

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$. 10

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Рассм. разложение 4900 на простые множители:

$$4900 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7, \text{ причем } 2 \cdot 5 > 9, 2 \cdot 7 > 9, 5 \cdot 5 > 9, 5 \cdot 7 > 9, 7 \cdot 7 > 9$$

Сл-но, всевозможные произведение цифр (отсюда чисел), равные $4900 : 4900 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$
(если не использовать 1).

Т.к. цифр должно быть 8, то необходимо добавить несколько единиц (т.к. они не влияют на произвед.)

$$4900 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$$

(1)
(2)

Рассмотрим кол-во чисел, состоящих из (1) набора единиц: оно равно $\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{7!}{3}$
неб-но повторений

Рассмотрим кол-во чисел, сост. из (2) набора единиц: (аналогично) $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{7!}{2}$

Тогда всего таких чисел $\frac{7!}{3} + \frac{7!}{2} = 7! \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{6} \cdot 7! =$
 $= 5! \cdot 5 \cdot 7 = 120 \cdot 35 = 4200$

Ответ: 4200

N 4

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 |x+2| + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0 (*) \\ x \geq -2 \\ 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0 (**) \\ x < -2 \end{cases}$$

$$* \Rightarrow f(x) = 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4, \text{ ищем } D_f = [-2; +\infty)$$

восп. схемой Горнера, чтобы найти корни $f(x)$

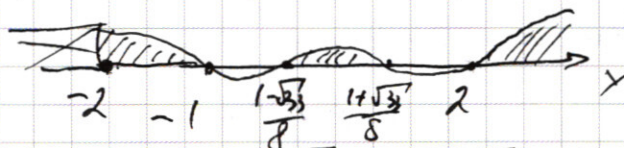
$$\begin{array}{r|rrrrrr} 4 & -5 & -9 & 4 & 4 & \\ 2 & 4 & 3 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -2 & 0 & \end{array} \Rightarrow f(x) = (x-2)(x+1)(4x^2 - x - 2)$$

найдем корни $4x^2 - x - 2$ через дискриминант

$$D = 1 + 2 \cdot 4 \cdot 4 = 33 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$\text{сл-но, } f(x) = 4(x-2)(x+1)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)$$

решим нр. в.о, $f(x) \geq 0$ методом интервалов:



$$\text{сл-но, система } (*) \Leftrightarrow x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$$

$$** \Rightarrow g(x) = 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4, \text{ ищем } D_g = (-\infty; -2]$$

$$\text{но } g(x) \nearrow; g(-2) = 64 \Rightarrow g(x) \geq 0$$

объединяя, получаем ответ

$$\text{Ответ: } (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^2 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40 \Leftrightarrow \frac{x+10}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^2 - 64x + 200} = \frac{(x+10)(x-4)}{(x-4)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ x = 10 \text{ корни} \end{cases} \sqrt{x^2 - 64x + 200} = 2\sqrt{2}(x-4) \quad *$$

возведем (*) в квадрат. (т.е. рассмотрим следствие)

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128 \Leftrightarrow$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x^2 - 2x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{найд. на} \\ \text{интервале} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x^2 - 2x - 12 = 0 \end{cases} **$$

$$** \frac{D}{4} = 1 + 12 = 13 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{13}$$

подставим 3 корня в иск. ф-е (сделаем подстановку)

1) $x = 6$: $(-184 - 38) \sqrt{216 - 384 + 200} = 2\sqrt{2} \cdot 2$ - не корень.

2) $x = 1 - \sqrt{13}$ - не корень, т.к. $2\sqrt{2}(x-4) < 0$, а $x = 1 - \sqrt{13}$

3) $x = 1 + \sqrt{13}$ - не корень, т.к. $x - 4 \geq 0$, т.к. $x = 4 \geq 0$

а $x^3 - 64x + 200 > 0$ (т.к.

