

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИД

Бланк задания должен быть вложен в р  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия  $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$ , все члены которой положительны, а их сумма равна  $S$ . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е.  $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$ ), увеличить в 50 раз, сумма  $S$  увеличится в 10 раз. А как изменится  $S$ , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е.  $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$ ), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение  $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$ .
4. [6 баллов] Решите неравенство  $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$ .
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке  $(0; 0)$ . Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках  $M_0(-2; -2\sqrt{7})$  и  $N_0(5; 5\sqrt{7})$  соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по одну сторону от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .
- б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 6$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

$$400 = 4 \cdot 100 = 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

Значит, выписанное число содержит либо цифры  
"4, 2, 2, 5, 5" либо "4, 4, 5, 5"

П.к.  $5 \cdot 5 = 25$  - двузнач. число (4-5, 4-2, 2-5 - аналогично)

1° "4, 2, 2, 5, 5"

Давайте сначала расставим эти цифры, а затем  
единицы между ними

Способ расставить данные цифры:  $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 30$

↑ 4 ↑ 2 ↑ 2 ↑ 5 ↑ 5 ↑  
Для любой расстановки цифр одинаковое  
число расстановок единиц  
между ними  
 $8 - 5 = 3 \Rightarrow$  еще 3 единицы

1) на каждом месте может стоять 3 единицы - это  
6 вариантов

2) на одном месте 2 единицы, на любом другом - одна -  
это еще  $5 \cdot 6 = 30$  вариантов

3) на трех местах по единице - это еще 20 вар-ов

(единица есть на первом месте - 10 вар-ов  
единица нет на первом, но есть на втором - еще 6 вар-ов  
(4 совпадают)  
и т.д.)

П.е. всего  $(6 + 30 + 20) \cdot 30 = 56 \cdot 30 = 1680$  чисел

$2^0, 2^1, 4, 5, 5$  - вар-б расставити эти цифры  $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 12$

$$8 - 4 = 4 \Rightarrow \text{еще 4 единицы}$$



- 1) на одном месте 4 единицы - 5 вариантов
- 2) на одном месте 3, и еще на любом оди -  $5 \cdot 4 = 20$  (вар-б)
- 3) на одном месте 2  $\Rightarrow$  еще  $10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 40$  вариантов
- 4) на 4-х местах по одной  $\Leftrightarrow$  то же что на одном 0, значит, 5 вар-б

т.е. всего  $12 \cdot (5 + 20 + 40 + 5) = 12 \cdot 70 = 840$  (вар-б)

Итого:  $840 + 1680 = 2520$  чисел

Ответ: 2520 чисел

Задача №2

$$S = \frac{b_1 \cdot (q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

- формула для суммы <sup>чисел</sup> геом. прогрессии, где  $q$  - отношение прогрессии

заметьте, что увеличенные в 50 раз члены геом. прогрессии с номерами 1-3 также образуют геом. прогрессию, отношение которой  $q^3$

$$50b_3 = 50q^2b_1$$

Сумма их чисел:

$$S' = \frac{50q^2b_1(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1}$$
~~$$\frac{10b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} = \frac{50q^2b_1(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$~~

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.  $S = \frac{b_1(q^{1000} - 1)}{q - 1}$ , где  $q$  — знаменатель прогрессии

Заметим, что все члены прогрессии, номера которых кратны 3 также составят пом. прогрессию со знаменателем  $q^3$

тогда  $S_1 = \frac{b_1(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1} = \frac{q^2 b_1(q^{1000} - 1)}{q^3 - 1}$   
(до увеличения)

$S_2 = \frac{50 b_1(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1} = \frac{50 q^2 b_1(q^{1000} - 1)}{q^3 - 1}$   
(после увеличения)

$$10S = S - S_1 + S_2$$

$$9S = S_2 - S_1$$

$$\frac{9 b_1(q^{1000} - 1)}{q - 1} = \frac{49 q^2 b_1(q^{1000} - 1)}{q^3 - 1}$$

$$9(q-1)(q^2+q+1) = 49q^2(q-1)$$

$$\frac{9q^2}{q^2+q+1} = \frac{9}{49} \Rightarrow \frac{q^2}{q+1} = \frac{9}{40} \Rightarrow 40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{q^2}{q+1} = \frac{9}{40} \Rightarrow 40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{1521}}{80} = \frac{9 \pm 39}{80} = \frac{48}{80}, \frac{30}{80}$$

все члены прогрессии положительны  
 $q > 0$   
 $q = 48/80 \downarrow$

Также члены с четными номерами образуют другую пом. прогрессию со знаменателем  $q^2$

$S_3 = \frac{b_1(q^2)^{1000} - 1}{q^2 - 1} = \frac{b_1 q(q^{1000} - 1)}{q^2 - 1}$   
(сумма до увеличения)

