

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{3} \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{x+10}{2} \right) \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40. \quad | : x+10, \text{ где } x \neq -10.$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 6x - 40 & x+10 \\ -x^2 + 10x & x-4 \\ \hline -4x - 40 & \\ -4x - 40 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

получили:

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x - 4$$

Возведем обе части в квадрат, при условии, где $x \geq 4$

$$\frac{2}{16} \cdot (x^3 - 64x + 200) = x^2 - 8x + 16$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$x^2(x-8) + 72 = 0$$

в дробителе свободного члена
находим подстановочный корень

$$x=6$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 64x + 72 & x-6 \\ -x^3 - 6x^2 & x^2 + 6x \\ \hline 6x^2 - 64x & \\ -6x^2 - 36x & \\ \hline -26x + 72 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 8x^2 + 72 & x-6 \\ -x^3 - 6x^2 & x^2 - 2x - 12 \\ \hline -2x^2 + 72 & \\ -2x^2 + 12x & \\ \hline -12x + 72 & \\ -12x + 72 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Остаточные корни находим

из ур. $x^2 - 2x - 12 = 0$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{13}$$

$$1 + \sqrt{13} > 4 \text{ - подходит}$$

$$1 - \sqrt{13} < 4 \text{ - не удовл. условию } x \geq 4.$$

Ответ: $x = 6$; $x = 1 + \sqrt{13}$.

②. В данном множ-ве ~~полож~~ чисел с порядковым номером от 1 до 3000 включ-но, 1000 чисел с порядковым номером кратн. 3.

Рассмотрим ~~полож-те~~ чисел $b_3, b_6, b_9, \dots, b_{3000}$.

Знаменатель ^{данной} прогрессии q^3 , где q - знаменатель прогрессии $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{3000}$.

$$S_3 = \frac{b_3 \cdot (q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1} = \frac{b_1 \cdot q^2 \cdot (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

$$S = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}; \text{ получим такое ур-е.}$$

$$S - S_3 + 40S_3 = 5S$$

$$\Leftrightarrow 39S_3 = 4S$$

$$\frac{39 \cdot q^2}{(q^2 + q + 1)} = 4 \Leftrightarrow 39q^2 = 4q^2 + 4q + 4$$

$$35q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 140}}{35} = \frac{2 \pm 12}{35}$$

Т.к. все члены прогрессии ~~полож.~~, то $q = \frac{2+12}{35} = \frac{14}{35}$.

$$S_2 = \frac{q b_1 \cdot (q^2)^{1500} - 1}{q^2 - 1}, \text{ пусть } S' - \text{получ. во второй} \\ \text{случае прогрессия.}$$

$$S - S_2 + 3S_2 = S'$$

$$S + 2S_2 = S' \Rightarrow S' = \frac{b_1 \cdot q}{q-1} \left(\frac{2q}{q+1} + 1 \right) \cdot (q^{3000} - 1) =$$

$$= S \cdot \left(\frac{2q}{q+1} + 1 \right) = \left(\frac{28}{35 \cdot 149} + 1 \right) S = \left(\frac{4}{7} + 1 \right) S = \frac{11}{7} S$$

Ответ: увеличиться в $\frac{11}{7}$ раз.

$$4 \cdot 8 - 9 - 4 + 4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

④ $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 / |x+2| + 4 \geq 0.$

при $x \geq -2.$

~~$4x^4$~~ $4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0.$

$4x^2(x^2-1) - 5x^2(x+1) + 4(x+1) \geq 0.$

$(x+1)(4x^2(x-1) - 5x^2 + 4) \geq 0.$

решим ур-е

$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) = 0.$, в скобках вынесем

~~$(x+1)(x^2(4x-5) + 4(x+1)(1-x))$~~ тогда найдем корни

$x = 2.$

~~$$\begin{array}{r} 4x^3 - 9x^2 + 4 \quad | \quad x-2 \\ \underline{-4x^3 + 8x^2} \\ 17x^2 + 4 \\ \underline{-17x^2 + 34x} \\ 34x + 4 \end{array}$$~~