т.к. $\sqrt{\dots}$ не отрицат., т.к. $x^3 - 64x + 200 =$

а $(x^3 - 64x + 200) > 0$, т.к. $(1 + \sqrt{13})(1 + \sqrt{13}) - 64$

и/или на след. странице

№3 (проверка)

3) $x = 1 + \sqrt{13}$ — ~~не~~ корень, т.к. $\sqrt{\dots}$ ~~не~~ ^{сущ-ет.}

$$\begin{aligned} \text{т.к. } x^3 - 64x + 200 &= (1 + 2\sqrt{13})(\sqrt{13} - 63) + 200 = \\ &= 52 - 14 \cdot 63 - 48\sqrt{13} + 112\sqrt{13} + 200 = -(112\sqrt{13} - 630) < 0. \end{aligned}$$

Ответ: $\{-10; 6\}$.

$$\begin{aligned} x^3 - 64x + 200 &= (1 + \sqrt{13})(\sqrt{13} - 50) + 200 = \\ &= 26 - 50 + 200 - 48\sqrt{13} = 276 - 48\sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\text{т.к. } 276 > 48\sqrt{13} \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{13}}_{< 4} < \underbrace{\frac{23}{4}}_{> 4} \quad - \text{верно.}$$

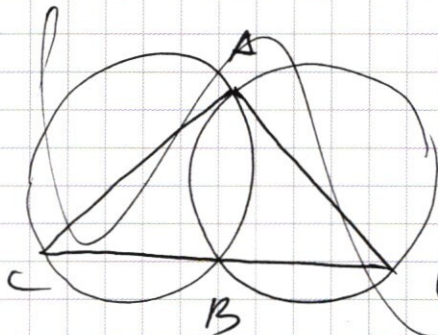
сл-но, $\sqrt{\dots}$ — сущ-ет, $2\sqrt{2}(x-4) > 0$.

сл-но, $x = 1 + \sqrt{13}$ — корень

Ответ: $\{1 + \sqrt{13}; -10; 6\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6.



по т. Пифагора, $CF^2 = BC^2 + BF^2 =$
 $= BC^2 + BD^2$

но, по свойству из т. о
двух пересечениях,

№ 7.

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (|x-15|)^2 + (|y-8|)^2 = a \end{cases}$$

рассм. 4 случая:

$$\begin{aligned} & y+x+8 \geq 0 \quad y-x+8 \geq 0 \Rightarrow y \geq 0, y=0 \\ & y+x+8 \geq 0 \quad y-x+8 \leq 0 \Rightarrow x=8 \\ & y+x+8 \leq 0 \quad y-x+8 \geq 0 \Rightarrow x=-8 \\ & y+x+8 \leq 0 \quad y-x+8 \leq 0 \Rightarrow y=-16 \end{aligned}$$

т.е., x, y - целые

x, y - ± 8 - 4 от -16,

на рисунке 5а

с центрами в $(\pm 8; \pm 15)$

1) $a \leq 0$ $\emptyset$ (0 лем)

2) $0 < a < 7$ 0 лем.

3) $a = 7$ 2 лем: $(\pm 15, \pm 8)$

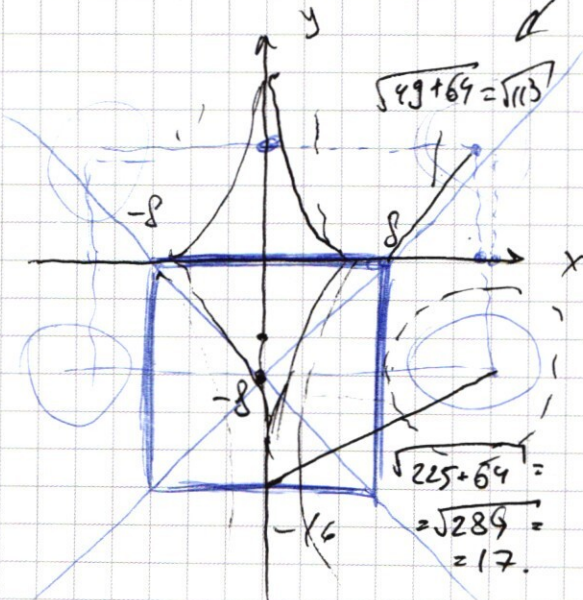
4) $7 < a < \sqrt{113}$ 4 лем

5) $a = \sqrt{113}$ 4 лем (вершины кв)