$S_4 = \frac{2 b_1 q(q^{1000} - 1)}{q^2 - 1}$   
(после увеличения)

$$S - S_3 + S_4 = \frac{b \cdot (q^{3000} - 1)}{q - 1} - \frac{b \cdot q (q^{3000} - 1) - 2bq(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} =$$

$$= \frac{b \cdot (q^{3000} - 1)(q + 1) + b \cdot q (q^{3000} - 1)}{(q - 1)(q + 1)} = \frac{b \cdot (q^{3000} - 1)(q + 1 + q)}{(q - 1)(q + 1)} = S'$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{b \cdot (q^{3000} - 1)(2q + 1) \cdot (q - 1)}{(q - 1)(q + 1) \cdot b \cdot (q^{3000} - 1)} = \frac{2q + 1}{q + 1} = \frac{\frac{2 \cdot 48}{80} + 1}{\frac{48}{80} + 1} =$$

$$= \frac{2 \cdot 48 + 80}{48 + 80} = 1 + \frac{48}{48 + 80} = \frac{48 + 80 + 48}{48 + 80} = \frac{96 + 80}{48 + 80} = \frac{11 + 10}{6 + 10} = \frac{21}{16}$$

Ответ: сумма станет больше в  $21/16$  раз

③.  $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$

$$\left(\frac{x+6}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)(x+6) \Rightarrow x = -6 \quad \text{①}$$

$$\sqrt{\frac{x^3}{2} - 2x + 40} = x + 4 \quad !$$

при  $x = -6$ :  
 $x^3 - 4x + 80 =$   
 $= -216 + 24 + 80 < 0 //$

$$\frac{x^3}{2} - 2x + 40 = x^2 + 16x/2 + 16 = x^2 + 8x + 16$$

$$\frac{1}{2}x^3 - 8x + 40 - x^2 - 8x - 16 = 0$$

$$\frac{1}{2}x^3 - x^2 - 10x + 24 = 0$$

$x = 4$  - корень ②

$$(x-4) \cdot (0,5x^2 + x - 6) = 0$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 10x + 24 : \frac{1}{2}x^2 + x - 6 \\ \underline{\frac{1}{2}x^3 - 2x^2} \\ x^2 - 10x \\ \underline{x^2 - 4x} \\ -6x + 24 \\ \underline{-6x + 24} \\ 0 \end{array}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2 \cdot 0,5} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{1} =$$

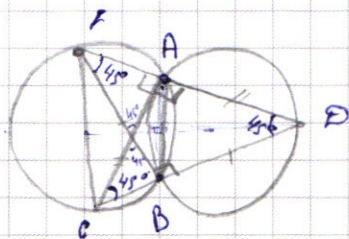
$$= -1 \pm \sqrt{13}$$

при  $x = -1 - \sqrt{13}$ :  $x^3 - 4x + 80 < 0$  !/?

$$-1 - \sqrt{13} < -4$$

Ответ:  $\{4\}; \{-1 + \sqrt{13}\}$

5.



а) 1) Углы в окружности (вписанные), опирающиеся на одну дугу равны  $\Rightarrow \angle ADB = \angle ACB$   
(т.к. окр-ти равны)

т.к.  $\angle CAD = 90^\circ$ ,  $\angle AFD = \angle AFC = 45^\circ$  и  $AC = AD$

2)  $DF = BD \Rightarrow \triangle FBD$  - равнобедренный с углом  $B = 90^\circ$ , тогда  $\angle FDB = \angle DFB = 45^\circ$

3) т.к.  $A$  и  $F$  лежат на одной стороне от  $CD$ ,  $A \in FD$  (т.к.  $\angle FDB = \angle ADB$ )

4)  $\angle FAC = 90^\circ$ ,  $\angle FBC = 90^\circ \Rightarrow FABC$  - вписанный

5) т.к.  $A, B, C$  принадлежат первой окр-ти, и  $F$  также ей принадлежит

6)  $\angle FBC = 90^\circ \Rightarrow$  он опирается на диаметр  $\Rightarrow FC$  - диаметр  
 $FC = 2 \cdot 5 = 10$

7)  $S_{CAF} = ?$ ,  $BC = 6$

$FB = \sqrt{BC^2 + FC^2}$  (по т. Пифагора для  $\triangle FBC$ )  $= \sqrt{36} = 2\sqrt{34}$

$\triangle FBD$  - р/б  $\Rightarrow FB = BD = 2\sqrt{34}$

$FABC$  - вписанный четырехугольник  $\Rightarrow FA = BC \Rightarrow FB = AC$

$S_{\triangle ABF} = S_{\triangle BCF} = \frac{BC \cdot FC}{2} = \frac{10 \cdot 6}{2} = \frac{60}{2} = 30$

Ответ: а) 10 ; б) 30

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

④.  $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0$

$$2x^4 + (x^2 - 4x + 4) - 3x^2|x-2| \geq 0$$

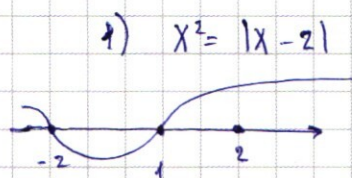
$$2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2|x-2| \geq 0$$

$$x^4 - 2x^2|x-2| + |x-2|^2 - x^2|x-2| + x^4 \geq 0$$

$$(x^2 - |x-2|)^2 + x^2(-|x-2| + x^2) \geq 0$$

$$(x^2 - |x-2|)(x^2 + x^2 - |x-2|) \geq 0$$

$$(x^2 - |x-2|)(2x^2 - |x-2|) \geq 0$$



|                                                                                                          |                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x^2 = 2 - x$ $x^2 + x - 2 = 0$ $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$ $= \frac{-1 \pm 3}{2}$ $= 1, -2$ | $x^2 = x - 2$ $x^2 - x + 2 = 0$ $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$ $\downarrow$ $x^2 \geq x - 2$ |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|

