МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1;2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2;-4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16, \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

$1 = 1$ $4 = 2^2$ $7 = 7$

$2 = 2^1$ $5 = 5$ $8 = 2^3$

$3 = 3^1$ $6 = 2 \cdot 3$ $9 = 3^2$

$0 = 0$

НАМ ~~ПОДХ~~ НЕ ПОДХОДЯТ 3, ~~4~~, 6, 8, 9, 0

1, 2, 4, 5, 7 => НЕОБХОДИМО ПО ДВЕ 5 И 7.

ТАКЖ НУЖНО, ЧТОБЫ $n_2 + n_4 \cdot 2 = 2$ =>

У НАС или две двойки в числе, или есть четверка

I 2, 2, 5, 5, 7, 7, 1, 1 II 4, 5, 5, 7, 7, 1, 1, 1

I $\frac{8!}{2^4} = \frac{7!}{2}$ II $\frac{8!}{2^2 \cdot 3!} = \frac{7!}{3}$

$\frac{7!}{2} + \frac{7!}{3} = \frac{5}{6} \cdot 7! = 7 \cdot 5^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4200$ ОТВЕТ: 4200 ЧИСЕЛ

№2

$a_{n+1} = k a_n$

$x = 1 + k^3 + \dots + k^{2997}$

$(a_1 + a_2 + a_3) \cdot x = a_1 + a_2 + \dots + a_{3000} = S_1$

$(a_1 + a_2 + 40 a_3) \cdot x = a_1 + a_2 + 40 a_3 + \dots + a_{2998} + a_{2999} + 40 a_{3000}^{5}$
$= S_2$

$$5 = \frac{S_2}{S_1} = \frac{a_1 + a_2 + 40 a_3}{a_1 + a_2 + a_3} = \frac{a_1 + k a_1 + k^2 a_1 \cdot 40}{a_1 + k a_1 + k^2 a_1} = 1 + \frac{39 k^2}{1 + k + k^2}$$

$-\,x^3 - 8x^2 + 72 \;|\; x-6$

$x^3 - 6x^2 \;|\; x^2 - 2x - 12x$

$-2x^2$

$-\,-2x^2 + 12x$

$-12x$

$x_1 x_2 = -12$

$x_1 + x_2 = 2$

$x_1^2 + 2x_2x_1 + x_2^2 = 4$

$x_1^2 - 2x_2x_1 + x_2^2 = 4 + 48 = 52$

$x_1 - x_2 = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$x_1 = \frac{2\sqrt{13} + 2}{2} = \sqrt{13} + 1$

$x_2 = -\sqrt{13} + 1$

$\left(\frac{(x+10)\sqrt{2}}{4}\right)\left(\sqrt{x^3 - 64x + 200}\right) = (x+10)(x-4)$

$\frac{0\sqrt{2}}{4}\sqrt{-1000 + 640 + 200} = 0$

$(1-\sqrt{13})^3 - 64(1-\sqrt{13}) + 200 =$

$= 1 - 3\sqrt{13} + 3\cdot 13 - 13\sqrt{13} - 64 + 64\sqrt{13} + 200 =$

$=$ ~~$304 - 80\sqrt{13}$~~ $176 + 48\sqrt{13}$

$80\left((3 + \frac{4}{5}) - \sqrt{13}\right)$

$9 + \frac{24}{5} + \frac{16}{25} \quad 13$

216 + 200 384

416
384
32

~~$4x^4 + x^2 + 4x = 0$~~

$\text{I} \quad 4x^4 - 5x^3 - x^2 + 4x + 4$

$x^4 - 1{,}25x^3 \; 0{,}25x^2 + x + 1$

$\left(x^2 - 0{,}625x - \frac{(1 + 0{,}625^2)}{2}\right)^2 =$

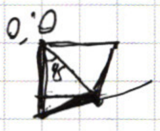
0,25

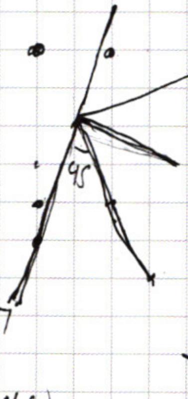
$= x^4 - 1{,}25x^3 - 0{,}25x^2$

$0{,}625^2 - 0{,}25 - 0{,}625^2 = -0{,}25$

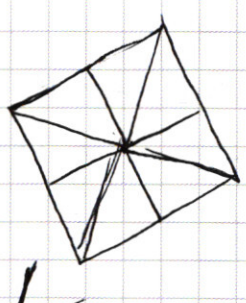
$(0{,}25 + 0{,}625^2)\,0{,}625 =$

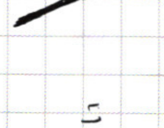
$$\begin{array}{r} \times\; 0{,}625 \\ 0{,}625 \\ \hline 3125 \\ +\;1250 \\ 3750 \\ \hline 390625 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\; 0{,}640625 \\ 0{,}625 \\ \hline 3203125 \\ +\;1281250 \\ 3843750 \\ \hline 390625 \end{array}$$





