МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2; -2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5; 5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Пусть такое число существует и оно равно $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$, тогда $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = 700$. Т.к. произведение восьми чисел не равно 0, значит среди них нет 0, а так как это цифры числа, то они могут быть равны только 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = 700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

Значит, либо 2 числа равно 2, 2 числа равно 5, одно число равно 7, а остальные 3 числа 1, либо 1 число равно 4, 2 числа 5, 1 число 7, а остальные 4 числа 1.

Тогда в первом случае может быть $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!}$ вариантов, а во втором $\frac{8!}{4! \cdot 2!}$.

$\frac{8!}{4! \cdot 2!} + \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} + 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = \frac{3}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 =$
$= 2520$

Ответ: 2520 чисел.

№2

~~$(b): b_1, b_2, \ldots \quad q_1 = q$.~~

Пусть знаменатель геометр. прогр. равен q, тогда ее члены с номерами кратными 3 образуют геомет. прог. с первым членом b_1q^2 и со знаменателем q^3.

$S = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{3000}$ $\quad 10S = b_1 + b_2 + 50b_3 + b_4 + b_5 + 50b_6 + \ldots + 50b_{3000}$

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geq 0$

$2x^4+x^2-4x-3x^3+6x^2+4\geq 0,\ x\geq 2$

$\boxed{2x^4-3x^3+7x^2-4x+4}\geq 0,\ x\geq 2$ $\Rightarrow$ при всех $x\geq 2$

$x^3(2x-3)+$

$2x^4+x^2-4x+3x^3-6x^2+4\geq 0,\ x<2$

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4\geq 0,\ x<2$

$\cancel{x^2(2x+3)}$

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4 \mid x-1$

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4 \div (x-1) = 2x^3+5x^2-4$

$-\ 2x^4-2x^3$

$5x^3-5x^2$

$-\ 5x^3-5x^2$

$-4x+4$

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4 \div (x-1) = 2x^3$

$2x^4-2x^3$

$5x^3-5x^2$

$5x^3-5x^2$

$-6x^2-4x$

$-6x^2-6x$

$2x+4$

$2x^3+5x^2-4 \div (x+2) = 2x^2+3x$

$2x^3+2x^2$

$3x^2$

$3x^2+6x$

$-6x-4$

$(x-1)(2x^3+5x^2-4)\geq 0$

$2x^3+5x^2-4 \div (x+2) = 2x^2+x-2$

$-\ 2x^3+4x^2$

x^2

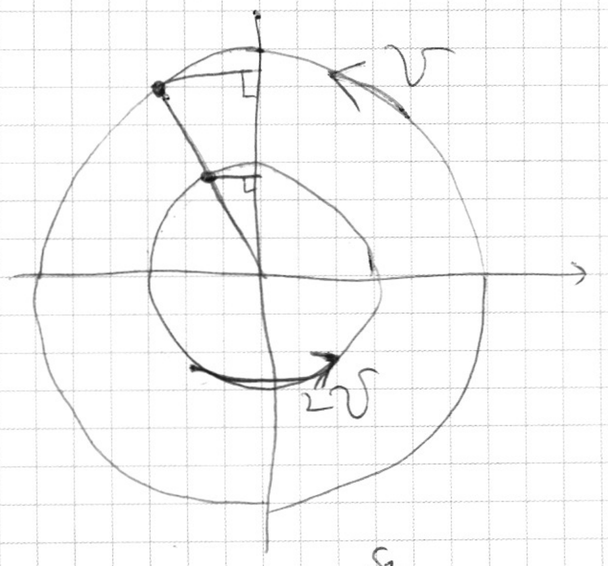
x^2+2x

$-2x-4$

$(x-1)(x+2)\left(x+\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\geq 0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+16}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+16}}{4}$



4 раза пересечет

4 раза

5 кругов.