1) ( $D < 0$ )

2)  $2x^2 = |x-2|$

|                                                                                                           |                                                                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $2x^2 = 2 - x$ $2x^2 + x - 2 = 0$ $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{4}$ $= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$ | $2x^2 = x - 2$ $2x^2 - x + 2 = 0$ $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-16}}{2}$ $\downarrow$ $2x^2 \geq x - 2$ |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|

1) ( $D < 0$ )

$$\frac{-1 + \sqrt{17}}{4} < 1$$

$$-1 + \sqrt{17} < 4$$

$$\sqrt{17} < 5$$

$$17 < 25 \quad \text{⑤}$$

$$\frac{-1 - \sqrt{17}}{4} > -2$$

$$-1 - \sqrt{17} > -8$$

$$-\sqrt{17} > -7$$

$$\text{⑥}$$

Ответ:

Значит,  $x$  произведение  $\geq 0$ :

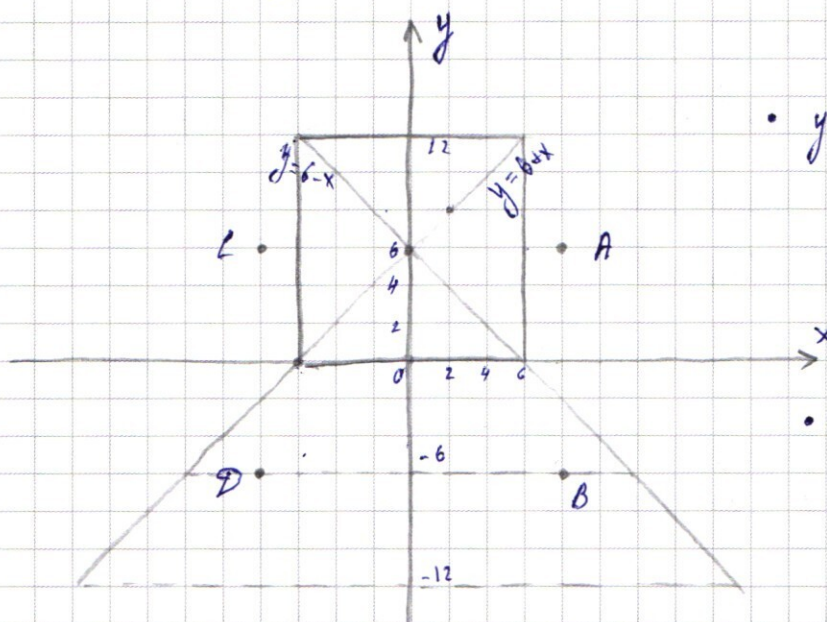
$$x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1 - \sqrt{17}}{4}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}\right] \cup$$

$$\cup [1; +\infty)$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) 
$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (x-8)^2 + (y-6)^2 = a \end{cases}$$

1)  $|y-6-x| + |y-6+x| = 12$



•  $y-6-x+y-6+x = 12$   
 $2y-12 = 12$   
 $y = 12$  (выше обеих  
прямых  $x$ )

•  $y-6-x-x+6-y = 12$   
 $-2x = 12$   
 $x = -6$   
 (выше  
прямой  $y = 6+x$   
и ниже  $y = 6-x$ )

•  $x+6-y+y-6+x = 12$   
 $2x = 12$   
 $x = 6$   
 (ниже  
прямой  $y = 6+x$   
и выше  $y = 6-x$ )

•  $x+6-y-y-x+6 = 12$   
 $-2y = 0$   
 $y = 0$

2)  $(x-8)^2 + (y-6)^2 = a$  — окр-ть с центром  $(8; 6)$  — т. А  
 $(8; -6)$  — т. В  
 $(-8; 6)$  — т. С  
 $(-8; -6)$  — т. D

н.е. нужно, чтобы окр-ть пересекала квадрат ровно в 2-х точках и радиусом  $\sqrt{a}$

окр-ть с центром в А:  $r \in (0; 2)$  - 0 т. пересечения  
т.к.  $(2; \sqrt{36+25}) = (2; \sqrt{61}) > 2$

$$r \in (2; \sqrt{36+2569}) = (2; \sqrt{2605}) - \geq 2 \text{ т. пер.}$$

$r = 2$  - одна т. и.

