

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(№2)

Пусть q - знаменатель прогрессии; b_1 - ее первый член.
Тогда сумма $n=3000$ членов этой прогрессии: $S = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} =$
 $= \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} b_1$

Членов с номерами, кратными 3 ровно $\frac{3000}{3} = 1000$ член.

По условию $5S = b_1 + b_2 + 4b_3 + b_4 + b_5 + 4b_6 + \dots + 4b_{3000} =$
 $= S + 3q(b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000}) = S + 3qb_1(q^2 + q^5 + q^8 + \dots + q^{2997})$,

т.к. значение k -го члена геом. прогрессии $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$.

$$5S = S + 3qb_1 q^2 (1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{2997})$$

Выражение в скобках - также геом. прогрессия (сумма) 1000 членов

с знаменателем $q_1 = q^3$. Тогда ее сумма:

$$S_1 = 1 \cdot \frac{q_1^{1000} - 1}{q_1 - 1} = \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} = \frac{q^{3000} - 1}{(q-1)(q^2 + q + 1)}$$

$$4S = 3qb_1 q^2 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{(q-1)(q^2 + q + 1)} = \left(b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} \right) \cdot \frac{3q^2}{q^2 + q + 1} = S \cdot \frac{3q^2}{q^2 + q + 1}$$

Т.к. $q \neq 1$, то $S \neq 0 \Rightarrow$ поделим обе части на S .

$$3q^2 = 4q^2 + 4q + 4 \Leftrightarrow 35q^2 + 4q - 4 = 0.$$

$$D = 4^2 + 4 \cdot 4 \cdot 35 = 4^2(35 + 1) = 4^2 \cdot 36.$$

$$q = \frac{4 \pm 4 \cdot 6}{2 \cdot 35} = \frac{4 \pm 24}{70}$$

$$\text{Имеем 2 случая: } \begin{cases} 1) q = \frac{4+24}{70} = \frac{7 \cdot 4}{7 \cdot 10} = \frac{2}{5} \\ 2) q = \frac{4-24}{70} = \frac{-2}{7} \end{cases}$$

Пусть при увеличении членов с четными номерами (в 3 раза),
сумма увеличится в N раз, т.е. станет равной $5N$

Таких членов всего $\frac{3000}{2} = 1500$ член.

Посчитаем новую сумму:

$$NS = b_1 + 3b_2 + b_3 + 3b_4 + \dots + b_{2999} + 3b_{3000} =$$

$$= S + 2(b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{3000}) = S + 2b_1(q + q^3 + q^5 + \dots + q^{2999}) =$$

$$= S + 2b_1 q (1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2998})$$

Выражение в скобках — сумма геом. прогрессии с первым членом

1 и знаменателем $q_2 = q^2$. Тогда эта сумма равна:

$$S_2 = 1 \cdot \frac{q^{2 \cdot 1500} - 1}{q^2 - 1} = \frac{q^{3000} - 1}{(q - 1)(q + 1)}.$$

$$(N-1)S = \frac{2q}{q+1} \cdot \left(b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} \right) = \frac{2q}{q+1} S.$$

$$N-1 = \frac{2q}{q+1} \Rightarrow N = \frac{3q+1}{q+1}.$$

$$\text{При } q = \frac{2}{5}: N = \frac{\frac{6}{5} + 1}{\frac{2}{5} + 1} = \frac{11}{7}$$

$$\text{При } q = \frac{-2}{7}: N = \frac{\frac{-6}{7} + 1}{\frac{-2}{7} + 1} = \frac{1}{5}$$

Но знаем, что все члены прогрессии положительны $\Rightarrow$

$q > 0$. Тогда единств. возможный вариант:

$$q = \frac{2}{5}; N = \frac{11}{7}.$$

Ответ: сумма увеличится в $\frac{11}{7}$ раз

$$\boxed{N=1}$$

$$4900 = 7^2 \cdot 100 = 7^2 \cdot 25 \cdot 4 = 7^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 1^2, \text{ где } n \in \mathbb{N}$$

Заметим, что $4900 = \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}_{8 \text{ цифр}}$, а также то, что цифры

числа — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Оно не может входить в запись числа, иначе произв. по цифр 0, что противоречит условию.

Также заметим то, что $7 \cdot 7; 7 \cdot 5; 7 \cdot 2; 5 \cdot 2; 5 \cdot 5; 2 \cdot 2$ не являются цифрами. Таким образом в запись числа входят обязательно 2 7 и 2 5 , иначе произв. не может быть равно 4900.