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 9x^2 + 4 \quad | \quad x-2 \\ \underline{-4x^3 + 8x^2} \\ -x^2 + 4 \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ -2x + 4 \\ \underline{-2x + 4} \\ 0 \end{array}$$

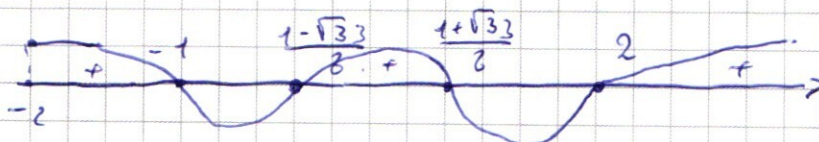
найдем ур-е

$4x^2 - x - 2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$

Найдем корни: $x = 2$; $x = -1$; $x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$

$-1 < \frac{1+\sqrt{33}}{8} < 2$; $-1 < \frac{1-\sqrt{33}}{8} < \frac{1+\sqrt{33}}{8}$



при $x < -2$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0.$$

т.к. все коэф. многочлена, то данный многочлен ≥ 0 , при $x < -2$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}] \cup [2; +\infty)$.

⑤. Посчитаем радиусы R_k - карая

R_n - некая.

$$R_k = \sqrt{1+8} = 3$$

$$R_n = \sqrt{4+32} = 6$$

Кратчайшее расстояние будет

или $\Delta_k = \Delta_n + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

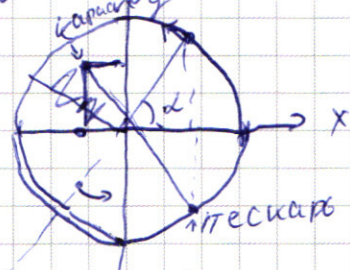
Δ - угол между радиусом, вед. точку касания и радиусом с началом и прямой Ox .

Найдем нач. положение угла Δ ,

карая и некая.

$$\tan \Delta_k = \frac{y_k}{x_k} = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$$

$$\tan \Delta_n = \frac{y_n}{x_n} = -\frac{4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$$



Заметим, что

Угол между ними $= \frac{\pi}{4}$ или $\frac{3}{4}\pi$.

Пусть $\begin{cases} v_k = 2,5v \\ v_n = v \end{cases}$

тогда

$$\omega_k = \frac{2,5v}{3}$$

$$\omega_n = \frac{v}{6}$$

$$\Rightarrow \omega_k = 6\omega_n$$

ω - углов. скорость.

Первая координата

Первая

отклонение

находятся на биссектрисе. Будет:

при котором они будут

$$6\omega_n \cdot t = \omega_n \cdot t + \frac{\pi}{4}$$

$$5\omega_n \cdot t = \frac{\pi}{4}$$

$$\omega_n \cdot t = \frac{\pi}{20} = \Delta_n$$

$$\Delta_k = \frac{6\pi}{20}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Delta \alpha_{12} = \frac{3}{20} \pi.$$

точка первого

плоскости

$$v_k = 2,5 v$$

$$v_n = v$$

, тогда

$$\omega_k = \frac{2,5 v}{3} = \frac{5v}{6}$$

$$\omega_n = \frac{v}{6}$$

$$\omega_k = 5 \omega_n$$

ω - угловая
скорость.

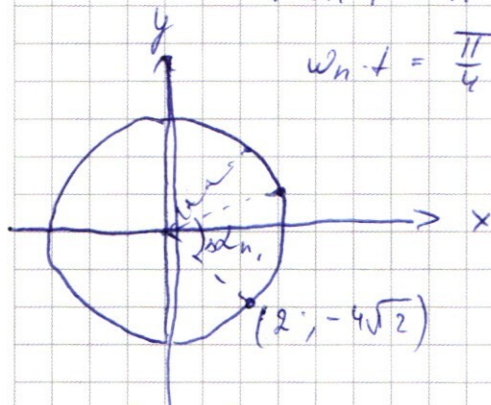
Кратчайшее расстояние будет при условии:

$$\omega_k \cdot t = \omega_n \cdot t + \pi.$$

$$4 \omega_n \cdot t = \pi$$

$$\omega_n \cdot t = \frac{\pi}{4} = \alpha_n = 45^\circ.$$

Пескоструй сместится
на угол $\alpha_n = \frac{\pi}{4}$.