аналогично с центром в В

при  $r = 10$ , т. пересечения:  $(0; 0)$  и  $(0; 12)$  совпадают ①

окр-ть с центром в В:  $r \in (0; 2\sqrt{10})$  - 0 т. пер.-ие

$$r = 2\sqrt{10} - 1 \text{ т. пер. } (6; 0)$$

$$r = \sqrt{169+324} = \sqrt{493} - 1 \text{ т. пер. } (-6; 12)$$

и остальными - 0 или  $\geq 2$

аналогично в Д:  $r = 2\sqrt{10} \quad (-6; 0)$

$$r = \sqrt{493} \quad (6; 12)$$

Значит, подходит  $r = 2$ ,  $r = \sqrt{493}$

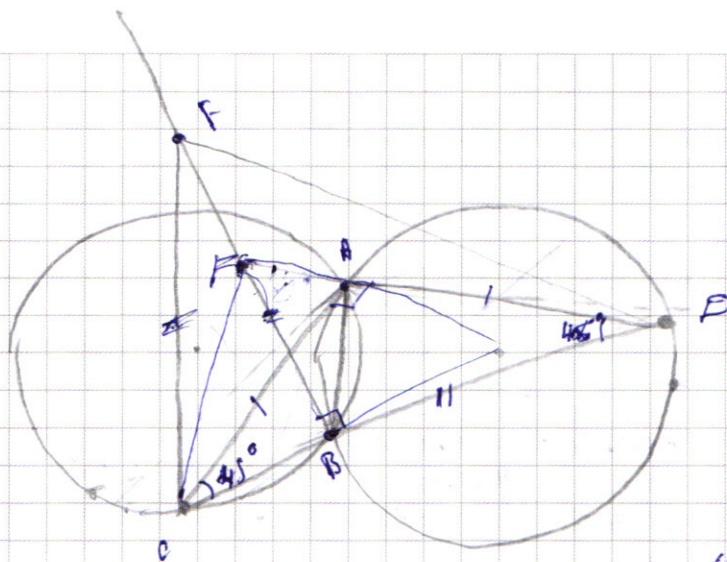
Заметим, что обе точки пересечения для окр-ей с центрами в В и Д совпасть не могут  $\Rightarrow$  у них должно быть либо по одной т. пер. ( $r = 2\sqrt{10}$  не подходит, т.к. тогда у А и Е разные точки)

либо по 0  $\Rightarrow r > \sqrt{493}$  (для А и Е тоже 0)

или  $r < 2\sqrt{10}$ ,  $r \in (2; 2\sqrt{10})$  у А и Е тоже 0

Значит,  $a = 4$  или  $a = 493$

Ответ: 4; 493



$$BF = BD$$

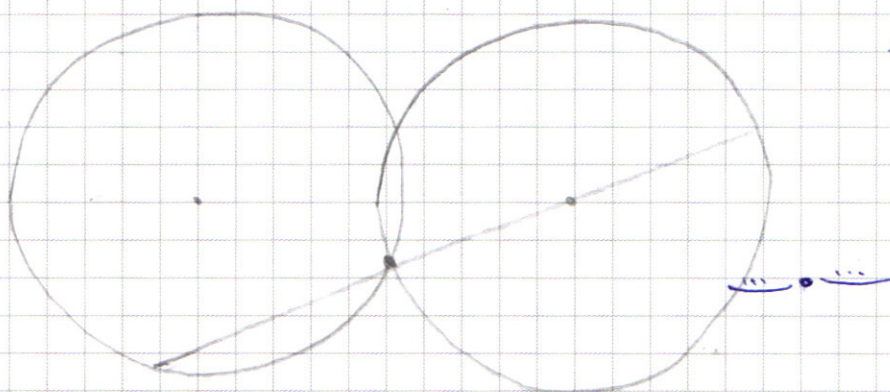
$$\textcircled{1}. \quad 4, 2, 2, 5, 5$$

$$\textcircled{2}. \quad 4, 4, 5, 5$$

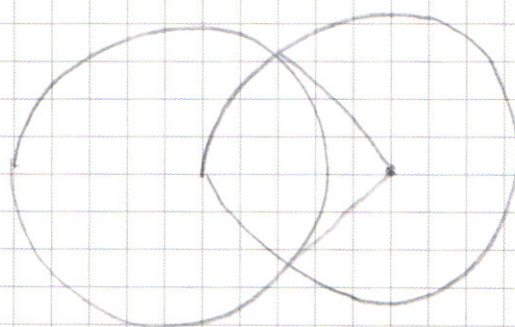
$$\overset{III}{\underset{II}{5}} \quad \overset{II}{\underset{I}{4}} \quad \overset{II}{\underset{I}{3}} \quad \overset{II}{\underset{I}{2}} \quad \overset{II}{\underset{I}{1}}$$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 30$$