$\sqrt{4+28}$

$\sqrt{25+25\cdot 7}$

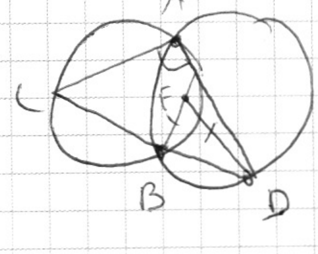
$2\pi\cdot 4\sqrt{2}=8\sqrt{2}\pi$

$2\pi\cdot 2\sqrt{2}\cdot 5=20\sqrt{2}\pi$

$\frac{x_1}{x_2}=$

$t=4\sqrt{2}\pi$

$t=20\sqrt{2}\pi$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10S - S = 49(\cancel{b_0} b_3 + b_6 + \ldots + b_{3000})$

$9S = 49(b_3 + b_6 + \ldots + b_{3000})$

I) Если $q \neq 1$ II) Если $q = 1 \Rightarrow 9 \cdot 3000 b_1 = 49000 b_1$ - противор.

$$9 \cdot \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1} = 49 \cdot \frac{b_1 q^2((q^3)^{1000}-1)}{q^3-1}$$

$\cancel{9q^3 - 9 = 49q - 49}$ $\cancel{9q^3 - 49q + 40 = 0}$

$9q^3 - 9 = 49q^2(q-1)$ $49q^3 - 49q^2 - 9q^3 + 9 = 0$

$40q^3 - 49q^2 + 9 = 0$ $(q-1)(40q^2 - 9q - 9) = 0$

т.к. $q \neq 1 \Rightarrow 40q^2 - 9q - 9 = 0$

$q = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 1440}}{80} = \frac{9 \pm 39}{80}$ $\left[\begin{array}{l} q = 0{,}6 \\ q = -\frac{3}{8} \end{array}\right.$, но т.к. все члены положительные,

то $q = 0{,}6$.

Пусть S увеличилась в x раз после того, как все ее члены, стоящие на четных местах, увеличили в 2 раза, тогда:

$Sx - S = b_1 + 2b_2 + b_3 + 2b_4 + \ldots + 2b_{3000} - b_1 - b_2 - \ldots - b_{3000} =$
$= b_2 + b_4 + \ldots + b_{3000}$

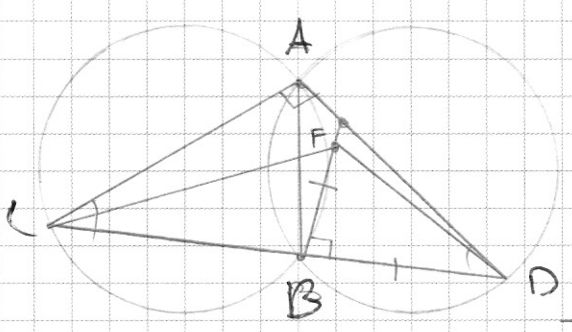
Четные члены образуют геом. прог. с первым членом $b_1 q$ и со знаменателем q^2, тогда

$$S(x-1) = \frac{b_1 q((q^2)^{1500}-1)}{q^2-1} = (x-1)\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}$$

$$x - 1 = \frac{q(q^{3000}-1)(q-1)}{q(^{3000}-1)(q^2-1)} = \frac{q}{q+1} \qquad x = \frac{0{,}6}{0{,}6+1} + 1 = \frac{0{,}6}{1{,}6} + 1$$

$x = 1\frac{3}{8}$

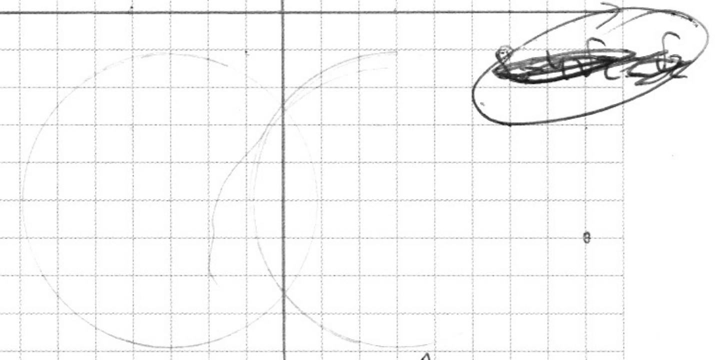
Ответ: в $1\frac{3}{8}$ раза.