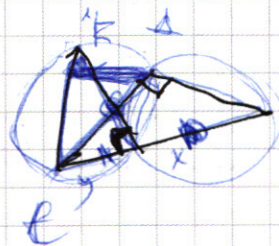
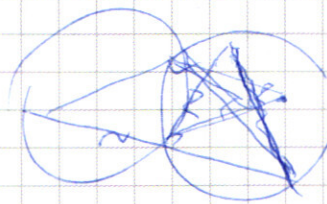
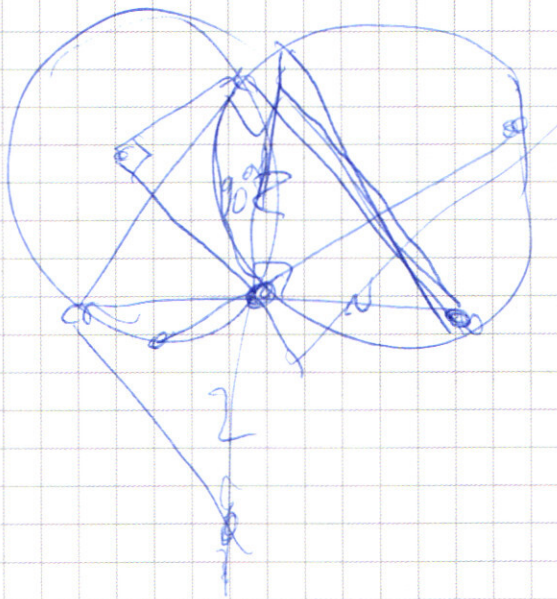
6) $\sqrt{113} < a < 17$ 4 лем

7) $a = 17$ 2 лем $(0, \pm 16)$

8) $a > 17$ 2 лем 8) $a > 17$ 0.



ответ: $\{7; 17\}$



$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = a^2 + b^2 - 2xy$$

$$\left(\frac{13\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{13\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 13^2$$

$y + x + 8 \geq 0$ (1)
 $y - x + 8 \geq 0$ (2)
 $\downarrow$
 $y \geq 0$

$$a) \geq 0 \quad 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$1q = \frac{b_2}{b_1}$ - т.е. q - частное ~~всех~~ ~~последующих~~ ~~членов~~ ~~последовательности~~. $n=3000$

тогда, $S = b_1 + \dots + b_{3000} = b_1 \frac{1-q^{3000}}{1-q}$

$$5S = b_1 + b_2 + 4b_3 + \dots + 4b_{3000} = (b_1 + \dots + b_{3000}) + 39q(b_3 + \dots + b_{3000}) =$$

$$= b_1 \frac{1-q^{3000}}{1-q} + 39b_3 \frac{1-q^{2998}}{1-q^2} = b_1 \frac{1-q^{3000}}{1-q} \left(1 + 39q^2 \cdot \frac{1}{q^2+q+1} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{39q^2}{q^2+q+1} = 5 \Leftrightarrow 39q^2 = 4q^2 + 4q + 4 \Leftrightarrow 35q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4 + 35 \cdot 4 = 36 \cdot 4 = 4^2 \cdot 3^2 = 12^2$$

сл-но, $q = \frac{-2 \pm 12}{35} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -\frac{10}{35} \text{ } \cancel{\text{т.к. } q > 0} \\ q = \frac{2}{5} \end{cases}$

т.к. по условию, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $b_3 > 0, \dots$ т.к. $q = \frac{b_2}{b_1} > 0$, то $q > 0$.

