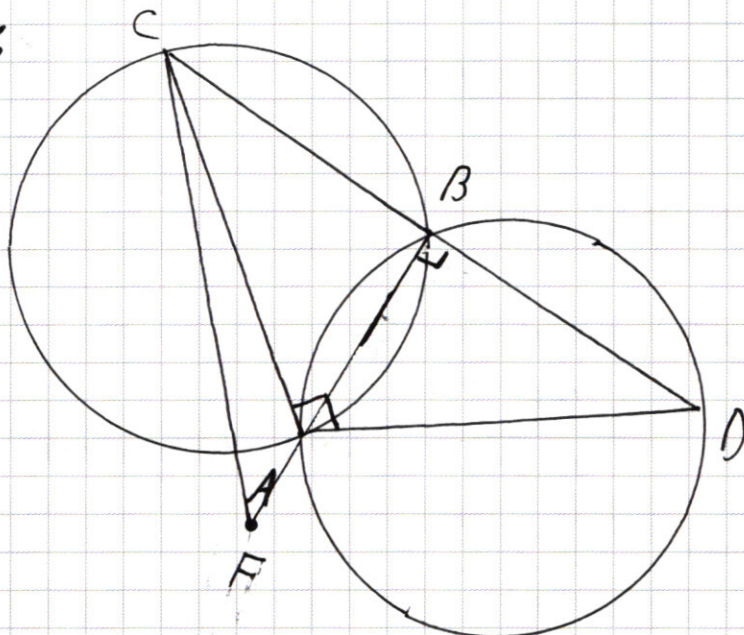
Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

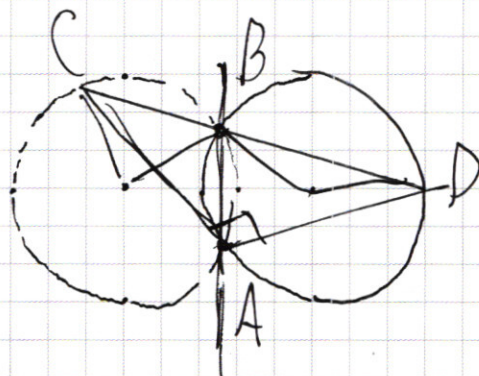
$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

N6



$r=5$



N7 $|y-6-x| + |y-6+x| > 12$

1) $\begin{cases} y-6-x \geq 0 \\ y-6+x \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y \geq x+6 \\ y \geq 6-x \end{cases}$ ~~или $y \geq 6-x$~~ $CB^2 + BD^2 = ?$

$2(5^2 + 5^2) - 2 \cdot 5^2 \cdot (\cos \angle COB + \cos \angle BOD)$

$2x = 24$

$y = 12$

2) $\begin{cases} y-6-x < 0 \\ y-6+x < 0 \end{cases}$ или ~~$\begin{cases} y < x+6 \\ y < 6-x \end{cases}$~~

~~$x+6-y > x+6-y = 12$~~

$y = 0$

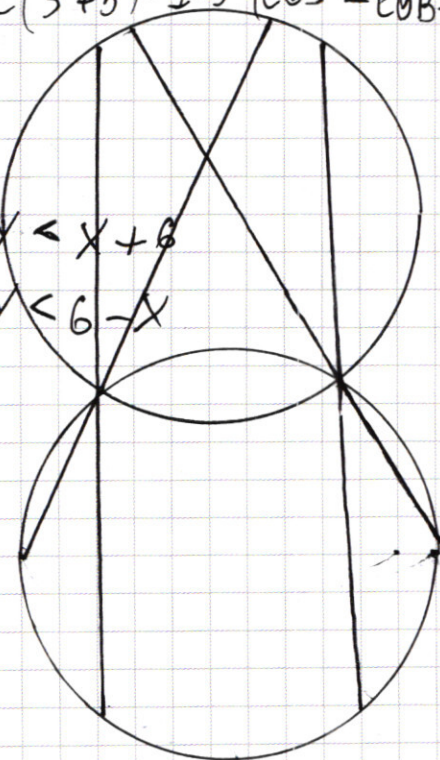
3) $\begin{cases} y-6-x < 0 \\ y-6+x \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y < x+6 \\ y \geq 6-x \end{cases}$

~~$x+6-y + y-6+x = 12$~~

$x = 6$

4) $\begin{cases} y \geq x+6 \\ y < 6-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-6-x - y + 6-x = 12 \end{cases}$