$1-2\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{4}$

$1-2\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt2}{2}$

$\sin\frac{\pi}{8}=$ $\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{-\frac{\sqrt2}{2}+1}{2}=2-\sqrt2=\frac{\sqrt2}{4}$



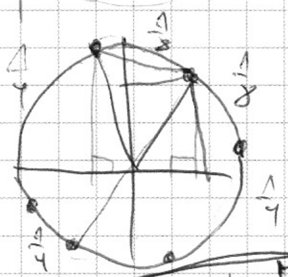
$\sin(x)$

$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sin x\frac{\sqrt2}{2}+\cos x\frac{\sqrt2}{2}$

$$\begin{cases}|y-6-x|+|y-6+x|=12\\(|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a\end{cases}$$

$$\begin{cases}y-6-x+y-6+x=12,\ y\geq 6+x,\ y\geq 6-x\\ y=6\end{cases}$$

$4v=\frac{16}{5}\sqrt2\ \frac{\pi}{v}$ $\frac{8}{5}\sqrt2\frac{\pi}{v}$



$\boxed{\sin=\frac{5}{10\sqrt2}=\frac{1}{2\sqrt2}=\boxed{\frac{\sqrt2}{4}}}$

$\frac{\frac{8}{5}\sqrt2\ \frac{\pi}{v}}{20\sqrt2}$ $\frac{\frac{8}{5}}{20}=\frac{8}{100}$

$\frac{2}{16}\cdot 2$ $\frac{7}{8}$

8 16 16 16

$\frac{5\sqrt2}{2}$

$\frac{2\cdot5}{20}=\frac{5}{40}=$

$25+7\cdot25=25\cdot8=5\cdot2\sqrt2$

$\cancel{\frac{\sqrt2}{2}}$ $\sin\frac{\pi}{8}=$

$1-2\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{4}$

$1-2x^2=\frac{\sqrt2}{2}$

$2-4x^2=\sqrt2$

$4x^2=2-\sqrt2$

$x^2=\frac{2-\sqrt2}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$$

$$(x+6)\sqrt{x^3-4x+80}=\sqrt{2}(x^2+10x+24)$$

при $x=-6$ $x^3-4x+80<0 \Rightarrow x=-6$ - не явл. корнем, значит $x+6\neq 0$.

$$\sqrt{x^3-4x+80}=\sqrt{2}\,\frac{(x+6)(x+4)}{x+6}$$

$$\sqrt{x^3-4x+80}=\sqrt{2}(x+4)\geq 0$$

$$\begin{cases} x^3-4x+80=2x^2+16x+32 \\ \cancel{x^3-4x+80}\ x\geq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3-2x^2-20x+48=0 \\ x\geq -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x^2+2x-12)=0 \\ x\geq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{(x-4)} \\ \cancel{x\geq -4} \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=\frac{-2\pm\sqrt{52}}{2} \end{array}\right. \\ x\geq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-1+\sqrt{13} \\ x=-1-\sqrt{13} \end{array}\right. \\ x\geq -4 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-1+\sqrt{13} \end{array}\right.$$

$$\sqrt{9}<\sqrt{13}<\sqrt{16} \Rightarrow 3<\sqrt{13}<4$$

Ответ: $\{-4; -1+\sqrt{13}\}$.