Остается свободны еще 4 цифры, произведение которых равно 4. Это либо 1, 1, 2, 2, либо 1, 1, 4, 4. Отсюда замечаем, что в запись числа входят 2 единицы обязательно.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

По итогу подсчета, что в записи шла вся цифра:

1, 1, 5, 5, 7, 7, 2, 2, либо 1, 1, 5, 5, 7, 7, 4, 1. Посчитаем кол-во способов расстановки этих цифр в 8-значном числе.

1) Набор 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7, 7.

~~1-ую цифру можно брать 4 способами, 2-ую - 3-мя; 3-ю - 2-мя; 4-ю - 1-мя; 5-ю - 2-мя; 6-ю - 2-мя; 7-ю и 8-ю - одним. Тогда кол-во возможных чисел с таким набором $N_1 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 16 \cdot 2 = 32$.~~

$$N_1 = \frac{8!}{(2!)^4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{16} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 360 \cdot 7 = 2520.$$

2) Набор 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7, 7.

$$N_2 = \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{8 \cdot 3} = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680.$$

Сумм. кол-во способов $N_1 + N_2 = 4200$.

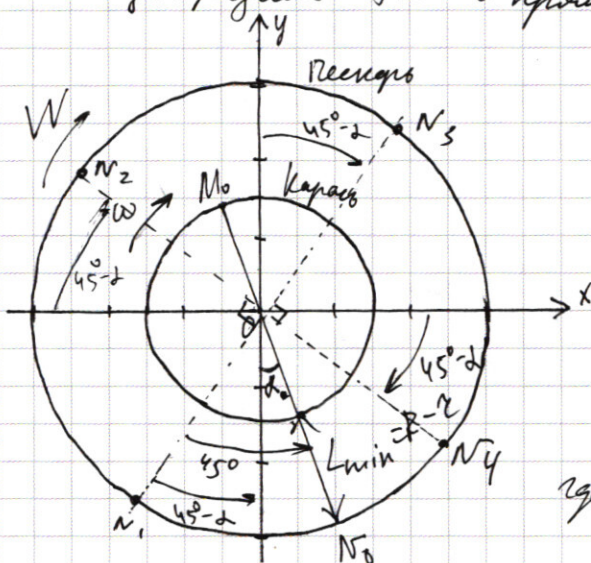
Ответ: 4200 способов

Определим радиусы окружностей траекторий пещаря и караса.

$$R = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = 3 - \text{пещаря}$$

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = 2 - \text{карася}$$

Изобразим это в прямоугол. системе координат



Заметим, что $\frac{-1}{2\sqrt{2}} = -\frac{2}{4\sqrt{2}}$. Тогда

линия, согл. M_0 и N_0 проходит через $(0; 0)$.

Для движения по окружности справедливо:

$$\begin{cases} v = \omega r \\ V = \Omega R \end{cases}$$

где v и ω — скорость и угл. скорость караса

V и Ω — скорость и угл. скорость пещаря.

$$\frac{v}{V} = 2,5 = \frac{\omega}{\Omega} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\Omega = 5\omega}$$

Т.е. карася вращается вокруг $(0; 0)$ в 5 раз быстрее пещаря.

Перейдем в систему отсчета пещаря. В ней он неподвижен,

а карася вращается с $\omega_{отн} = \Omega - \omega = 4\omega$.

Очевидно, что min расстояние между роботами достиг., когда через каждый промежуток времени ΔT , за которое карася пройдет 360° . А первый такой случай произойдет через $\Delta T/2$, т.е. угл. расст. между ними 180° в угл. мере.

$\Delta T = \frac{2\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{2\omega}$. В общем случае наименьшее время, когда расст. между роботами min $T_n = \frac{\pi + 2\pi n}{4\omega} = \frac{\pi(2n+1)}{4\omega}$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $n \geq 0$

Пещарь будет проходить в данный момент со за это время

$$\text{угл. } L_n = \omega T_n = \frac{\pi}{4}(2n+1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$