$x = -6$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (часть 2)

$$S_4 = b_1 + b_3 + b_5 + \dots + b_{2999} = \frac{b_1(1 - q^{3000})}{1 - q^2} \quad (\text{geom. прогрессия})$$
$$S_5 = b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{3000} = \frac{b_2(1 - q^{3000})}{1 - q^2}$$

$$S_4 + S_5 = S$$

$$S_4 + 2S_5 = S \left(1 + \frac{S_5}{S}\right)$$

$$\frac{S_5}{S} = \frac{b_2 \cancel{(1 - q^{3000})} (1 - q)}{(1 - q^2) b_1 \cancel{(1 - q^{3000})}} = \frac{q}{(1 + q)} = \frac{\frac{3}{5}}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{3}{8}$$

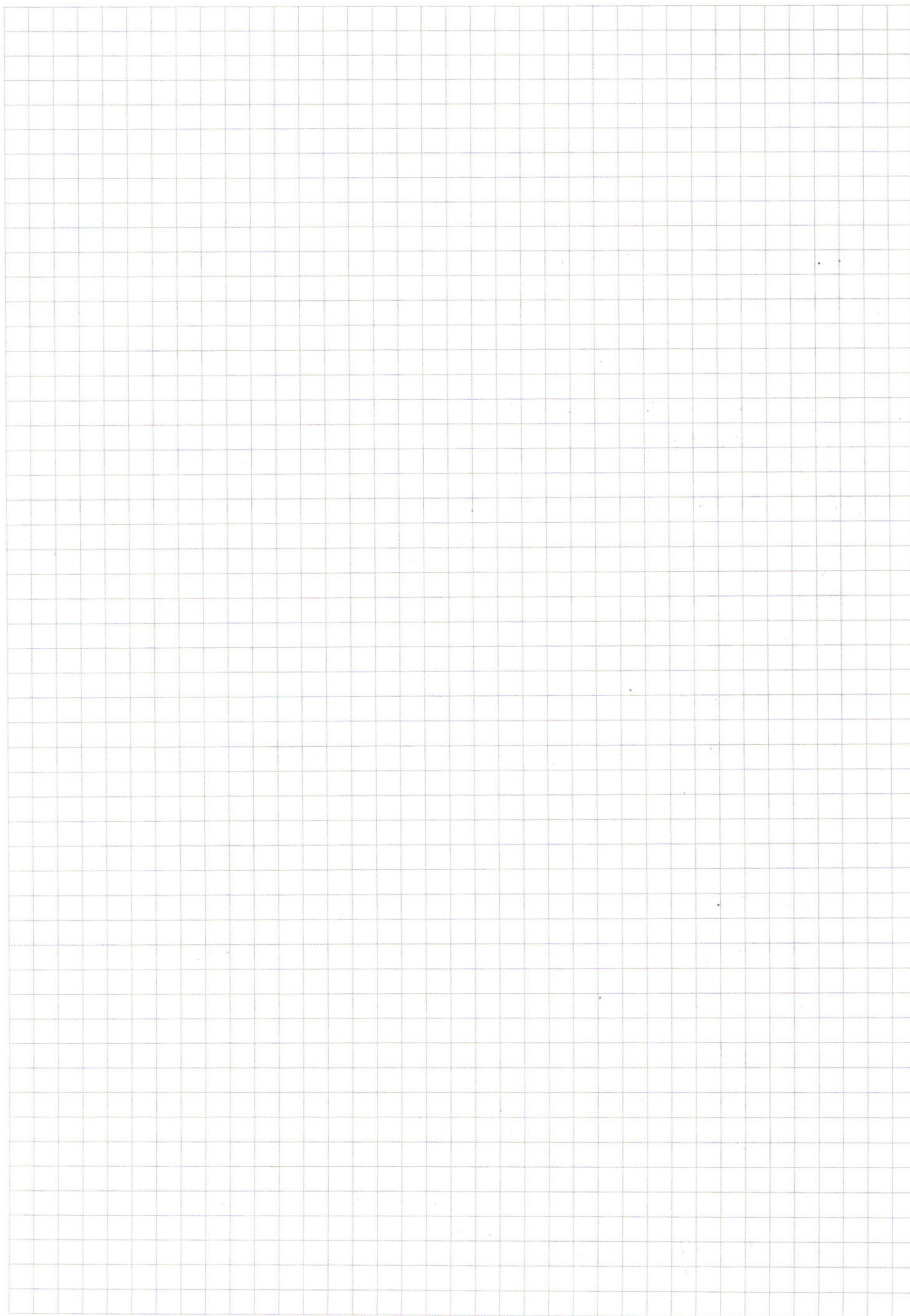
$$S_4 + 2S_5 = S \cdot \frac{11}{8}$$

Ответ: увеличится в $\frac{11}{8}$ раз или $1\frac{3}{8}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (часть 2)