№4

$$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geq 0$$

при $x\geq 2$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^4+x^2-4x-3x^3+6x^2+4\geq 0 \\ x\geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^4+x^2-4x+3x^3-6x^2+4\geq 0 \\ x<2 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \overset{0}{\wedge}x^3(2x-3)+x(7x-4)+4\geq 0 \\ x\geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^4+3x^3-5x^2-4x+4=0 \\ x<2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$(2x-3)>0$, при $x\geq 2$, $(7x-4)\geq 2$, при $x\geq 2$, x и x^3 больше 0 тоже

$\frac{48}{80}\cdot\frac{12}{20}=\frac{6}{10}$

$\times\frac{39}{39}$ 351 117 1521

$\times\frac{160}{9}$ 1440 $\sqrt{8\cdot 9+4\cdot 40\cdot 8}=3\sqrt{169}$

~~abcdef~~ $\overline{a_1a_2\ldots a_8}$

$a_1\cdot a_2\cdot a_3$: $a_8=700=2\cdot5\cdot2\cdot5\cdot7=2^2\cdot5^2\cdot7$

$\frac{-30}{80}$

5 5 7 2 2 1 1 1
5 5 7 4 1 1 1 1

$\times\frac{13}{13}$ 39 13 ... 52 | 4, 13

$\frac{8!}{2!\cdot2!\,3!}+\frac{8!}{2!\,4!}=\frac{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{4}+\frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{2}=\frac{3}{2}\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8=5\cdot7\cdot8\cdot9$

$x^3-2x^2-20x+48 \,|\, x-4$
$x^2+2x-12$
$-x^3-4x^2$
$2x^2-20x$
$2x^2-8x$
$-12x+48$

$b_1;\ b_1q,\ b_1q^2,$ $q_2=q^3$

$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+48}}{2}$

$-1\pm\sqrt{13}$

$\frac{b_1(q^3-1)}{q-1}=$ $S=\frac{b_1q^2((q^3)^n-1)}{q^3-1}=49\cdot\frac{b_1(q^{n_2}-1)}{q^3-1}$

$\frac{q^2((q^3)^{1000}-1)}{q^3-1}=49\cdot\frac{(q^{3000}-1)}{q^3-1}$

42 60 2520

$40x^3-49x^2+9=0 \,|\, x-1$
$40x^3-40x^2$ $40x^2-9x-9$
$-9x^2+9$
$-9x^2+9x$
$-9x+9$

$a_n=a_1+(n-1)d$ $3+3n-3=3000$

$q^2(q-1)=(q^3-1)49$

3 8 49 49 441 196 2401

$q^3-q^2-49q^3+49=0$ $-48q^3+q^2-49=0$ $q=1$

$\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

$49q^3-48q^2$ | $q-1$, $48q^2+49q+49$
$49q^2-49$
$49q^2-49q$
$49q-49$

$48q^2+49q+49=0$

$q=\frac{-49\pm\sqrt{2407}}{}$

36 6 216 24

$\left(\frac{x}{\sqrt2}+3\sqrt2\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$

48·49

36 $x=-6$

$\frac{\sqrt{x^3-4x+80}}{\sqrt2}=\frac{x^2+10x+24}{x+6}=x+4$

$x^3-4x+80\geq0$

$x(x^2-4)\geq-80$

$x^3-4x+80=2(x^2+8x+16)$

$x(x-2)(x+2)\geq-80$

$x^3-2x^2-16x-32-4x+80=0$

$4\cdot4\cdot5$

$x^3-2x^2-20x+48=0$

4048 8 64

1	-2	-20	48
1	0	-20	

$(x-20)+48$

$x(x(x-2)-20)+48$

$x=4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ \begin{cases} (x-1)(2x^3+5x^2-4) \geq 0 \\ x < 2 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ \begin{cases} (x-1)(x+2)(2x^2+x-2) \geq 0 \\ x < 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ \begin{cases} x < 2 \\ (x-1)(x+2)\left(x - \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25} \\ 4 < \sqrt{17} < 5 \end{array}}$$