$\omega_k = 5\omega_п$





sin α sin(α + 45)

64 + 225 =

= 289

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5 + \overset{5}{\cancel{4}}k + 5k^2 = 1 + k + k^2 + 39k^2$

$35k^2 - 4k - 4 = 0$

$k^2 - \frac{4}{35}k - \frac{4}{35} = 0$

$(k - \frac{2}{5})(k + \frac{2}{7}) = 0$

$\text{I}\ k = \frac{2}{5}$

$(1 + \frac{2}{5} + \frac{4}{25}) \cdot 5 \overset{?}{=} 1 + \frac{2}{5} + 40 \cdot \frac{4}{25}$

$5 + 2 + \frac{4}{5} \overset{?}{=} 1 + \frac{2}{5} + \frac{32}{5}$

$\cancel{50}\ 7 + \frac{4}{5} \overset{?}{=} 1 + \frac{2}{5} + 6 + \frac{2}{5}$

$7,8 = 7,8$ V

$\underline{\text{II}}\ k = -\frac{2}{7}$

$5(1 - \frac{2}{7} + \frac{4}{49}) \overset{?}{=} 1 - \frac{2}{7} + \frac{40 \cdot 4}{49}$

$5 - \frac{10}{7} + \frac{20}{49} \overset{?}{=} 1 - \frac{2}{7} + \frac{160}{49}$

$4 - \frac{8}{7} \overset{?}{=} \frac{140}{49} = \frac{20}{7} = 2 + \frac{6}{7}$

$4 - 1 - \frac{1}{7} = 2 + \frac{6}{7}$ V

I ~~$a_1 + a_2$~~. $x_2 = 1 + k^2 + \ldots + k^{2998}$

$(a_1 + a_2) \cdot x_2 = S_1$

$(a_1 + \overset{3}{\cancel{40}} a_2) \cdot x_2 = S_3$

$\frac{S_3}{S_1} = \frac{a_1 + k a_1 \cdot 3}{a_1 + k a_1} = \frac{2k}{1+k} + 1 = 1 + \frac{\frac{4}{5}}{1 + \frac{2}{5}} = 1 + \frac{4}{7} = \frac{11}{7}$

II $\frac{S_3}{S_1} = 1 + \frac{2k}{1+k} = 1 + \frac{-\frac{21}{7}}{1-\frac{2}{7}} = 1 + \frac{-4}{5} = \frac{1}{5} = 0,2$

НО ВО ВТОРОМ СЛУЧАЕ У НАС БУДУТ НЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ
~~ОТВЕТ:~~ ЧИСЛА

ОТВЕТ: СУММА УВЕЛИЧИТСЯ В $\frac{11}{7}$ РАЗА.

№3

$$\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{4} + \frac{10\sqrt{2}}{4} = \frac{(x+10)\sqrt{2}}{4}$$

$$x^2+6x-40=(x+10)(x-4)$$

ВОЗВЕДЕМ ОБЕ ЧАСТИ В КВАДРАТ. ПРИ ЭТО ВСЕ РЕШЕНИЯ ПЕРВОГО РАВЕНСТВА БУДУТ И РЕШЕНИЯМИ ВТОРОГО, НО ВОЗМОЖНО ПОЯВЯТСЯ НОВЫЕ.

$$\frac{(x+10)^2 \cdot 2}{16} \cdot (x^3-64x+200) = (x+10)^2(x-4)^2$$

$\frac{x^3-64x+200}{8} = (x-4)^2$, ПРИ $x \neq -10$ ← СЛУЧАЙ БУДЕТ РАЗОБРАН ОТДЕЛЬНО

$$x^3-64x+200 = 8x^2-64x+128$$

$$x^3-8x^2+72=0$$

$$x^3-8x^2+72 = (x-6)(x^2-2x-12) = (x-6)(x-\sqrt{13}-1)(x+\sqrt{13}-1)$$

ПОЛУЧАЕМ КОРНИ $6; \sqrt{13}+1; -\sqrt{13}+1; -10$

I. $x=-10$

$\sqrt{x^3-64x+200} = \sqrt{-1000+640+200} = \sqrt{-160}$ X

II $x = 1-\sqrt{13}$

$\sqrt{x^3-64x+200} = \sqrt{(1-\sqrt{13})^3+64(1-\sqrt{13})+200} = \sqrt{304-80\sqrt{13}}$. $304-80\sqrt{13}>0$

$(x+10)$ СОКРАЩАЕТСЯ. $(x-4) = 1-\sqrt{13}-4 = -3-\sqrt{13}$, Т.Е. ОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ, КОГДА ВСЕ СЛЕВА – ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ X

$\boxed{III}$ $x = 1+\sqrt{13}$ $\sqrt{x^3 - 64x + 200} = \sqrt{176 + 48\sqrt{13}}$ $176 + 48\sqrt{13} > 0$

$(x+10)$ СОКРАЩАЕМ.