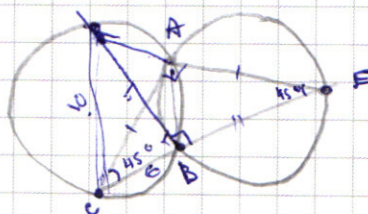
$$3 \times 1$$



$$\textcircled{10} \textcircled{9} \textcircled{8}$$

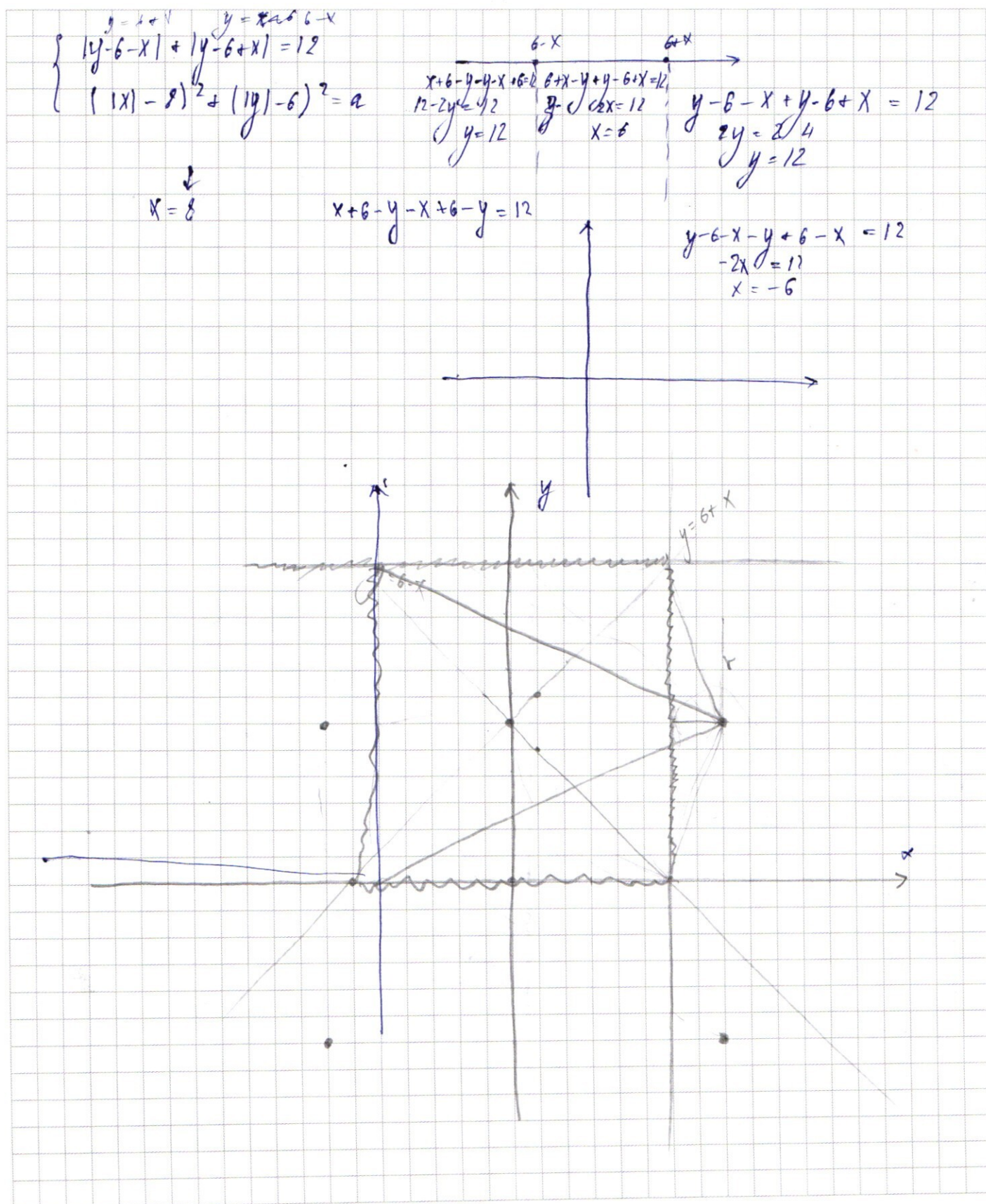


$$\begin{array}{r} 11 \\ 1680 \\ + 840 \\ \hline 2520 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} \textcircled{10} \textcircled{9} \textcircled{8} \\ \textcircled{7} \textcircled{6} \textcircled{5} \\ \textcircled{4} \textcircled{3} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①.  $400 = 40 \cdot 10 = 7 \cdot 10 \cdot 10 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

1°  $7, 2, 2, 5, 5$

2°  $7, 4, 5, 5$

②.  $b_1, b_2, b_{1000}$

$1440 + 21 = 1521$

$S = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 \cdot (q^{1000} - 1)}{q - 1}$

$2, 6, 18 \quad q = 3, n = 3$

$2 \cdot \frac{(3^3 - 1)}{3 - 1} = 26$

$b_2 = q^2 \cdot b_1$   
 $b_3 = 50q^2 \cdot b_1$

$q \pm \sqrt{81} + 160$

$b_2 = q b_1$   
 $b_3 = 2q b_1$

$26 \cdot 40 = 1040$   
 $1440 + 19 = 1459$

$50q^2 b_1 \frac{(q^{1000} - 1)}{q^3 - 1} = 10 \frac{b_1 (q^{1000} - 1)}{q - 1}$

$5q^2 \frac{(q^3 - 1)}{q^3 - 1} = \frac{1}{q - 1}$

$5q^2 (q - 1) = q^3 - 1$

$4q^3 = 5q^2 - 1$

$\frac{2q(q-1)}{(q-1)(q+1)} = \frac{2q}{q+1}$

$(q-1)(q^2 + q + 1) = 5q^2 - q^3 - 1$   
 $q^3 + q^2 + q - q^2 - q - 1 = 5q^2 - q^3 - 1$   
 $q^3 + q^2 + q - q^2 - q - 1 = 5q^2 - q^3 - 1$