Найдем $b_1 + 3b_2 + b_3 + 3b_4 + \dots + 3b_{3000} = (b_1 + \dots + b_{3000}) + 2(b_2 + \dots + b_{3000}) =$

$$= b_1 \frac{1-q^{3000}}{1-q} + 2b_2 \frac{1-q^{2999}}{1-q^2} = b_1 \frac{1-q^{3000}}{1-q} \left(1 + 2q \cdot \frac{1}{1+q} \right) =$$

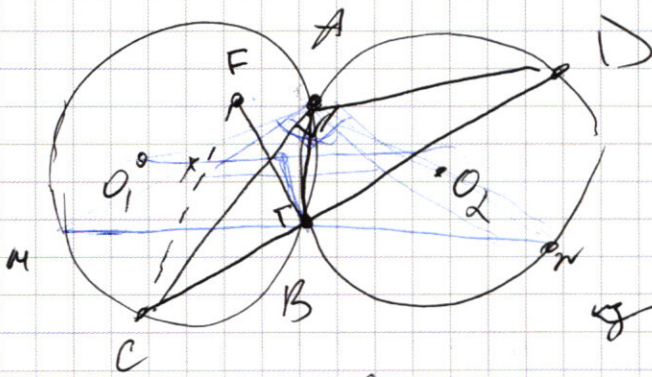
подставим $q = \frac{2}{5}$

$$= S \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\frac{7}{5}} \right) = S \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7} \right) = S \left(1 + \frac{4}{7} \right) = \frac{11S}{7}$$

То-гда сумма увеличилась в $\frac{\frac{11S}{7}}{S} = \frac{11}{7}$ раза

Ответ: увеличится в $\frac{11}{7}$ раза

№6.



O_1, O_2 - центры ок-тей.

~~Т.е. O_1, O_2~~

люб. радиус AB н. $\perp AB$.

Тона Γ лежит в т. M и N .

из симметрии

по т. о двух вершин, $\triangle AMN = \triangle ACD \Rightarrow \angle MAN = 50^\circ$.

по т. о двух вершин, $\triangle O_1QA \sim \triangle AED \Rightarrow \angle O_1AO_2 = 50^\circ$

из симм. картички (радиусы ок-тей / хорды),

M, O_1, A и A, O_2, N лежат на одной прямой

(т.е. $O_1 \in MA$; $O_2 \in NA$)

т.е. $\frac{AO_2}{AN} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \rightarrow$ к. хорды - $\frac{1}{2}$.

радиус, т.е. R .

$x=4$

144 140

$$\frac{x-4}{252}$$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 3 \quad 48 \\ 8 \quad 64 \\ \hline 512 \end{array}$$

1 0 -64 200

$$16 + 16 192$$

$$12 + 12 80$$

$$10 + 10 36$$

$$9 + 9 27$$

$$8 + 8 0$$

$$4 + 4 -48 = 8$$

$$5 + 5 -35 = 5$$

$$6 + 6 -28$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 164 \\ \hline 25 \\ 164 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 164 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\frac{64}{25} - 2 = \frac{39}{25}$$

$x=27$

34

$$8 - 1 56 184$$

$$8 - 17 90$$

$$8 (8a-1)a + 56a + 184$$

$$8x^3 - 64x + 200 = x^2 - 8x + 16$$

$$8x^3 - x^2 - 56x + 184 = 0$$

$$8a^3 - a^2 + 56a + 184$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on grid paper, featuring a central geometric diagram of a sphere with internal lines and points labeled A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, and various mathematical expressions and calculations.

Top left: $\frac{x+10}{2\sqrt{2}}$

Top right: $(x-4)(x+10)$

Center: A sphere with internal lines and points labeled A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, and various mathematical expressions and calculations.

Bottom left: $4x^2 - x - 2 = 0$

Bottom right: $(14 + \sqrt{13})(14 - \sqrt{13})$