$(x-4) = 1 + \sqrt{13} - 4 = -3 + \sqrt{13} > 0$, Т.К $\sqrt{13} > \sqrt{9} = 3$ V

~~III~~ $\underline{IV}$ $x = 6$

$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = \sqrt{216 - 384 + 200} = \sqrt{32}$

$x+10$ СОКРАЩАЕМ

$x - 4 = 2$, ЧТО БОЛЬШЕ НУЛЯ

ОТВЕТ: 6 И $1+\sqrt{13}$

N5

$r_K = \sqrt{-1^2 + 2\sqrt{2}^2} = 3$

$r_П = \sqrt{2^2 + (-4\sqrt{2})^2} = 6$

$\omega_K = \frac{V_K}{2\pi r_K} = \frac{2{,}5 V_П}{2\pi \cdot 3}$

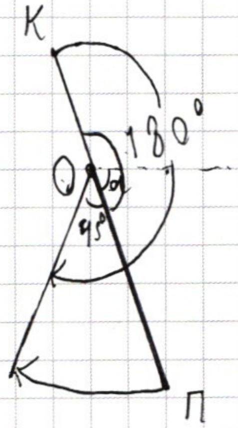
$\omega_П = \frac{V_П}{2\pi r_П} = \frac{V_П}{2\pi \cdot 6}$

$\omega_K = 5\omega_П$

$\sin\alpha = \frac{-4\sqrt{2}}{6} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos\alpha = \frac{2}{3}$

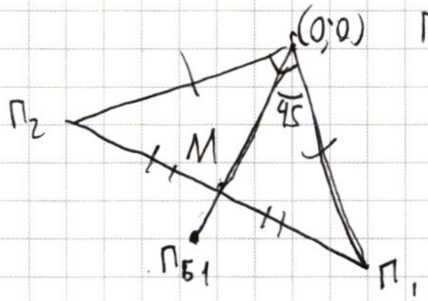
НАХОДИМ α.



ЗАМЕТИМ, ЧТО ИЗНАЧАЛЬНО ~~УГЛ~~ $\angle KOП = 180°$. ЗНАЧИТ ПЕРВАЯ „ВСТРЕЧА БУДЕТ ЧЕРЕЗ $\frac{180}{\omega_K - \omega_П} \cdot \omega_П = 45°$ ОТ ПЕСКАРЯ

КООРДИНАТЫ – $(\sin(\alpha+45)\cdot6\ ;\ \cos(\alpha+45)\cdot6)$ ДАЛЬШЕ КАРАСЮ НУЖНО ПРОПЛЫТЬ ХОТЯБЫ КРУГ ДО СЛЕДУЮЩЕЙ „ВСТРЕЧИ

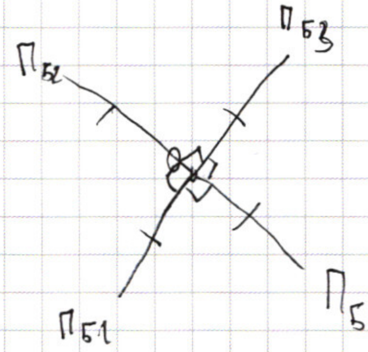
$\frac{360}{\omega_K-\omega_n}\cdot\omega_n=90^\circ \Rightarrow$ КАЖДАЯ ВСТРЕЧА НА 90° ОТЛИЧАЕТСЯ ОТ ПРЕДИДУЩЕЙ



$П_1=(2;-4\sqrt2)$ $П_2=(-4\sqrt2;-2)$

$M=\left(\frac{(2-4\sqrt2)}{2};\frac{(-4\sqrt2-2)}{2}\right)=(1-2\sqrt2;-1-2\sqrt2)$

$OП_{Б1}=\sqrt2\cdot OM$



$$\boxed{\begin{aligned}&П_{Б1}=(-4+\sqrt2;-4-\sqrt2)\\&П_{Б2}=(-4-\sqrt2;4-\sqrt2)\\&П_{Б3}=(4-\sqrt2;4+\sqrt2)\\&П_{Б4}=(4+\sqrt2;-4+\sqrt2)\end{aligned}}$$

№7

$|y+x+8|+|y-x+8|=16$

$|2y+x-x+16|\le|y+x+8|+|y-x+8|$

$|2y+16|\le16$

$y\le0$

$y\ge-16$

I $y=0$

ТОГДА x ПРИНИМАЕТ ЗНАЧЕНИЯ $\in[-8;8]$ (ИНАЧЕ СУММА БОЛЬШЕ)

II ПУСТЬ $y\neq0$ ТОГДА $x=\pm8$ $(|\cdot y|+|16+y|=16)$

$49\le a\le$ 15^2+8^2

Ответ: $a\in[49;289]$

☐ черновик   ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)