Тогда в 4-х секторах из 5 можно достичь ^{единицы} расстояния между насекомыми, равно ^{единицы} расстоянию между окр. т. е. $r_2 - r_1$, (исключается сектор, содержащий т. старта), потому что, когда ~~возвращается~~ ^{возвращается} проходит этот сектор, то она пробегает по всем возможным положениям, бежит за жуком и быстрее! Затем удаляется, поэтому больше таких вариантов не будет. Причём это минимальное возможное расстояние. В оставшемся секторе она с ним так не встретится, потому что она изначально убегает, а когда, завершая круг, догоняет его, то встретиться они так опять же не смогут, когда она закончит, жук будет на окончании тоже. Из этого, конечно, есть один крайний случай, когда т. старта прямо на границе сегмента, но тогда т. „встречи“ на этих сегментах совпадут (и будут на этой границе). Получается, что всего таких 4 случая, расстояние будет $6\sqrt{2}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7 (2 часть)

Теперь рассмотрим второе уравнение

Если бы не модуль, то это была бы окружность с центром в т. $(8; 6)$ и радиусом $7a$ (при $a > 0$, при $a = 0 \rightarrow$ просто т., при $a < 0$ нет решений)

Из-за модулей это выполняется только в I коорд. четверти (II и III получают симметрией отн. OY и OX, IV симметрична I-ой отн. OX и OY)

При $a = 0$ решений нет

Начнем его увелич.

(для III и IV коорд. четв. первое пересечение с графиком возникнет в угловой вершине, расстояние между ними

$$\sqrt{(8-6)^2 + (-6-6)^2} = \sqrt{40}, \text{ для I и II первое пересечение}$$

будет на стороне (в т. опущ. перпенд. т.к. это кр. расстояние), расстояние до равно двум $\rightarrow$ раньше)

$a < 2^2 \rightarrow$ нет решений

$a = 2^2 \rightarrow$ оба графика симметричны отн. OY,

поэтому касание произойдет с двух сторон $\rightarrow$ два решения

При дальнейшем увелич. лишь в I коорд. четв.

будет две т. пер. (симметрия отн. $y = 6$) $\Rightarrow$ в II

столько же, что уже больше двух

Так будет продолжаться до $a = 10^2$, потому что

№7 (3 часть)

хоть и останется в I коорд. четверти два решения, но они уже будут на ОУ и симметрия не даст нам доп. решений (в II коорд. четв. будут эти же решения на ОУ). Более того, в III и IV коорд. четв. пересечения могут быть только с частью графика на Ох, а при таком радиусе построив окр. с таким радиусом мы убедимся, что новых решений не появляется.

Почему при $a > 100$ не может быть решений. Просто их не будет в I коорд. четверти (т. пер. с ОУ будет иметь $y > 12$, т. пер. с Ох $> 16 \Rightarrow$ часть графика в I будет внутри окр.) $\Rightarrow$ в II тоже, а в III и IV они могут быть только на Ох (опять же лишь одна т. пер. с $|x| > 16$) $\rightarrow$ нет

Ответ: $a_{1,2} = 4; 100$

№5

$$M_0(-2; -2\sqrt{7}) \rightarrow r_1 = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{7})^2} = 4\sqrt{2}$$

$$N_0(5; 5\sqrt{7}) \rightarrow r_2 = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{7})^2} = 10\sqrt{2}$$

$$t_1 = \frac{S_1}{v_1}$$

$$v_2 = \frac{1}{2} v_1$$

$$S = 2\pi r$$

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{S_1}{v_1} \\ v_2 = \frac{1}{2} v_1 \\ S = 2\pi r \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{S_1 \cdot \frac{1}{2} v_1}{v_1 \cdot S_2} = \frac{2\pi \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}}{2\pi \cdot 10\sqrt{2}} = \frac{1}{5} \quad \left(\begin{array}{l} \text{за один круг} \\ \text{жука водомерка} \\ \text{проходит пять} \end{array} \right)$$

можно разделить окр. на 5 частей (откладывая $\frac{1}{5}$ длины окр. от т. жука)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$$2x^4 + x^2 - 4x - 2x^2(x-2) + 4 \geq 0$$

