МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1;2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2;-4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}|y+x+8|+|y-x+8|=16,\\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+10}{2\sqrt{2}}\sqrt{x^3-64x+200}=(x+10)(x-4)$$

(1) $x=-10$ $\quad x^3-64x+200\geq 0$

$x=-10$ не явл. решением $\quad -1000+640+200\geq 0$ $\cancel{0}$

(2) $x\neq -10$ можно сократить

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{x^3-64x+200}=\cancel{x+}(x-4)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3-64x+200}=2\sqrt{2}(x-4)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-64x+200\geq 0 \\ x^3-64x+200=8(x^2-8x+16) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-64x+200\geq 0 \\ x^3-8x^2+72=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

По схеме Горнера

	1	-8	0	72
6	1	-2	-12	0

~~$x^3-64x+200$~~

$x^3-8x^2+72=(x-6)(x^2-2x-12)=0$

$$x=1\pm\sqrt{13} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-64x+200\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=1\pm\sqrt{13} \\ \cancel{(x-6)(} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=1\pm\sqrt{13} \end{array}\right.$$

Ответ. $6;\ 1\pm\sqrt{13}$

Задача № 4

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$

(1) $\begin{cases} x \geq -2 \\ 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0 \end{cases}$

По схеме Горнера

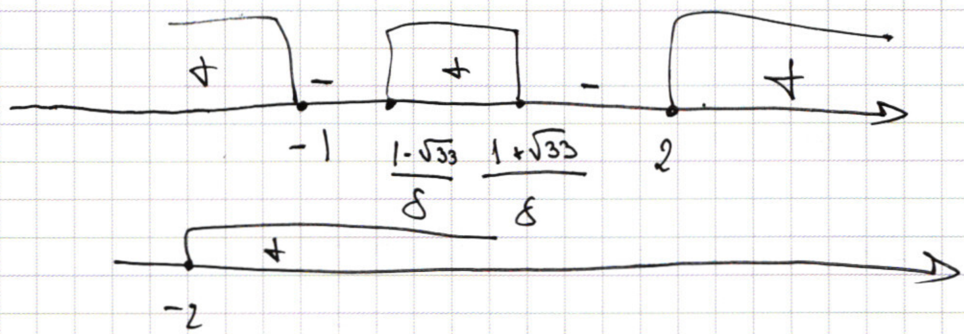
	4	-5	-9	4	4
-1	4	-9	0	4	0
2	4	-1	-2	0	

$4x^2 - x - 2 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$

$\frac{1+\sqrt{33}}{8} \approx \frac{6}{8}$ (6…. ≈ 5….)

$\frac{1-\sqrt{33}}{8} \approx \frac{-4}{8}$ (-4…. 5….)



$x \in [-2; -1] \vee \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \vee [2; +\infty)$

(2) $\begin{cases} x < -2 \\ 4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x^2(4x^2 + 5x + 5) + 6x^2 + 4x + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2$

$x \in (-\infty; -2)$

$4x^2 + 5x + 5$ всегда > 0 т.к $D < 0$

x^2 - квадрат числа, значит $x^2 \geq 0$

$x^2(4x^2 + 5x + 5) \geq 0$

$6x^2 + 4x + 4 \geq 0$ т.к $D < 0$

Сумма их неотриц. чисел неотрицат. число

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ. $(-\infty; -1] \vee \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \vee [2; +\infty)$

Задача №1

8 чисел $\to$ 4900

$4900 = 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1^n$

Так как каждый из множителей должен быть <10, то во-зможны только 2 ~~на~~ различных наборов множителей

а) 7, 7, 5, 5, 2, 2, 1, 1

б) 7, 7, 5, 5, 4, 1, 1, 1

а) Сколькими различными способами можно расставить на 8 мест

Если бы все числа были различными

То $P_8 = 8!$

Но т.к для каждой одинаковой пары 2 числа на 2 места можно расставить $P_2 = 2$, то

$n_1 = \frac{8!}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{\cancel{8} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{4} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2} = \cancel{30 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3} = \cancel{210 \cdot 24 = 5040}$

4 пары одинак чисел

$= 30 \cdot 28 \cdot 3 = 90 \cdot 28 = 2520$

$\times\frac{7}{25}{9}$ — $25\,2$

$\frac{24 \times 210}{\ \ 24 \quad 48}$ 5040

$\times\frac{42}{4}$ 1680

б) 7, 7 $P_2 = 2! = 2$

5, 5 $P_2 = 2!$

1, 1, 1 $P_3 = 3!$

$n_2 = \frac{8!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{8 \cdot 3} = 40 \cdot 42 = 1680$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$n_1 + n_2 = \cancel{5040}^{2520} + 1680 = \cancel{6720}\ 4200$