Новая координата пескоструй
станет: $(2; 4\sqrt{2})$. Далее он

все время будет вращаться на угол $\alpha_n = \frac{\pi}{4}$,
поэтому все его координаты будут удовл. услов.

$$|tg \alpha| = \left| \frac{y}{x} \right| = 2\sqrt{2},$$

т. е. это будут координаты:

$$(2; 4\sqrt{2}); (-2; 4\sqrt{2}); (-2; -4\sqrt{2}); (2; -4\sqrt{2}).$$

Ответ: $(2; 4\sqrt{2}); (-2; 4\sqrt{2}); (-2; -4\sqrt{2}); (2; -4\sqrt{2})$

②. ①. Зерошани таш 4900 на прости монумент:
 $4900 = 7^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2$

Тогда возможные цифры в 8-ми значном числе будут: $7, 7, 5, 5, 2, 2, 1, 1$ или $7, 7, 5, 5, 4, 1, 1, 1$.
1 1
1 раз поставив 2 раз поставив

При первой расстановке возможно $\frac{8!}{16} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$.

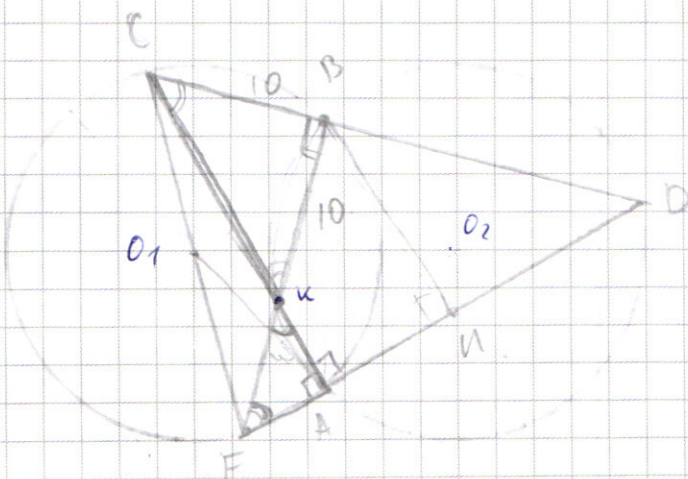
При второй расстановке:

$$\frac{8!}{12} = 3360.$$

Итого всего способов: $3360 + 2520 = 5880$.

Ответ: 5880.

⑥. При данных нач. условиях построение поверт. в САД так, чтобы AC был диаметром. отложит. точки A .



Dann: $R = B$;

 $\angle CAB$ $\angle CAD = 90^\circ$
$$\text{out}/\text{in}, \text{out}/\text{in} = \text{A} \cup \text{B}$$

$B \in CD$

$$BF \perp CD; BF = BD$$

Найти ~~CF~~. а) $CF = ?$

8/ $BC=10$; $SAC_F=?$

a) 1) ΔFBD . Т.к. $BF = BD$ — ~~он~~ — $p/d \Delta$.
 $\angle FBD = 90^\circ$, Т.к. $BF \perp Bd$.

2) д.т.к. $\begin{cases} R_1 = R_2 = R^+; \\ B - \text{точка перес. окр. } \angle BFD = 90^\circ \end{cases}$ $\Rightarrow$ то Фаллит на окр. $(O_1; R)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) Пусть, зная что $F \in \text{окр}(O_1; R)$ ~~на~~ косячно,
что т.к. $\begin{cases} C \in \text{окр}(O_1; R) \\ B \in \text{окр}(O_1; R) \end{cases}$ $\angle CBF$ - вписанный $= 90^\circ$,
т.к. $BC \perp CD$.