1) $x \geq 2$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + (x^2 - 4x + 4) \geq 0$$

$$x^2(2x^2 - 3x + 6) + (x-2)^2 \geq 0$$

$$x^2 \geq 0; (x-2)^2 \geq 0; (2x^2 - 3x + 6) \geq 0 \Rightarrow \text{верно для всех } x \geq 2$$

$$D = 9 - 4 \cdot 6 \cdot 2 < 0$$

2) $x < 2$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

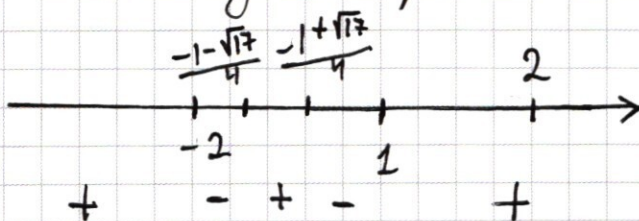
$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2 + x - 2) \geq 0$$

$$D = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

Метод интервалов

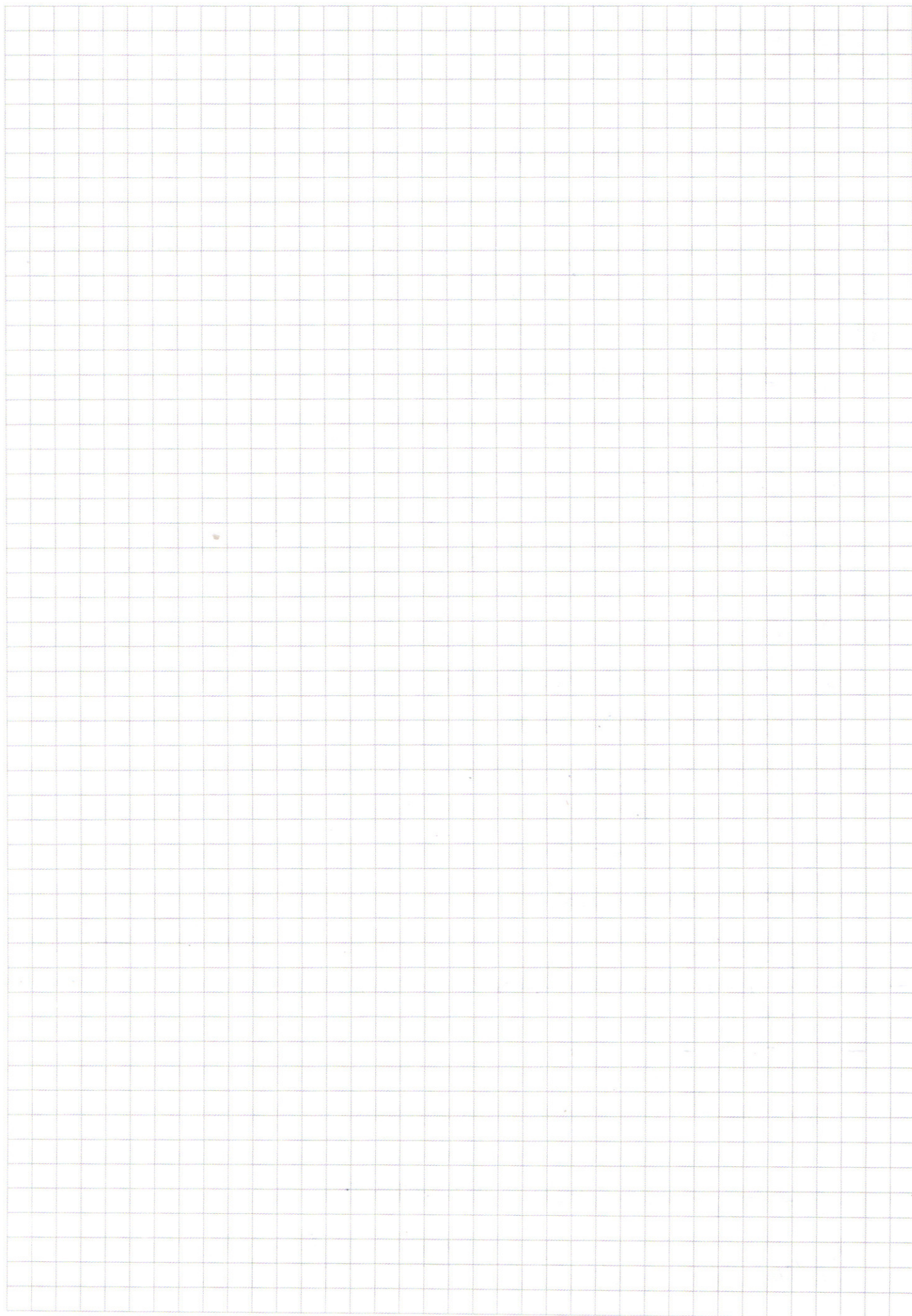


$$x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; 2)$$

$$0 < \frac{-1+\sqrt{17}}{4} < 1 \text{ т.к. } \sqrt{17} < 5 = \sqrt{25}$$

$$-2 < \frac{-1-\sqrt{17}}{4} < 0 \text{ т.к. } \sqrt{17} < 7 = \sqrt{49}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty)$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№7