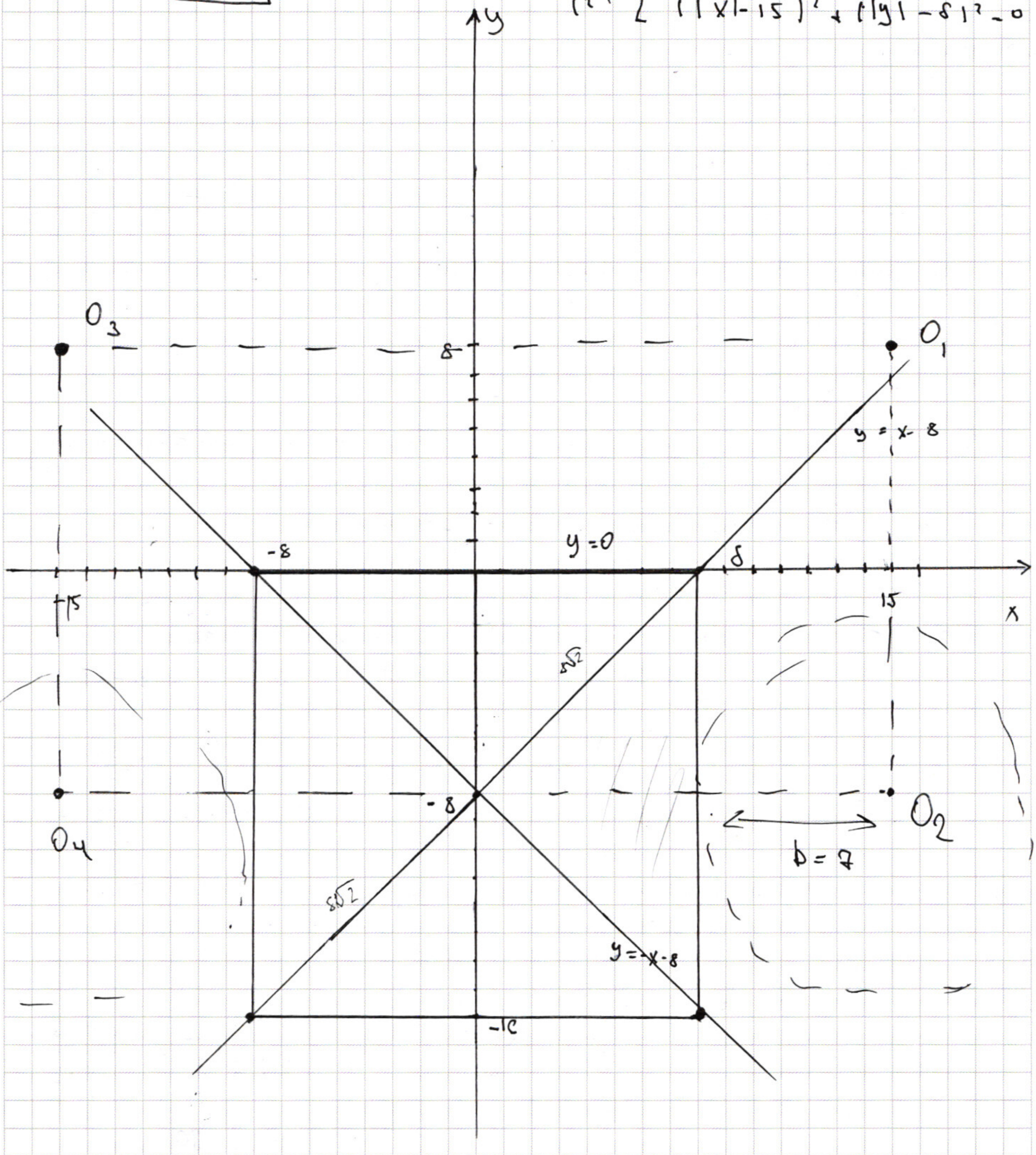
$$\begin{array}{r} 2520 \\ +\ 1680 \\ \hline 4200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{5040} \\ +\ \cancel{1680} \\ \hline \cancel{6720} \end{array}$$

Ответ. ~~6720~~. 4200 чисел.

Задача № 7

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 & (1) \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = 0 & (2) \end{cases}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) $|y+x+8| + |y-x+8| = 16$

Построим $y+x+8=0$ $\quad$ $y-x+8=0$

$y=-x-8$ $\quad$ $y=x-8$

1) Если $y>-x-8$ $\quad$ $y>x-8$, то

$y+x+8+y-x+8=16$

$2y+16=16$

$y=0$

2) Если $y<-x-8$ $\quad$ $y<x-8$

$-y-x-8-y+x-8=16$

$-2y-16=16$

$-2y=32$ $\quad$ $y=-16$

3) Если $y>-x-8$ $\quad$ $y<x-8$

$y+x+8-y+x-8=16$

$2x=6$ $\quad$ $x=8$

4) Если $y<-x-8$ $\quad$ $y>x-8$

$-y-x-8+y-x+8=16$

$x=-8$

(2): $(|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a$.

1) $x > 0$
$y > 0$
$(x-15)^2 + (y-8)^2 = a$
Окр. с центром $O_1(15; 8)$ радиусом $\sqrt{a}$

2) $x > 0$
$y < 0$

$(x-15)^2 + (y+8)^2 = a$ центр $O_2(15; -8)$

3) $x<0$
$y>0$ центр $O_3(-15; 8)$

4) $x<0$
$y<0$ центр $O_4(-15; -8)$

При каких a ровно 2 решения.
Пусть $b = \sqrt{a}$ b - радиус окр
1) При $b<0$ 0 решений
2) При $b = 7$ 2 решения O_2 и O_4 касаются квадрата
3) При $b > 7$ окружности с центрами O_2 и O_4
будут пересекат квадрать каждая в 2х точках
Следующий раз, когда эти 2 окр будут касаться данной фигуры будет возможно
при касании противоположной стороны
т.е при $b = 7 + 16 = 23$
но при таком радиусе окр O_3 и O_1 будут иметь по 2 точки.