$40q^2 = 9(q+1) \rightarrow \frac{q^2}{q+1} = 40q$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\left(\frac{x+6}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 96}}{2} = \frac{-10 \pm 2}{2} = -6; -4$$

$$\frac{(x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80}}{\sqrt{2}} = (x+6)(x+4) - 60$$

$$-64 - 16$$

$$\sqrt{\frac{x^3 - 4x + 80}{2}} = x + 4$$

$$\frac{x^3 - 4x + 80}{2} = x^2 + 8x + 16$$

$$\frac{x^3}{2} - 2x + 40 = x^2 + 8x + 16$$

$$\frac{1}{2}x^3 - 10x + 24 - x^2 = 0$$

$$40$$

$$(x-4)\left(\frac{1}{2}x^2 + x - 6\right) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{1} = -1 \pm \sqrt{13}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0$$

$$x^2(2x^2 + 1) - 4(x-1) - 3x^2|x-2| \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 + 4 \geq 4x + 3x^2|x-2|$$

$$1^0 x > 2 \quad 2x^4 + x^2 + 4 \geq 4x + 3x^3 - 6x^2$$

$$2x^4 + 2x^2 - 3x^3 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$32 - 24 + 28 - 8 + 4$$



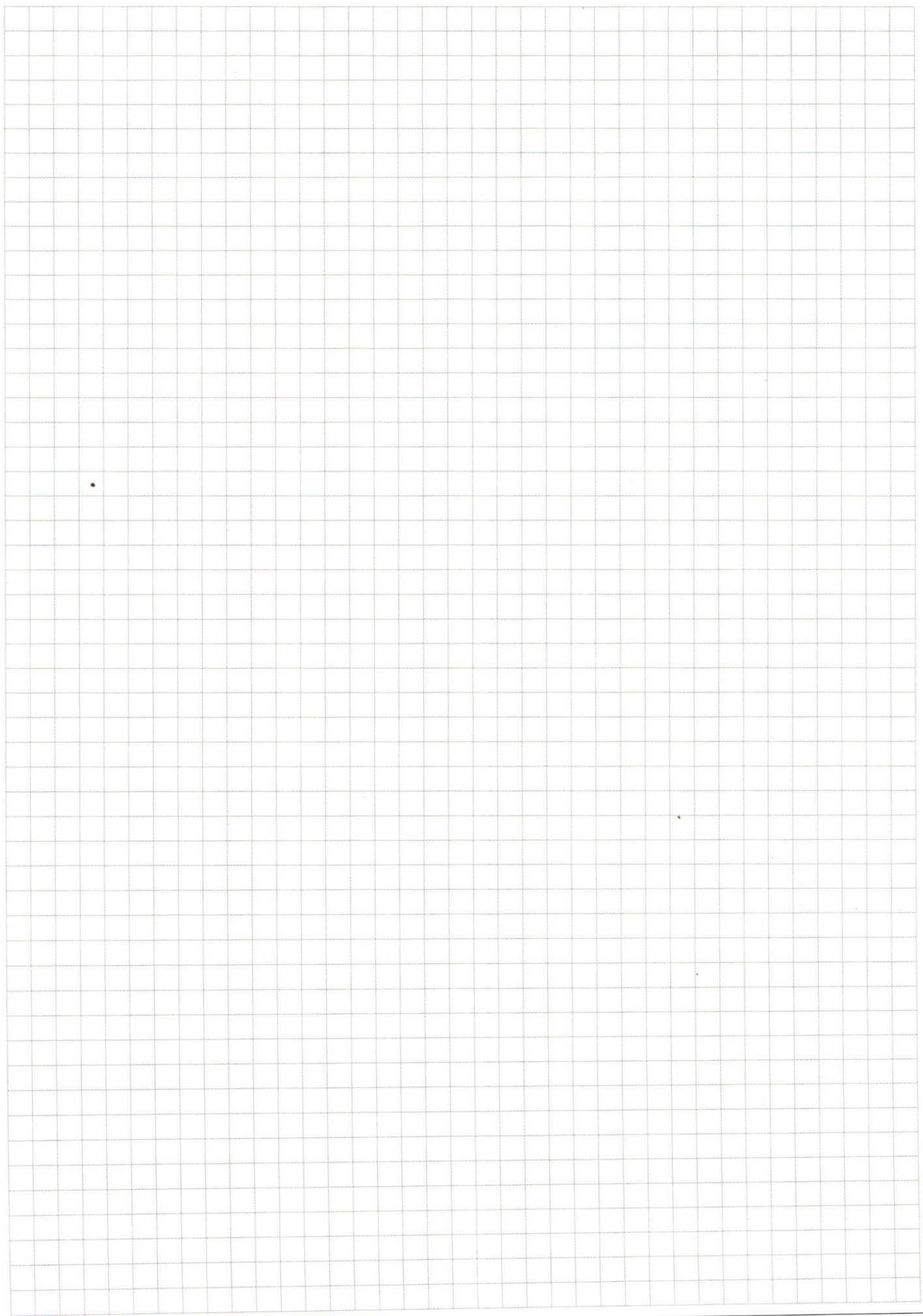
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