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения

Решим графически

Первое уравнение не содержит параметра

$$|y-6-x| + |y-6+x| = 12$$

$$1) \quad \begin{cases} y \geq x+6 \\ y \geq 6-x \end{cases}$$

$$y-6-x+y-6+x=12$$

$$y=12$$

$$2) \quad \begin{cases} y < x+6 \\ y < 6-x \end{cases}$$

$$x+6-y+6-x-y=12$$

$$y=0$$

$$3) \quad \begin{cases} y \geq x+6 \\ y < 6-x \end{cases}$$

$$y-6-x-y+6-x=12$$

$$x=-6$$

$$4) \quad \begin{cases} y < x+6 \\ y \geq 6-x \end{cases}$$

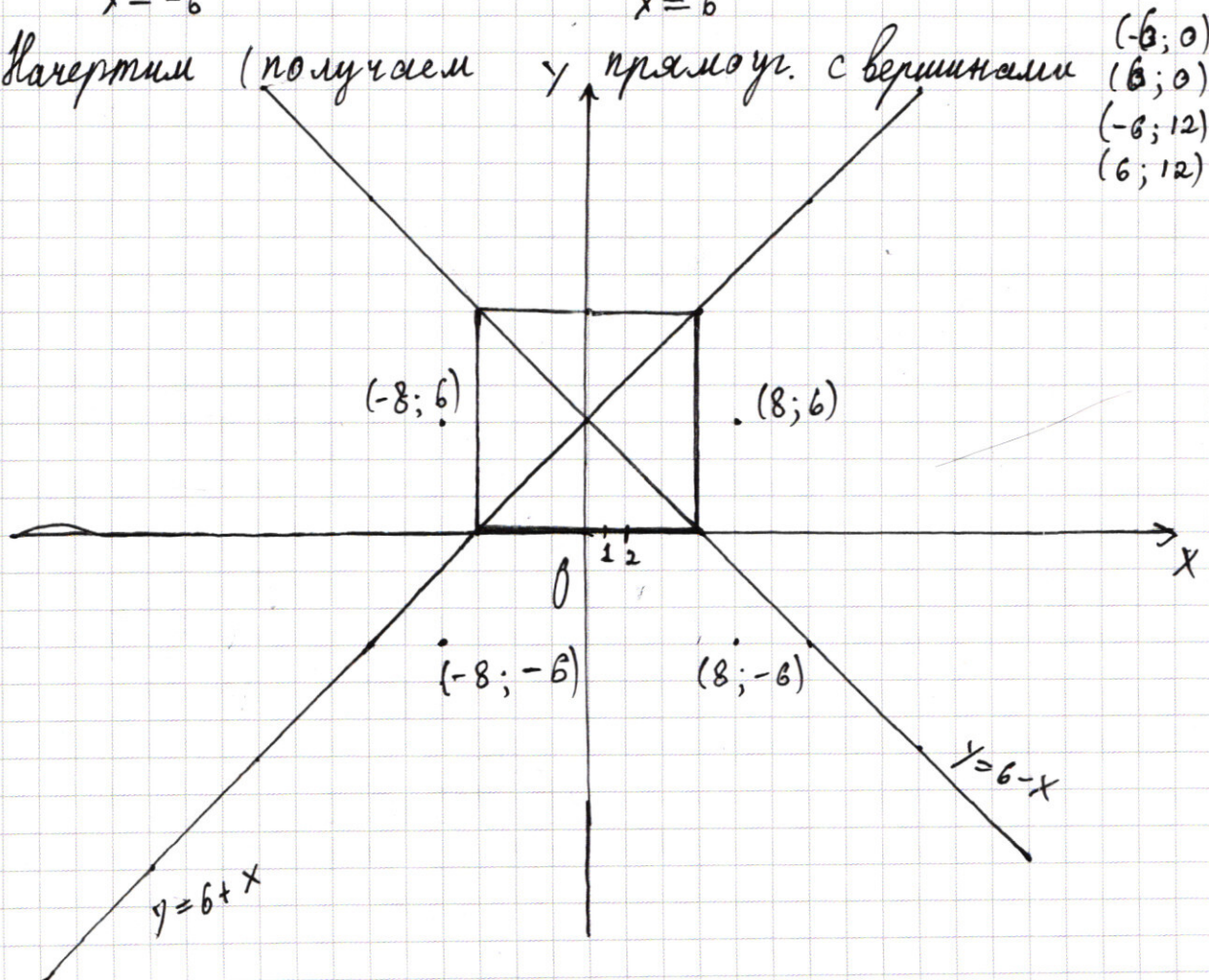
$$-y+6+x+y-6+x=12$$

$$x=6$$

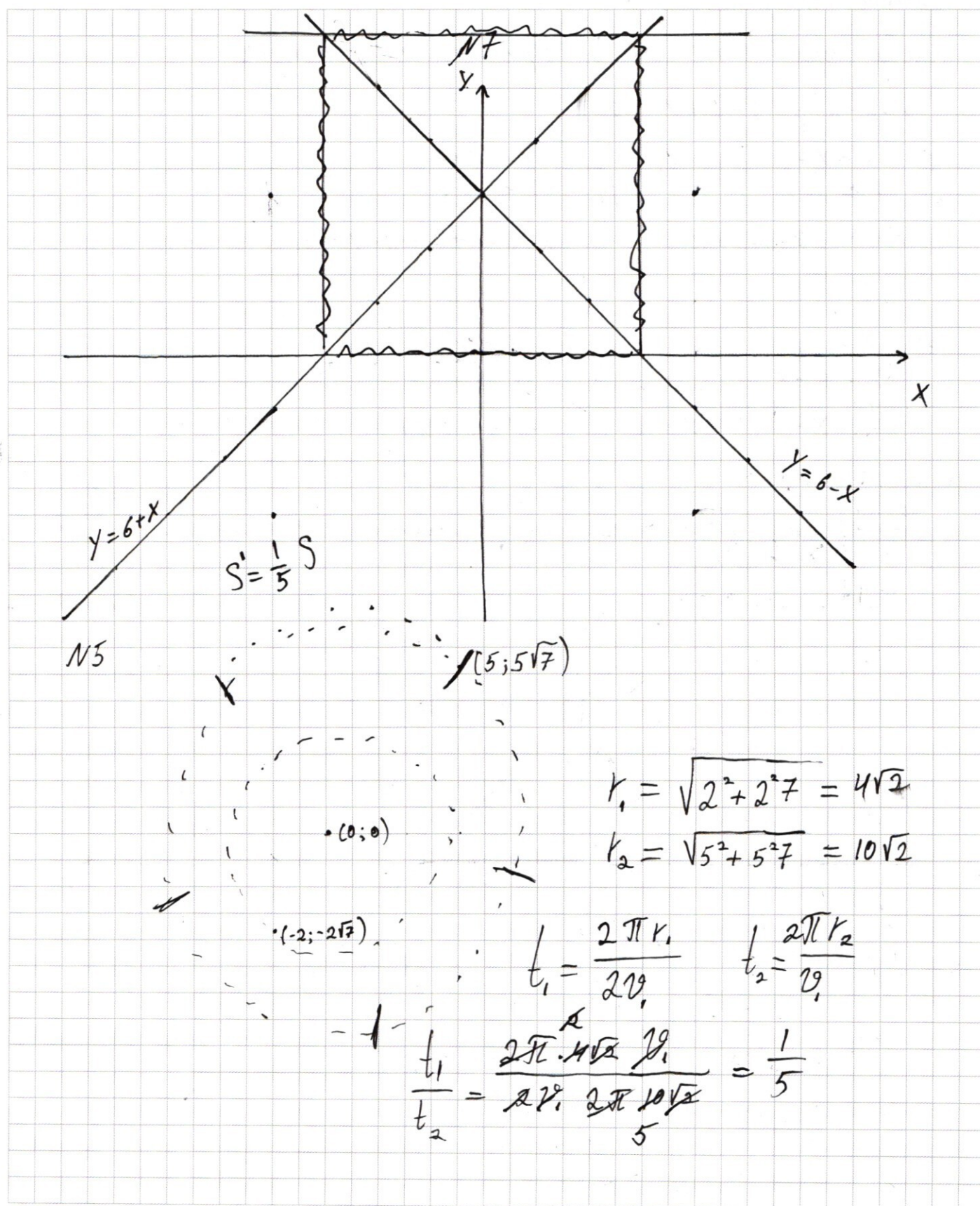
Начертим (получаем

у прямоуго. с вершинами

$(-6; 0)$
 $(6; 0)$
 $(-6; 12)$
 $(6; 12)$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$a_1 a_2 a_3 \dots a_8$ - такое число