2 другие окружности O_3 и O_1 будут касаться верхних углов квадрата при $b = \sqrt{113}$ и нижних
при ~~$b = 16\sqrt{2} + \sqrt{113}$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $b = \sqrt{24^2 + 23^2}$

Для O_2 ~~з~~ самой дальней точкой квадрата будет $(-8; 0)$

до ~~кот~~ которой $r = \sqrt{64 + 23^2}$

$r < b$ значит при радиусе b

~~O_2 и~~ квадрат будет находиться внутри O_4 O_4 и не иметь общих точек.

Значит при $b = \sqrt{24^2+23^2}$ 2 решения

при $b > \sqrt{24^2+23^2}$ 0 решений

1\. $\left[\begin{array}{l} b = 7 \\ b = \sqrt{24^2+23^2} \end{array}\right.$ Значит $\left[\begin{array}{l} a = 49 \\ a = 24^2+23^2 \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} a=49 \\ a=1105 \end{array}\right.$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 24 \\ \hline 96 \\ +\ 48\ \ \\ \hline 576 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23 \\ \times\ 23 \\ \hline 69 \\ +\ 46\ \ \\ \hline 529 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 576 \\ +\ 529 \\ \hline 1105 \end{array}$$

Ответ. 49; 1105

Задача №2

$S = S_1 + S_2$, где S_1 - сумма элементов с номерами, кратными трем, а S_2 все остальные.

$S = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$, где $n = 3000$

$S = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}$

Элементы, кратные 3м.

$b_3 = b_1 \cdot q^2 \quad b_6 = b_1 \cdot q^5 \quad \ldots$

Рассмотрим элементы, кратные 3n, как отдельную геометрическую прогрессию

где $b_1' = b_1 \cdot q^2$

а $q' = q^3$

$$S_1 = \frac{b_1 q^2 (q^{3n} - 1)}{q^3 - 1} \quad \text{где } n = 1000$$

$$S_1 = \frac{b_1 \cdot q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

~~$S_2 = S - S_1 =$~~

~~Для~~

$$S = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$S_1 = \frac{b_1 \cdot q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} \qquad S = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$\frac{S}{S_1} = \frac{\cancel{b_1} \cancel{(q^{3000} - 1)} \cdot (q^3 - 1)}{(q - 1) \cdot \cancel{b_1} \cdot q^2 \cancel{(q^{3000} - 1)}} = \frac{q^2 + q + 1}{q^2} = 1 \cancel{+ \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}}$$

$S = q^2 + q + 1$ частей

$S_1 = q^2$ частей. $S_2 = q + 1$ частей.

Если все члены увеличить в 40 раз, то и сумма увеличится в 40 раз

$S_1' = 40 q^2$ частей

$S_1' + S_2 = 40 q^2 + q + 1$

$$\frac{40 q^2 + q + 1}{q^2 + q + 1} = 5 \qquad 40 q^2 + q + 1 = 5q^2 + 5q + 5$$

$$35 q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$q = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 35}}{35} = \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot 36}}{35} = \frac{2 \pm 12}{35}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} q_1 = -\frac{10}{35} \quad \varnothing \\ q_2 = \frac{14}{35} \end{array}\right.$$ т.к все члены положит, то $q > 0$

$$q = \frac{14}{35}$$

Четные члены прогресси.

$b_1 = b$

$b_2 = b_1 q$

$b_4 = b_1 q^3$

$b_1'' = b_1 q$

$\cancel{b_2} = q'' = q^2.$

$$S_{четных} = \frac{b_1 q \,(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1} = ; \; n = 1500$$

$$= \frac{b_1 q \,(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$$S = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

~~Sчетных к S~~ S к Sчетных

$$\frac{S}{S_{чет}} = \frac{\cancel{b_1}(\cancel{q^{3000} - 1}) \cdot (\cancel{q-1})(q+1)}{(\cancel{q-1})\,\cancel{b_1}\, q\,(\cancel{q^{3000} - 1})} = \frac{q+1}{q}$$

S $q+1$ частей Sнечет 1 часть.

Sчет q частей $S'_{чет} = 3\,S_{чет}$.

$$\frac{3q+1}{q+1} = \frac{\frac{3 \cdot 14}{35} + \frac{35}{35}}{\frac{14+35}{35}} = \frac{3 \cdot 14 + 35}{14 + 35} =$$