Это значит, что перед ϕ пометкой, он отклонится на 45°

от угл. положения, а затем через 2 на 90° от него

Итого имеем 4 положения пещаря, когда расст. между роботами минимально $(N_1; N_2; N_3; N_4)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ \cos \alpha = \left| \frac{-4\sqrt{2}}{6} \right| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(45^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha) \\ \cos(45^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(45^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3}(2\sqrt{2} - 1) = \frac{4 - \sqrt{2}}{6} \\ \cos(45^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3}(2\sqrt{2} + 1) = \frac{4 + \sqrt{2}}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{N1} = -6 \sin(45^\circ - \alpha) = -(4 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 4 < 0 \\ Y_{N1} = -6 \cos(45^\circ - \alpha) = -(4 + \sqrt{2}) = -\sqrt{2} - 4 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{N2} = -6 \cos(45^\circ - \alpha) = -\sqrt{2} - 4 < 0 \\ Y_{N2} = 6 \sin(45^\circ - \alpha) = 4 - \sqrt{2} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{N3} = 6 \sin(45^\circ - \alpha) = 4 - \sqrt{2} > 0 \\ Y_{N3} = 6 \cos(45^\circ - \alpha) = 4 + \sqrt{2} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{N4} = 6 \cos(45^\circ - \alpha) = 4 + \sqrt{2} > 0 \\ Y_{N4} = -6 \sin(45^\circ - \alpha) = \sqrt{2} - 4 \end{cases}$$

Итого координаты всех полученных пикарей, в которых достигается минимальная разст. между рядами:

$$(\sqrt{2} - 4; -\sqrt{2} - 4)$$

$$(-\sqrt{2} - 4; 4 - \sqrt{2})$$

$$(4 - \sqrt{2}; 4 + \sqrt{2})$$

$$(4 + \sqrt{2}; \sqrt{2} - 4)$$

Ответ: $(\sqrt{2} - 4; -\sqrt{2} - 4)$

$$(-\sqrt{2} - 4; 4 - \sqrt{2})$$

$$(4 - \sqrt{2}; 4 + \sqrt{2})$$

$$(4 + \sqrt{2}; \sqrt{2} - 4)$$

№3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} &= \frac{x + 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{x + 10}{2\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x + 10) \left(x - 4 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$x^2 + 6x - 40 = (x + 10)(x - 4).$$

$$x^3 - 64x + 200 = (x + 10)^2 \left(x - \frac{8\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

$$x^3 - 64x + 200 = (x^2 + 20x + 100) \left(x^2 - \frac{8\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}x + \frac{129 - 16\sqrt{2}}{8}\right) =$$

$$x^3 - 64x + 200 = x^4 - \left(8 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x^3 + \frac{129 - 16\sqrt{2}}{8}x^2 + 20x^3 - 20x^2\left(8 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{5}{2}x(129 - 16\sqrt{2})$$

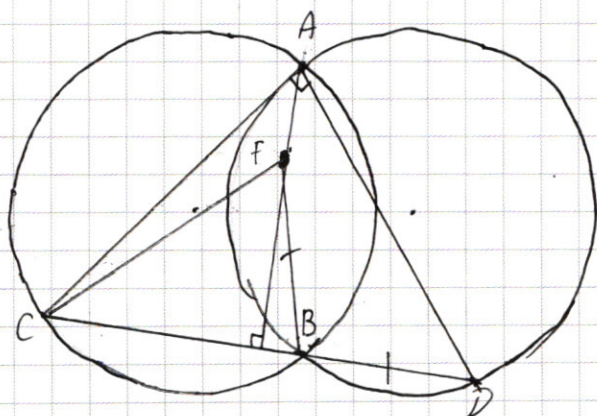
$$+ 100x^2 - 100\left(8 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x + \frac{25}{2}(129 - 16\sqrt{2}) =$$

$$= x^4 + x^3\left(12 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + x^2\left(\frac{129 - 16\sqrt{2}}{8} - 160 - \frac{20}{\sqrt{2}} + 100\right) + x\left(\frac{5}{2} \cdot 129 - 40\sqrt{2} - 800 - \frac{100}{\sqrt{2}}\right) + \frac{25}{2}(129 - 16\sqrt{2}).$$

$$x^4 + \left(11 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x^3 + x^2\left(\frac{129}{8} - 2\sqrt{2} - \frac{20}{\sqrt{2}} - 60\right) + x\left(\frac{645}{2} - 40\sqrt{2} - \frac{100}{\sqrt{2}} - 700\right)$$

$$+ \frac{25}{2}(129 - 16\sqrt{2}) - 200 = 0.$$

№6



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 | x+2 | + 4 \geq 0.$$

1) $x+2 \geq 0$.

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0.$$

$$4x^4 + 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0.$$

Заметим, что погр. корни $x=2$
 $x=-1$

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \quad | \quad x-2 \\ \underline{-4x^4 - 8x^3} \\ 3x^3 - 9x^2 \\ \underline{-3x^3 - 6x^2} \\ -3x^2 + 4x \\ \underline{-3x^2 + 6x} \\ -2x + 4 \\ \underline{-2x + 4} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4x^3 + 3x^2 - 3x - 2 \quad | \quad x+1 \\ \underline{-4x^3 - 4x^2} \\ -x^2 - 3x \\ \underline{-x^2 - x} \\ -2x - 2 \\ \underline{-2x - 2} \\ 0 \end{array}$$

$$(x-2)(x+1)(4x^2-x-2) \geq 0.$$

$$(x-2)(x+1)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0$$

Решение 1: $x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$

2) $x+2 \leq 0$.