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = 700 = 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$

$$0 \leq a_1 \leq 9 \quad a_1 \in \mathbb{Z}$$

$$0 \leq a_2 \leq 9 \quad a_2 \in \mathbb{Z}$$

$$0 \leq a_8 \leq 9 \quad a_8 \in \mathbb{Z}$$

П.к. произведение цифр равно 700, то цифры, отличные от 1; 2; 4; 5; 7, не подходят (при нуле произведение будет равно нулю, при остальных произведение будет на них делиться, но $700 \nmid 3$; $700 \nmid 6$; $700 \nmid 8$; $700 \nmid 9$)

Единственная из этих цифр, что делится на 5 и есть эта пятёрка, поэтому их должно быть две в нашем числе. (при меньшем произв. не будет делиться на 25) Аналогично с 7, она должна быть ровно одна.

С 2 сложнее, в нашем числе может быть либо две 2, либо одна 4, т.к. искомая степень 2 должна быть равна 2

Остальные цифры будут 1, ведь произведения нужного мы уже достигли (остальные цифры его увеличат)

N1

1113 22 557

1111 4557

$$\frac{8!}{2! \cdot 2!} + \frac{8!}{2!} = 8! \cdot \frac{1}{4} + 8! \cdot \frac{1}{2} = 8! \cdot \frac{3}{4} =$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{\overset{30}{3} \cdot \overset{210}{2} \cdot \overset{1680}{4} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{4} \cdot 2 \cdot 2} + \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot 2} =$$

$$= 1680 \cdot \frac{3}{2} = 2520$$

N2

$$S = \underset{\underset{0}{V}}{b_1} + \underset{\underset{0}{V}}{b_2} + \dots + \underset{\underset{0}{V}}{b_{3000}} = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q}$$

$$S_1 = b_1 + b_4 + \dots b_{2998} = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q^3}$$

$$S_2 = \dots = \frac{b_2(1-q^{3000})}{1-q^3}$$

$$S_3 = \dots = \frac{b_3(1-q^{3000})}{1-q^3}$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = S$$

$$S_1 + S_2 + 50 S_3 = 10 S$$

$$S_1 + 2S_2 + S_3 = ?$$

$$q_{1,2} = \frac{9 \pm 39}{80} = -\frac{3}{8}; \frac{3}{5}$$

$$\text{49} \quad \frac{\cancel{b_1} q^2}{\frac{b_3(1-q^{3000})}{1-q^3}} = 9 \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q}$$

$$\frac{q^2}{q^2+q+1} = \frac{9}{49} \quad \left| \begin{array}{l} D = 81 + 4 \cdot 49 \cdot 9 = \\ = 169 \cdot 9 = \\ = 13 \cdot 3^2 = \\ = 39^2 \end{array} \right.$$

$$40 q^2 - 9q - 9 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1/3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$(\cancel{x+6}) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(\cancel{x+6})(x+4)$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(x+4)$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2(x+4)^2}$$

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ x^3 - 4x + 80 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$(x-4)(x^2 + 2x - 12) = 0$$

$$D = 4 + 48 = 52 = 2^2 \cdot 13$$

$$\underline{\underline{x_3 = 4}}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = -1 \pm \sqrt{13}$$

$$\underline{\underline{-1 + \sqrt{13}}}$$

1/4

$$x \geq 2$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + (\underline{2}x - 2)^2 \geq 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 6 \cdot 2 < 0$$

$$x < 2$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2 + x - 2) \geq 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$(x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(x+6)(x+4)$$

Заметим, что (-6) корнем быть не может, т.к. не входит в ОДЗ корня $x^3 - 4x + 80$, поэтому на $(x+6)$ можно сократить.

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(x+4)$$

Теперь напомним ОДЗ (до этого мы его не изменяли)

$$\begin{cases} x^3 - 4x + 80 \geq 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases} \leftarrow \sqrt{x^3 - 4x + 80} \geq 0$$

$$\begin{cases} x^3 - 4x + 80 = 0 \\ x + 4 = 0 \end{cases} \leftarrow \sqrt{x^3 - 4x + 80} = 0$$

П.к. $x+4 \geq 0$ внесём его под корень

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2(x+4)^2}$$

Если корни равны, то и значения под ними равны.