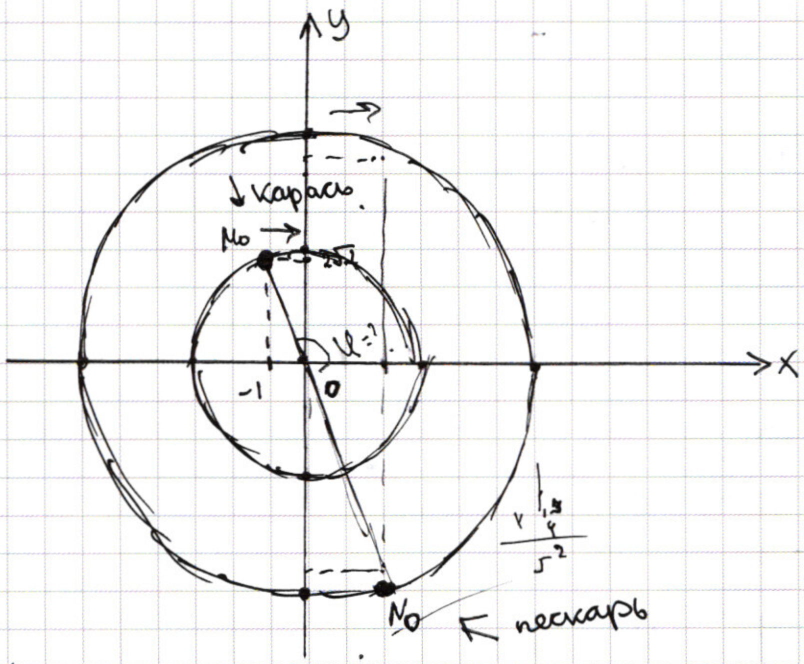
$= \frac{3\cdot 14+35}{35} = \frac{3\cdot 2+5}{5} = \frac{6+5}{5} = \frac{11}{5} = \frac{22}{10} = 2{,}2$

Ответ. Увеличилась в 2,2 раза.

Задача №5

(0;0) – крючок.

$M_0(-1; 2\sqrt{2})$ – карась $N_0(2; -4\sqrt{2})$ – пескарь.



Карась.

$R_1 = \sqrt{1+4\cdot 2} =$

$= 3$

радиус окружности, по которой движется карась 3.

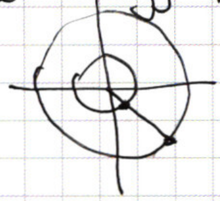
Пескарь:

$R_2 = \sqrt{4+16\cdot 2} =$

$= \sqrt{36} = 6$

радиус окр, по которой движ пескарь.

Наименьшее расстояние между карасем и пескарем будет ~~когд~~ 3 т.е



они будут находиться на одной прямой проходящей через (0;0) по одной стороне от (0;0)

Если они будут так находиться, то синусы и косинусы углов будут одинаковыми.

$l_1 = 2\pi\cdot R_1 = 6\pi$

$l_2 = 12\pi$

$\vartheta_K = 2{,}5\vartheta_n$.

$\vartheta_k = \omega_k R_1$

$\vartheta_n = \omega_n R_2$

$2{,}5\vartheta_n = \omega_k\cdot 3$

$\vartheta_n = \omega_n\cdot 6$.

$2{,}5 = \frac{1}{2}\frac{\omega_k}{\omega_n}$

$\frac{\omega_k}{\omega_n} = 5$

~~Углов~~ Угловая скорость карася в 5 раз больше скорости пескаря.

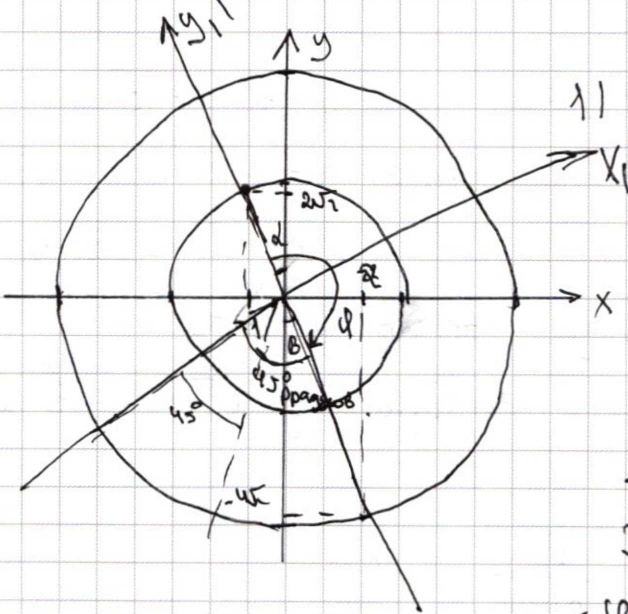
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{w_к}{w_п} = 5$ Прийти в одну точку

За некоторое время t.

пескарь развернется на угол α

карась же должен пройти $\alpha + \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ - угол между их начальными положениями



1) Карась

$|\sin\alpha| = \frac{1}{3}$.

2) Пескарь.

$|\sin\beta| = \frac{1}{3}$

$\angle\alpha = \angle\beta$

Значит

$\angle\varphi = 180^\circ + \angle\alpha - \angle\beta = 180^\circ = \pi$.