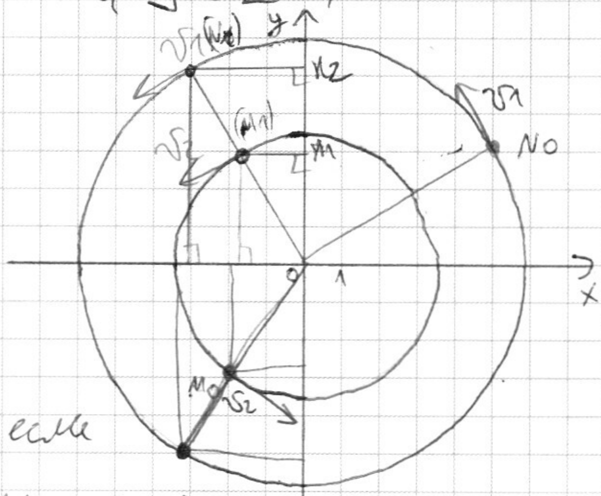
+ − + − +

-2 $\quad \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ $\quad \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ $\quad 1$ $\quad x$

$$x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty)$

№5



Дано: $v_1 = v$, $v_2 = 2v$, $M_0(-2; -2\sqrt{7})$, $N_0(5; 5\sqrt{7})$.

Найти: коорд. т. жука, когда расст. между насек. миним.

Решение:

1) Расстояние будут минимал., если жук и водомерка будут на 1 пр. с цен. окружн.

2) Найдем рад. окружн через т. Пифаг.: $r = \sqrt{4+4\cdot 7} = 4\sqrt{2}$

$R = \sqrt{25+25\cdot 7} = 10\sqrt{2}$, ~~т.к.~~ $C_1 = 2\pi r = 8\sqrt{2}\pi$, $C_2 = 2\pi R = 20\sqrt{2}\pi$,

тогда $t_1 = \frac{C_1}{v_2} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{v}$, $t_2 = \frac{C_2}{v_1} = \frac{20\sqrt{2}\pi}{v}$, где t_1 и t_2 - время, чтобы пройти 1 круг, т.к. $\frac{t_2}{t_1} = 5$, то, когда водомерка пройдет 5 кругов, жук пройдет один, и они начнут новые круги из тех же точек M_0 и N_0.

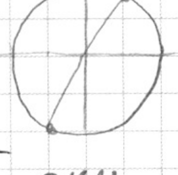
Значит, найдя нужные нам точки за первый круг жука, ~~то~~ они совпадут с остальными (за 2, 3, ... круг жука).

~~Пусть в какой-то момент они пересекутся~~ между ними будет ~~минимальное расстояние, причем, по Т. о под. $\Delta \Rightarrow \Delta OM_1K_1 \sim \Delta ON_1K_2$ где M_1 и N_1 - т. в которых находятся жук и водомерка, K_1 и K_2 - перпен. на Oy, тогда: (по опр. под)~~ $\begin{cases} x_1k = x_2 \\ y_1k = y_2 \end{cases}$, ~~где $k = \frac{R}{r} = 2{,}5$, где $(x_1; y_1)$ - коор. M_1, $(x_2; y_2)$ - коор. N_1~~

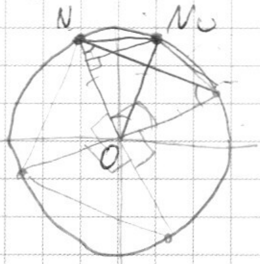
~~Но эта система не охватывает вариантов, когда x или y равны 0, в конце проверим такие точки.~~

Т.к. водомерка пройдет 5 кругов, пока жук пройдет 1, то нужных нам точек будет 4.

Т.к. радиус окруж. и ее длина прямо пропор., а время на 1 круг прямо пропор. скорости, и длине окружности, то, увеличив r и $2v$ в 2,5 разами получим, что водомерка будет бегать по окруж. жука со скоростью $5v$, и тогда, расст. будет наим., когда они встретятся на окр. Найдем нач. коор. водомерки на окр. с рад. R: (по Т о под Δ и опр. под) $\Rightarrow M_{01}(-5; -5\sqrt{7})$



Т.к. их коор. противоположны, то расстояние между ними $\pi R = 10\sqrt{2}\pi$, ~~они бегут с~~ водомерка догоняет жука со скор. $4v$. Если со скор. $5v$ она проходит круг за время $\frac{4\sqrt{2}\pi}{v}$, то пол круга она пройдет за время $\frac{2{,}5\sqrt{2}\pi}{v}$ со скор. $4v$, за это время жук пройдет $\frac{1}{8}$ круга, Теперь расстояние между ними круг, они встретятся через $5\sqrt{2}\frac{\pi}{v}$, за это время жук пройдет еще $\frac{1}{4}$ круга. Аналогично для для 3-й и 4-й встречи.