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$(x-4)(x^2 + 2x - 12) = 0$$

$$(x-4) = 0$$

$$\downarrow$$

$$x_1 = 4$$

$$\begin{cases} x^3 - 4x + 80 > 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\downarrow D = (2\sqrt{13})^2$$

$$x_2 = -1 + \sqrt{13}$$

$$x_3 = -1 - \sqrt{13}$$

x_3 не подходит,

$$\text{т.к. } x_3 + 4 = 3 - \sqrt{13} = \sqrt{9} - \sqrt{13} < 0$$

$$x_2 + 4 = 3 + \sqrt{13} > 0$$

$$\rightarrow x_2^3 - 4x_2 + 80 > 0$$

$$\downarrow \text{т.к. } x_2 > 0 \quad \left(x < 20 = \sqrt{400}, \text{ поэтому } |-4x| < |80| \right)$$

Ответ: $x_{1,2} = 4; -1 + \sqrt{13}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Получается, что нужно посчитать ^{количество} ~~число~~ чисел с набором цифр (7; ~~5~~; 5; 4; 1; 1; 1; 1) и (7; 5; 5; 2; 2; 1; 1; 1), а затем сложить их (числа, относящиеся к обоим множествам быть не может)

И в том, и в том случае число перестановок будет равно $8!$, но если мы будем считать так, то одинаковые цифры (5 и 5) мы будем воспринимать различными. Поэтому нужно посчитать для каждой цифры, сколько раз мы посчитали такие одинаковые положения. Если цифра встречается n раз, то $n!$ (число перестановок этих цифр между фиксированными для ситуации позициями). В итоге нужно поделить на это число (одну и ту же позицию мы посчитали $n!$ раз). Дальше аналогичные рассуждения для всех других цифр.

$$\begin{array}{r}
 8! \\
 \hline
 4! \cdot 2! \\
 \uparrow \quad \uparrow \\
 4, 1'' \quad 2, 5''
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 8! \\
 \hline
 3! \cdot 2! \cdot 2! \\
 \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 3, 1'' \quad 2, 2'' \quad 2, 5''
 \end{array}
 = \underline{\underline{2520}}$$

Ответ:

$$b_1, b_2, \dots, b_{3000} ; \quad \begin{matrix} \text{N2} \\ b_i = b_{i-1} \cdot q \quad (i > 1) \Rightarrow b_i = b_{i-3} \cdot q^3 \quad (i > 3) \\ \Rightarrow b_i = b_{i-2} \cdot q^2 \quad (i > 2) \end{matrix}$$

$$S = b_1 + b_2 + \dots + b_{3000} = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q}$$

$$S_1 = b_1 + b_4 + \dots + b_{2998} = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q^3} \quad (\text{geom. прогрессия})$$

$$S_2 = b_2 + b_5 + \dots + b_{2999} = \frac{b_2(1-q^{3000})}{1-q^3} \quad (\text{geom. прогрессия})$$

$$S_3 = b_3 + b_6 + \dots + b_{3000} = \frac{b_3(1-q^{3000})}{1-q^3} \quad (\text{geom. прогрессия})$$

$$\left. \begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 &= S \\ S_1 + S_2 + 50S_3 &= 10S \end{aligned} \right\} \Rightarrow 49S_3 = 9S$$

$$49 \cdot \frac{b_3 \cdot q^2 (1-q^{3000})}{1-q^3} = 9 \cdot \frac{b_1 (1-q^{3000})}{1-q}$$

(q^2 + q + 1)

$$\frac{49}{9} = \frac{q^2 + q + 1}{q^2} \Rightarrow 49q^2 = 9q^2 + 9q + 9 \Rightarrow 40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$D = 39^2 \Rightarrow q_{1,2} = \frac{9 \pm 39}{80} = \frac{3}{8}; \frac{3}{5} \quad \text{не подходит т.к.}$$

$b_1 > 0; b_2 > 0; b_2 = b_1 \cdot q$
(при $q < 0$ b_1 и b_2 разного знака)

~~$$S_1 + 2S_2 + S_3 = S \left(1 + \frac{S_2}{S}\right)$$~~

~~$$\frac{S_2}{S} = \frac{b_2 (1-q^{3000}) (1-q)}{(1-q^3) b_1 (1-q^{3000})} = \frac{q(1-q)}{(1-q^3)} = \frac{q}{q^2 + q + 1} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{25} + \frac{3}{5} + 1} = \frac{15}{49} \Rightarrow$$~~

~~$$\Rightarrow S_1 + 2S_2 + S_3 = S \cdot \frac{64}{49}$$~~

~~Ответ: увеличится в $\frac{64}{49}$ или $1\frac{15}{49}$~~