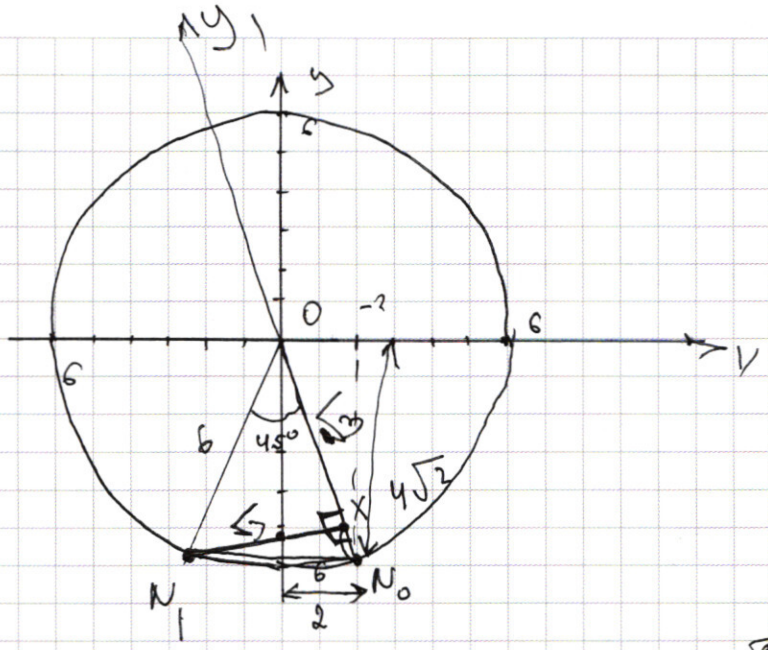
$\cancel{180^\circ}$ $\Delta w = 5w_п - w_п = 4w_п$.

$t_{догон} = \frac{\pi}{4w_п}$

Угол, на который переместиться пескарь

$\angle\gamma = w_п \cdot t_{догона} = \frac{\pi}{4}$ на 45 градусов.

Найти координаты точки, в которую переместился пескарь.



Пусть ON_0 - ось y_1

Тогда отложим

$\angle N_1 O N_0$ от нее на 45°

$2 \cdot 3 = 2x^2$

$x = \sqrt{3}$

$OX = \cancel{4\sqrt{2} - \sqrt{3}}\ 6 - \sqrt{3}$

$\cancel{\frac{3}{6} = 2x^2 \quad \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\cancel{\sqrt{3}}$ $N_1N_0 =$

$= 3 + 36 + 3 - 12\sqrt{3} =$

$= 42 - 12\sqrt{3}$

$N_1N_0 = 42 - 12\sqrt{3}$

$\sqrt{3} = 2 + x$ т.к $N_1 < 0$, то $x_{N_1} = 2 - \sqrt{3}$

$x = \sqrt{3} - 2$

$y_{N_1} = 6 - 4\sqrt{2} + x = \sqrt{3}$

$N_1(\ 2 - \sqrt{3};\ (\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - x)\ )$

$x = \sqrt{3} + 4\sqrt{2} - x$

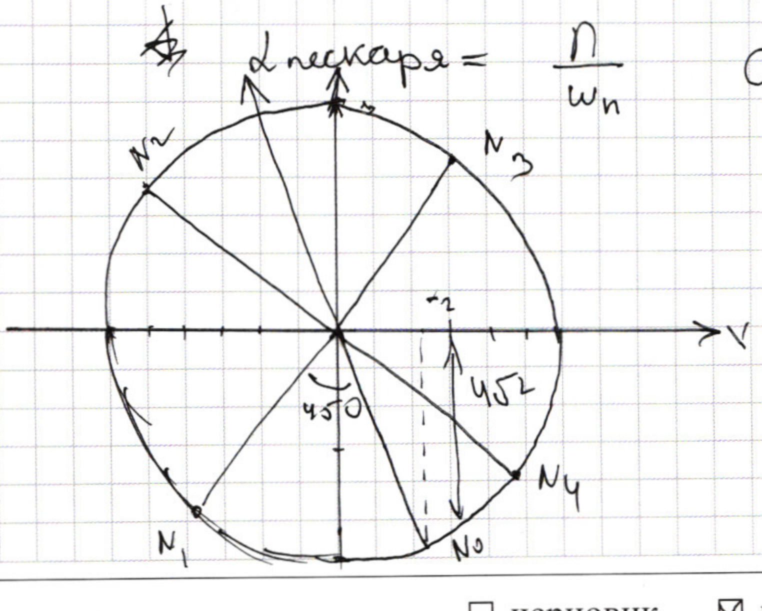
~~Задача №2~~ Следующие разы, чтобы догнать Пескарю нужно будет совершить оборот в 2π.

$t_{догона\ 2} = \dfrac{2\pi}{4\omega_n} = \dfrac{\pi}{2\omega_n}.$

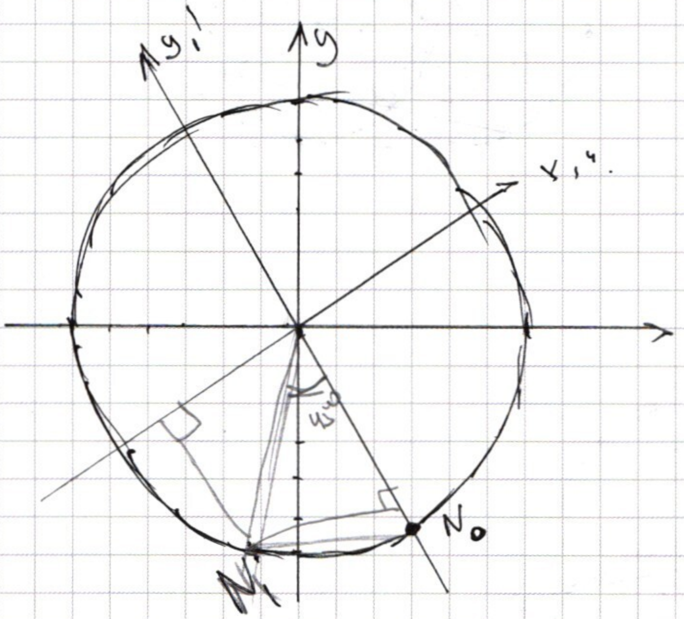
$\alpha_{пескаря} = \dfrac{\pi}{\omega_n}$ С каждым разом будет изменяться на 90°.