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0.$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0.$$

$$x^4 + \frac{5}{4}x^3 + \frac{11}{4}x^2 + x + 1 \geq 0.$$

Возьмем производную от этой функции

$$4x^3 + \frac{15}{4}x^2 + \frac{11}{2}x + 1 = \frac{16x^3 + 15x^2 + 22x + 4}{4}$$

А затем еще: $\frac{48x^2 + 30x + 22}{4} = \frac{24x^2 + 15x + 11}{2}$

Заметим, что выражение в знаменателе всегда ≥ 0 , т.к.

дискриминант $< 0 \Rightarrow f(x) = \frac{24x^2 + 15x + 11}{2}$ не имеет экстремумов. $\Rightarrow$

№7

$$|y+x+8| + |y-x+8| = 16.$$

$$1) y+x+8 > 0; y-x+8 > 0.$$

$$2y + 16 = 16 \Rightarrow y = 0$$

$$2) y+x+8 > 0; y-x+8 < 0.$$

$$y+x+8 - y+x-8 = 16$$

$$x = 8$$

$$3) y+x+8 < 0; y-x+8 > 0.$$

$$-y-x-8 + y-x+8 = 16$$

$$x = -8$$

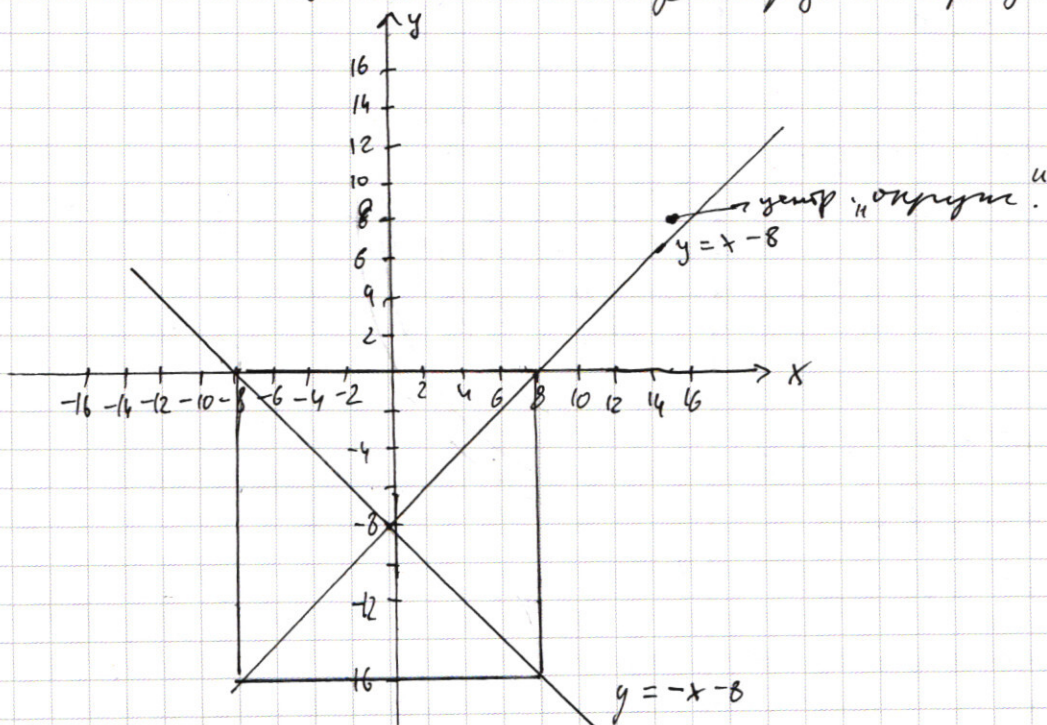
$$4) y+x+8 < 0; y-x+8 < 0.$$

$$-y-x-8 - y-x-8 = 16.$$

$$-2y = 32 \Rightarrow y = -16.$$

квадрат с центром $(0; -8)$
и стороной 16.

$$(|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \quad \text{— описать круг с радиусом}$$



$f(x) = (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = f(-x)$, т.е. на графике
расп. симметрично в 1 четверти. Т.е. если этот описан.
отражается в 1 четверть.
Тогда при $x=0$ ~~какая~~ пересек.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[illegible]