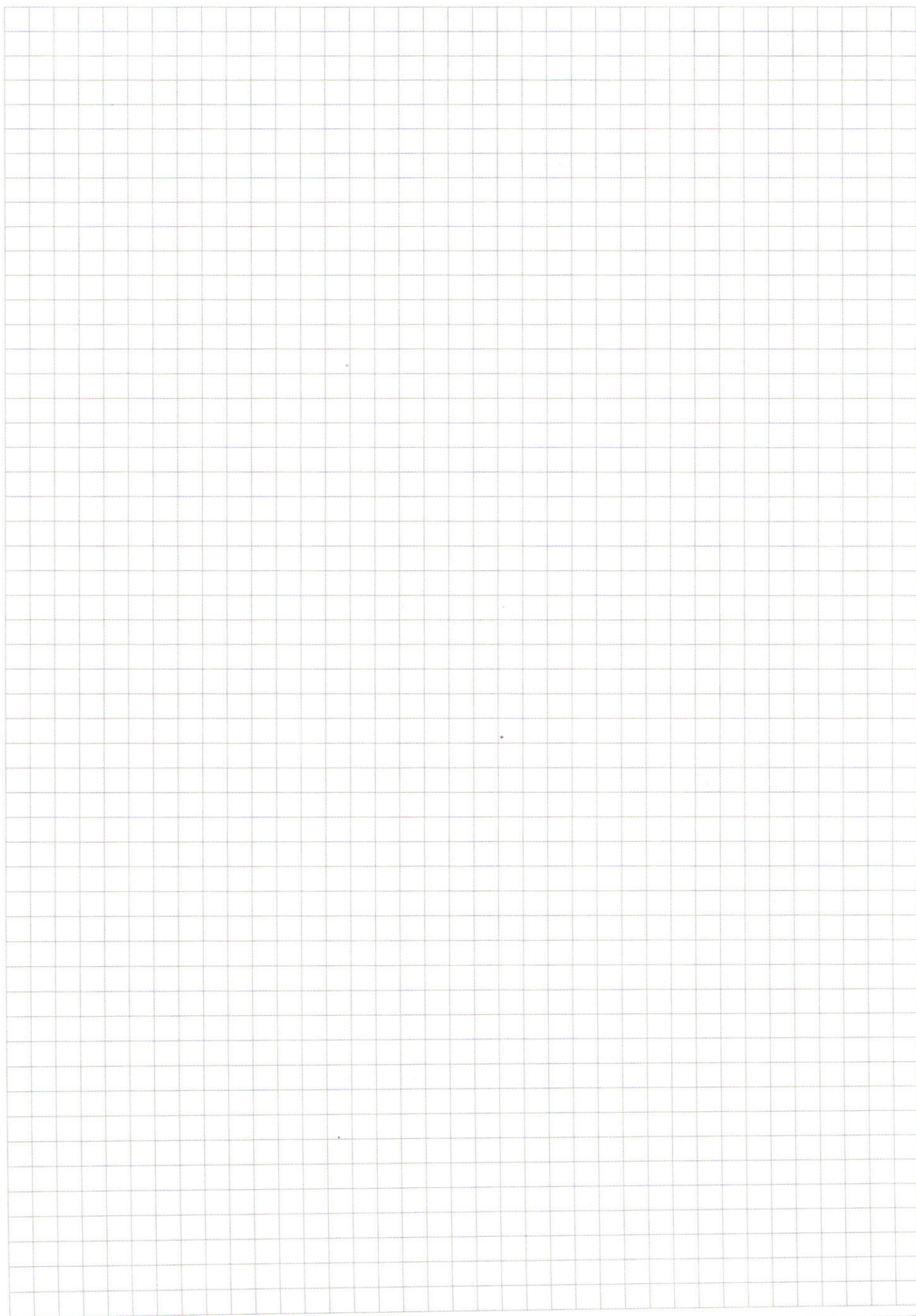
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № \_\_\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2) + 4 \geq 0$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 0}$$

$$x^2(2x^2 - 3(x-2) + 1) - 4x + 4 \geq 0$$

$$x^2(2x^2 - 3x + 4) - 4x + 4 \geq 0$$

$$x(2x^3 - 3x^2 + 4x - 4) + 4 \geq 0$$

$$x(2x^3 - 3x^2 + 4x - 4) = -4$$

$$\sqrt{2}x^2 \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$2x^3 - 3x^2 + 4x - 4$$

$$x^4 + x^2$$

$$x^4 + x^2 + 4 \geq 4x + 3x^2|x-2|$$

$$3x^2 - 6x + 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x^4 + x^2 + 4 \geq 2x(3x|x-2| + 4)$$