в точках $N_1; N_2; N_3; N_4$

где между ними по 90 градусов



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Проведем координать СО $(1)'$ y_1'; x_1'

Так, чтобы N_0 лежала на y_1'

Тогда N_0 в данной СО будет иметь координаты $(0; -6)$

Отложим угол в 45° градусов до N_1

Тогда относит. данной СО N_1 будет иметь координаты $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$

Координаты N_1 в системе (1)

$\sqrt{3} \mp 6 - 4\sqrt{2}$

~~$\Delta x = -4\sqrt{2} + 6$~~

(1) $N_0\ (2; -4\sqrt{2})$ $N_1\ (?)$

$(1)'$ $N_1\ (0; -6)$ б.и. $N_1\ (\sqrt{3}; \sqrt{3})$ $\Delta x = -6 + 4\sqrt{2}$

~~Так к~~ $y_1' = x - 2$

То $x_{N_1} = \sqrt{3} + 2$

$* \ y_1' = y_1 - (6 \mp 4\sqrt{2})$

Ответ:

$y_{N_1} = \sqrt{3} \mp 6 + 4\sqrt{2}$.

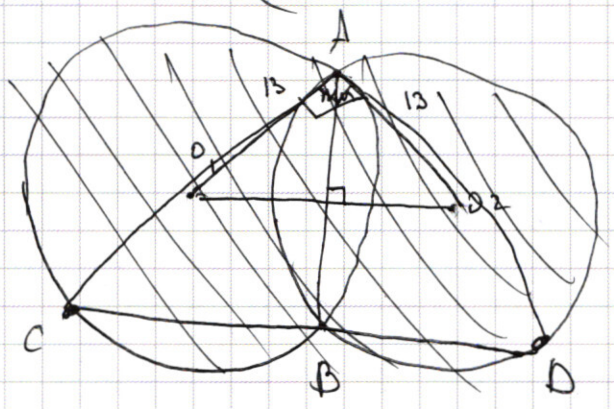
$N_1 (\sqrt{3} + 2; \sqrt{3} + 6 - 4\sqrt{2})$

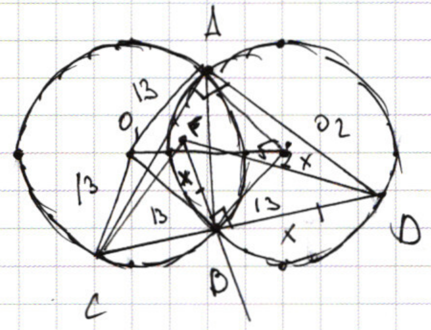
$N_2 (\sqrt{3} + 6 - 4\sqrt{2}; +\sqrt{3} + 2)$.

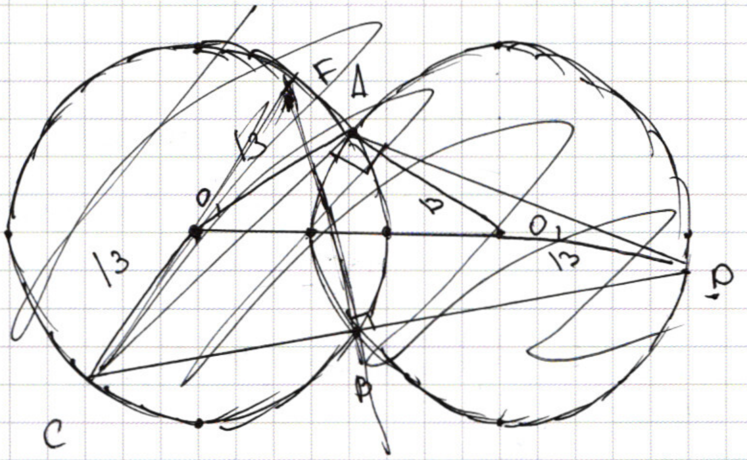
$N_3 (-\sqrt{3} - 2; 4\sqrt{2} - \sqrt{3} - 6)$

$N_4 (-\sqrt{3} - 6 + 4\sqrt{2}; -\sqrt{3} - 2)$

~~Задача №6~~







Задача № 5.

Ответ. $N_1\,(\sqrt{3}+2;\ \sqrt{3}+6-4\sqrt{2})$

$N_2\,(\sqrt{3}+6-4\sqrt{2};\ \sqrt{3}+2)$

$N_3\,(-\sqrt{3}-2;\ 4\sqrt{2}-\sqrt{3}-6)$

$N_4\,(4\sqrt{2}-\sqrt{3}-6;\ -\sqrt{3}-2)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1, 1, 2, 2, 5, 5, 7, 7

Пуст. 1, 1 2 . . . . .