4) из 3 следует, что $\angle CBF$ опирается на
диаметр $CF \Rightarrow CF = 2R = 26$.

5) т.к. $\angle CAD = 90^\circ$ по ушю, то $\angle CAF = 90^\circ$

(они смеж, т.к. $A \in FD$ из (1))

$$6) FB = \sqrt{CF^2 - CB^2} = \sqrt{576} = 24$$

7) Пусть $AC \cap FB = K$.

$\triangle KAF \sim \triangle KBC$ (по 2-м углам).

Пусть x - K коэффициент подобия.

$$\frac{CK}{KA} = \frac{BK}{KF} = x$$

по теореме об отрезках хорд.

$$AK \cdot KC = FK \cdot KB \Rightarrow x$$

7) Заметим, что $\angle CAF$ вписан в $\text{окр}(O_1; R)$.

тогда $O_1A = O_1F = O_1C = R$.

8) BC - высота $\triangle FBD$, т.к. $BF = BD$, то BC - бис-са

$BC \perp FD$; $KA \perp FD \Rightarrow KA \parallel BC$.

(по св-ву
р/б $\triangle$)

тогда $\angle FKA = \angle FBC = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

Тогда из св-ва р/б $\triangle$ как след, что $KA = FA$;

$BC = BK$. $FK = FB - BK = 6$. Пусть $AF = AK = x$.

тогда $FK^2 = 2x^2 \Rightarrow x = AK = AF = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

9) из к/у ΔCBK : $CK = \sqrt{CD^2 + BK^2} = 10 \cdot \sqrt{2}$.

10) Тогда $CA = CK + KA = 13 \cdot \sqrt{2}$.

11) $FA = 3\sqrt{2}$; $CA = 13\sqrt{2}$.

$$S_{CAF} = \frac{FA \cdot CA}{2} = 39$$

Ответ: а) 26 б) 39

7) Базисные модули: и подставим во 2-ое ур-е (с параметрами).

$$\begin{cases} y + x + 2 \geq 0 \\ y - x + 2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad y \geq -x - 2$$

1) $y + x + 2 + y - x + 2 = 16 \rightarrow$

$$y = 0 \Rightarrow x \geq -2$$

2) $y + x + 2 - y + x - 2 = 16$.

$$x = 2 \Rightarrow y \geq -16$$

3) $-y - x - 2 + y - x + 2 = 16$.

$$x = -8 \Rightarrow y \geq 0$$

4) $-y - x - 2 - y + x - 2 = 16$

$$y = -16 \quad x \geq 2$$

Получаем:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x \geq -2 \\ (x^2 - 15)^2 = a - 64 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a - 64 \geq 84 - 240 + 225$$