$$x_{1,2} = 36 -$$

$$2x^2 + 1 + 4$$

$$x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0$$

$$x^2$$

$$|x-2|^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$x(x^3 - 1)$$

$$x^4 + 1 - \frac{4}{x} - 3|x-2| + \frac{4}{x^2} \geq 0$$

$$x^4 + |x-2|^2 - 3x^2|x-2| \geq 0$$

$$x^4 - 2x^2|x-2| + |x-2|^2 - x^2|x-2| + x^4 \geq 0$$

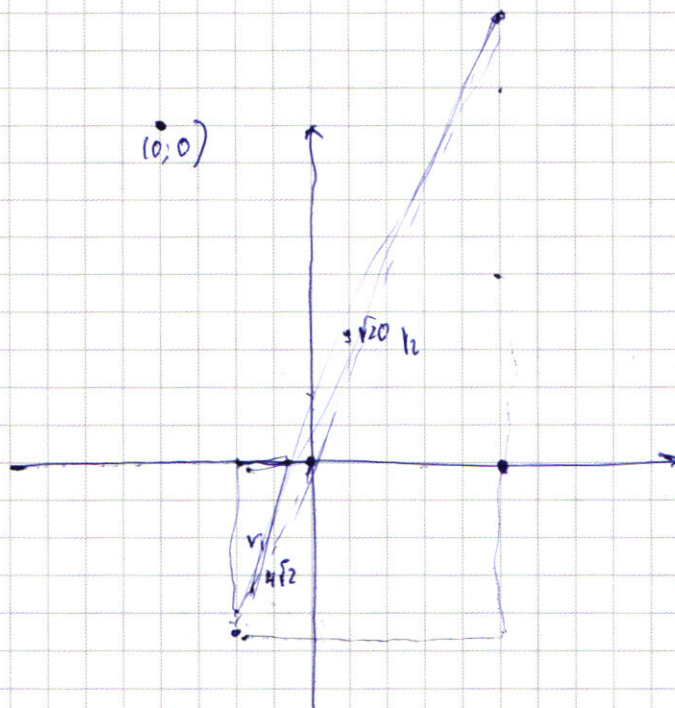
$$(x^2 - |x-2|)^2 + x^2(x^2 - |x-2|) \geq 0$$

$$(x^2 - |x-2|)(x^2 - |x-2| + x^2) \geq 0$$

$$(x^2 - |x-2|)(2x^2 - |x-2|) \geq 0$$

$$x^2 - |x-2| = 0$$

$$V_B = 2V_{inc}$$



$$r_1 = \sqrt{4 + 28} = \sqrt{32} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$$

$$r_2 = \sqrt{25 + 175} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$2\pi \cdot 3\sqrt{20}$  - оск-ть водостерни  
 $2\pi \cdot 4\sqrt{2}$  - оск-ть жужка  
 $6\pi\sqrt{20} = 6\sqrt{10} \pi \sqrt{2}$   
 $8\pi\sqrt{2} = 8\pi\sqrt{2}$

$$V_{inc} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{4}, V_B = \frac{6\pi\sqrt{10}\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{изначально: } \sqrt{49 + 203} = \sqrt{252}$$

$$r_1 = \sqrt{4 + 20} = 4\sqrt{2}$$

$$r_2 = \sqrt{25 + 175} = 20$$

$$\begin{array}{r} 175 \\ + 28 \\ \hline 203 \\ 63 \end{array}$$

$$2\pi \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \pi$$

$$\begin{array}{r} 8\sqrt{2} \pi \\ + \\ \hline 16\sqrt{2} \pi \\ 40\sqrt{2} \pi = 4\sqrt{2} \end{array}$$

тогда нужно найти:

$$\frac{S - S_1 + S_2}{S} = 1 - \frac{S_1 + S_2}{S} =$$

$$= 1 - \frac{(qb - 2qb_1)(q^{3000} - 1)}{b_1(q^{3000} - 1)} = 1 - \frac{-qb_1}{b_1(q+1)} = 1 + \frac{q}{q+1}$$

$$\begin{array}{r} 255 \\ + 255 \\ \hline 510 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 18 \\ \hline 96 \\ + 240 \\ \hline 216 \end{array}$$

10

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$$\frac{x}{q-1} = \frac{5q^2}{q^3-1}$$

$$5q^2(q-1) = (q-1)(q^2+q+1)$$

$$5q^2 = q^2+q+1$$

$$4q^2 = q+1$$~~

Однако, все члены с четными

индексов, номер которых : 3 до увеличения:  $S'' = \frac{b_3(q^3)^{1000}-1}{q^3-1}$

$$= \frac{q^2 b_3 (q^{3000}-1)}{q^3-1}$$

тогда  $10S = S - S'' + S'$

$$9S = S' - S''$$

$$\frac{9 \cdot b_1 (q^{3000}-1)}{q-1} = \frac{50q^2 b_1 (q^{3000}-1)}{q^2-1} - b_1 q^2 (q^{3000}-1)$$

$$\frac{9b_1}{q-1} = \frac{49q^2 b_1}{q^2-1}$$

$$9(q^2-1) = 49q^2(q-1) \Rightarrow 9q^2 + 9q + 9 = 49q^2$$

$$9q^2 - 9 = 49q^2 - 49q^2$$

$$9(q+1) = 40q^2$$

$$40q^2 - 49q^2 + 9 = 0$$

Однако, члены с четными номерами тоже образуют  
г.т.т. прогрессию:  $S_1$  (их сумма до увеличения) =  $\frac{q b_1 (q^2)^{1500}-1}{q^2-1}$   
с разностью  $q^2$   
 $S_2$  (последние) =  $\frac{2q b_1 (q^2)^{1500}-1}{q^2-1}$