2 числа одинаковых.

x_1 x_2 2 разных числа.

$8! = \frac{8!}{2^3_2 \cdot 2} = 7 \cdot 6$.

$8! = \frac{8!}{2! \cdot 2! \, 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2}$

48 $\quad 7^2 + 8^2 = 49 + 64 = \sqrt{113}$

14

2, 4, 8

3 числа $\quad q = 2 \quad S = b_1 \cdot b^n = \frac{b_1 \cdot q^{n-1}}{n} \cdot n = \cancel{2 \cdot 2^2} = 10$

$b_1 = 2$

$S = \frac{b_1 \cdot q^n}{1 - q^n} = \cancel{27 \cdot \frac{1}{3}} =$

27 9 3 1.

4.

40

$S = \frac{b_1 \cdot q^n}{q - 1} = 3 \cdot (2 \cdot (q-1))$

$S = b_1 (q^n - 1)$

2 3 6 12 24

2 4 5

$2(4^4 - 1) = 2(2^8 - 1)$

$255 \cdot 2 = 510$

2 8 32 128

$3(6 \cdot 1 + 2 + 3 + 4)$ 10

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$2,\ 6,\ 18$ $\quad 26 \quad 8\ 4\ 2\ 1$

$2,\ 6,\ 8.$ $\quad S = \frac{b_1 \cdot n}{1-q} =$

$\frac{b_1(q^n - 1)}{q^{n-1}} \cdot n = \frac{1\ (2^4 - 1)}{2^3} =$

$\cancel{8 \quad 4}$

$1\ 2\ 4\ 8$ $\quad 1\ (q^n - 1) =$

15 $\quad = 1\ (2^4 - 1) = 15$

$1\ 2\ 4\ 8\ 16 \quad 1\ (2^5 - 1) = 31$

$2\ 4\ 8\ 16 \quad 2\ (2^4 - 1) = 30$

$S = b_1\ (q^n - 1)$

$9 \quad 3 \quad 1$

$5 \quad 10 \quad 20 \quad 40$

$5(2^4 - 1) = 5 \cdot 15 = 75$

$S = b_1(q^n - 1)$

Имеет с номерами, которые кратны 3м.

b_1

$b_2 = b_1 \cdot q$

$b_3 = b_1 \cdot q^2$

$b_1 \cdot q^2$.

$b_4 \quad q^3$

$b_5 \quad q^4$

$b_6 = b_1 \cdot q^5$

$q^8 = q$

$S = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 =$

$= b_1(1 + q + q^2 + q^3)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8-значные числа произведение цифр 4900

$4900 = 7\cdot 7\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5$

7, 7, 2, 2, 5, 5, 1, 1. скольками способами

7, 7, 4, 5, 5, 1, 1, 1 скольками способами.

7, 7, 2, 2, 5, 5, 1, 1

Все числа всех по 2

$P_n = \frac{8!}{2} = \frac{7\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2} =$

77 22 55 11

77 22 55 11

$= 56\cdot 30\cdot 12 =$

$= 360\cdot 56$

77 22 55 11

~~7~~, 7, ~~2~~, 2, 5, 5, 1, 1.

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 48 \\ \hline 336 \\ 168 \\ \hline 20160 \end{array}$$

$P_n = \frac{8!}{2} = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 40\cdot 42\cdot 12 = 480\cdot 42 = 20160$

~~2~~ 7, 7, 5, 5, 1, 1, 1, 4. 1е место

4.

2е место

4

3е место

1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7, 7 На 8 мест.

Задача N 2

$b_1, b_2 \dots b_3$

>0 S

Сумма геометр. прогрессии.

$S = \cancel{\frac{b_1 \cdot q^n}{q^n - 1}} = \cancel{\frac{2 \cdot 2^4}{2^4 - 1}} = \frac{16 \cdot 2}{16 - 1} = \cancel{\frac{32}{15}}$

2 4 8 16

30

$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

$S = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 \; b_1$

$S_1 = \frac{b_1 \cdot q^n}{q - 1} =$

$\cancel{(b_1 (1 + q + q^2 + q^3))}$

$= \frac{2 \cdot 2^4}{1}$

16 8 4 2

$S_1 = \frac{b \cdot q^n}{1 - q} =$

N3

$= \frac{16 \cdot \frac{1}{2}^4}{\frac{1}{2}}$

$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$

$(x+10)(x-4)$

$\left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}}\right)\sqrt{x(x-8)(x+8) + 200} = (x+10)(x-4)$

при $x = -10$ $\quad 10 \cdot 2 \cdot 18 + 200 > 0 \quad 0 = 0$

$x \neq -10 \quad \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{x(x-8)(x+8)+200} = x - 4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^3-64x+200>0$

$x^3-64x+200=x^2-8x+16$

$x^3-x^2-56x+184=0$

	1	-1	-56	184
2	1	1	-54	0
-2	1	-3	-50	
4	1	3	-44	
-4	1	-5	-36	
8	1	7	-6	
-8	1	-9	16	
23	1	22		