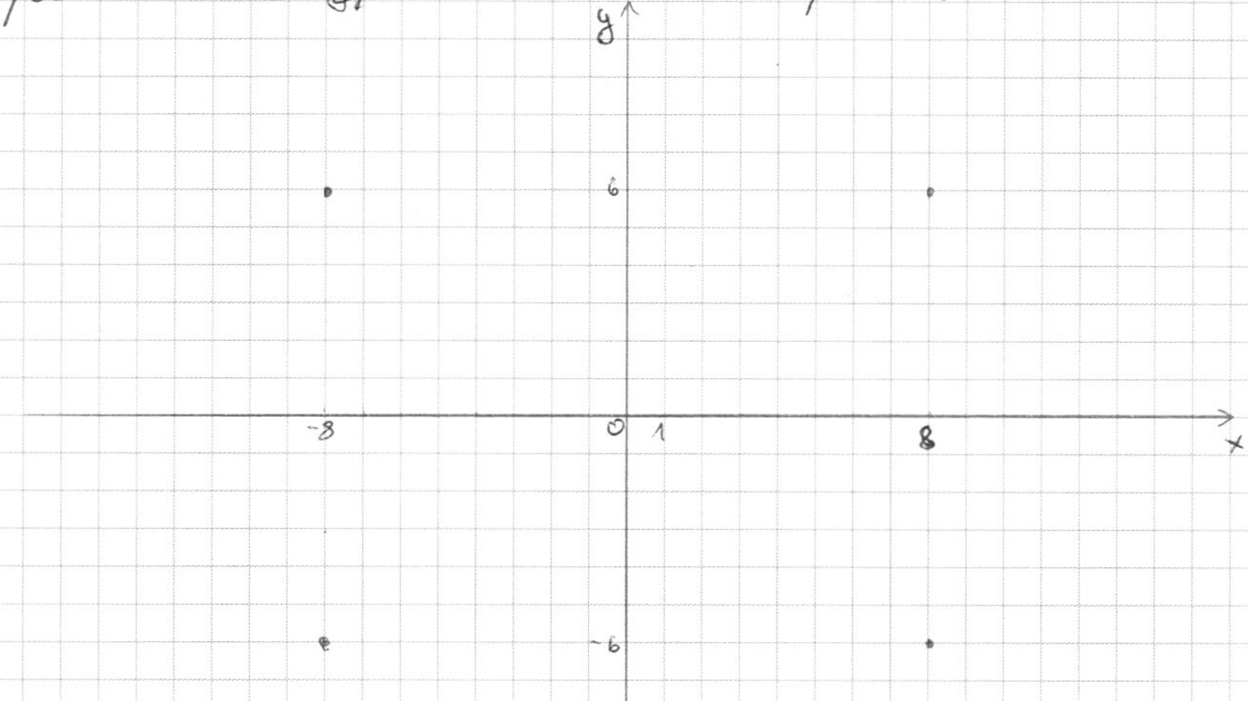


Пусть жук пройдя $\frac{1}{8}$ круга из т. N_0 пришел в N, то $\angle NON_0 = 45^0$

№7

$$\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x| = 12 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \text{ - окр.} \end{cases}$$

при $a < 0$ ~~\#~~ сис. не имеет реш.



№6

$R_1 = R_2 \Rightarrow$ окр.$(O;R_1)$ = окр.$(O;R_2)$, AB - общ. $\Big\} \Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^0$ (т.о угл. опир. на равн. хор.)

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)