$x^3-64x+200=x^2-8x+16$

$x^3-x^2-64x+8x+200-16=0$

$x^3-x^2-56x+184=0$

184 | 2

92 | 2

46 | 2

23

$2.5.2.2.5$

$1+\sqrt{13}$

$1-\sqrt{3}$

$x(x-8)(x+8)+200$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$x = -10$

$\frac{\cancel{2x} + 10}{2\sqrt{2}}$ $\quad \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (\cancel{x+10})(x-4)$

$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = 8(x^2 - 8x + 16)$

$x^3 - 64x + 200 - 8x^2 + 64x - 128 = 0$

$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$

	1	-8	0	72
2	1	-6		
3	1	-5	~~5~~	
3	1			

$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$

	1	-8	0	72
9	1	1	8	
8	1	0	0	0
~~-8~~	~~1~~	~~-16~~	~~135~~	
6	1	-2	-12	0

$(x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0$

$4x^4 + x^2 - 4x - 5x^2, x^2 |x+2| + 4 \geq 0$

$= 2 \cdot 49 \cdot 200 \quad (200 - 49)^2 =$

$16 \cdot 8 = 128$

$15 \cdot 9 = 135$

2 · 10 · 10

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $x \geq -2$

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$

$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$

	4	-5	-9	4	4
-1	4	-9	0	4	0
2	4	-1	-2	0	

$(x-1)(4x^3 - 9x^2 + 0\cdot x + 4) \geq 0$

$(x-1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$

$(x-1)(x-2)\left(x - \left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)\right)$

	4	5	11	4	4
-1	4	1	10	-6 ..
-2	4	-3	17	-30
-4	4	-11		
$-\frac{1}{4}$	4	4	10	

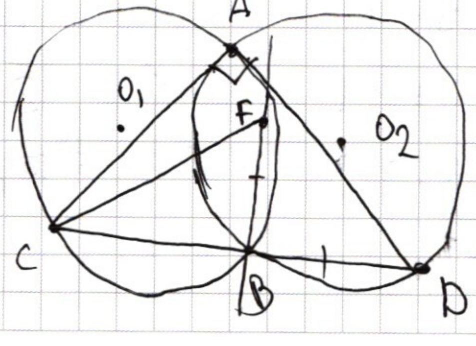
$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$

$\underset{>0}{4x^4} + \underset{\geq 0}{5x^3 + 5x^2} + 6x^2 + \underset{>0}{4x + 4} \geq 0$

$x^2(4x^2 + 5x + 5) + 6x^2 + 4x + 4 \geq 0$

$-5 \pm \sqrt{25 - 16\cdot 5}$

Задача №6.

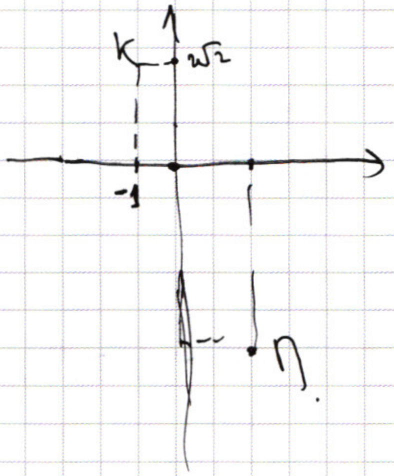


$R = 13.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

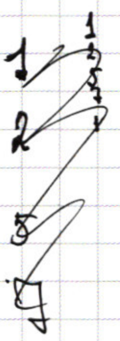
Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

Сколькими спос. 1, 7, 5, 5, 2, 2, 1, 1 расставить на 8 мест

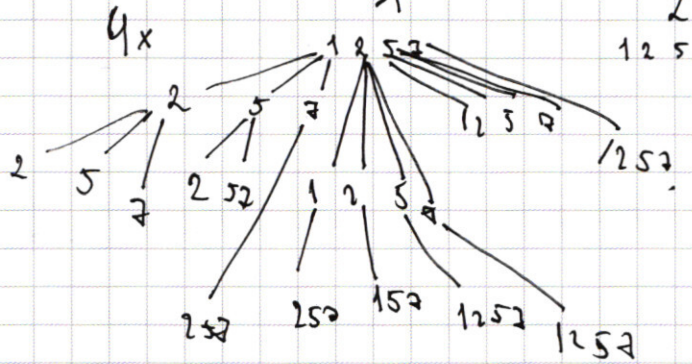


4900.

1,1, 2,2, 5,5, 7,7



1 2 5 7



На 1е 4

$P_8' = 8! - 4P_2' =$

$= 8! - 4 \cdot 2! =$

На 2е 4 способа на второ.

Пусть 4 числа 1 1 22

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12 \cdot 2.$

1 1 2 2 2 2 1 1

1 2 1 2 2 1 2 1

1 2 2 1 2 1 1 2

6

6 · 5 · 4 · 3.

6

22 11 33

2 2 11 3 3 22 3 3 11

2 2 1 3 1 3 2 3 2 3 1 1

2 2 1 3 3 1 2 3 2 1 3 1

2 2 3 1 3 1 ~~23~~

22 3 3 1 1 3

6 $\frac{8!}{8} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 =$

$= 30 \cdot 7 \cdot 24 =$

~~На втором же~~

$= 210 \cdot 24$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)