$$a \geq 128 - 15 \Rightarrow a \geq 113$$

$$\begin{cases} y \geq -16 \\ x = 2 \\ 49 + (y - 2)^2 = a \end{cases}$$

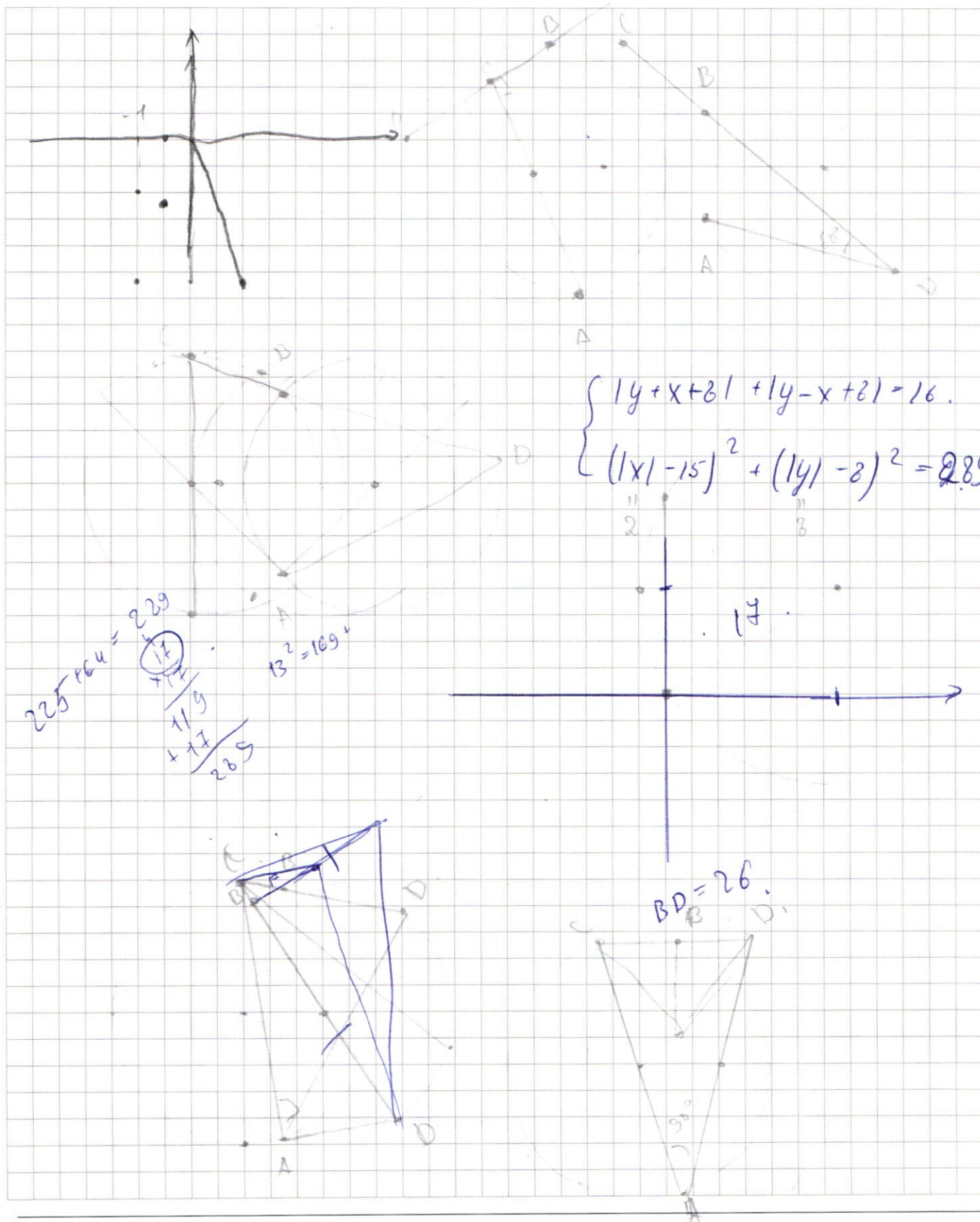
$$a \geq 49 + 64 \Rightarrow a \geq 113$$

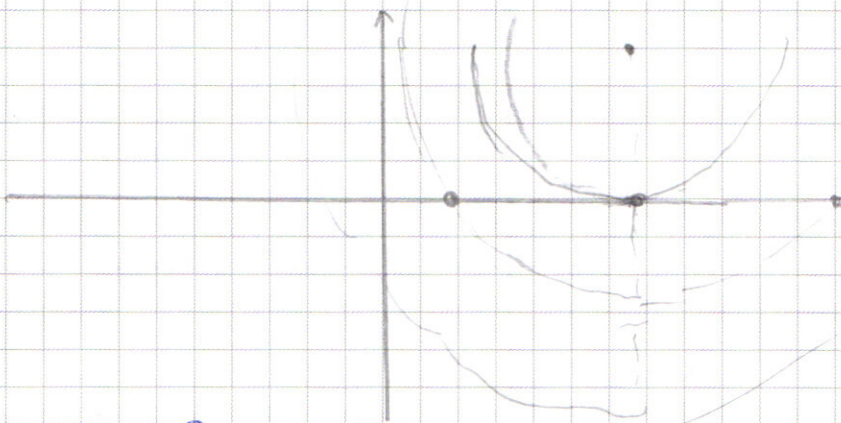
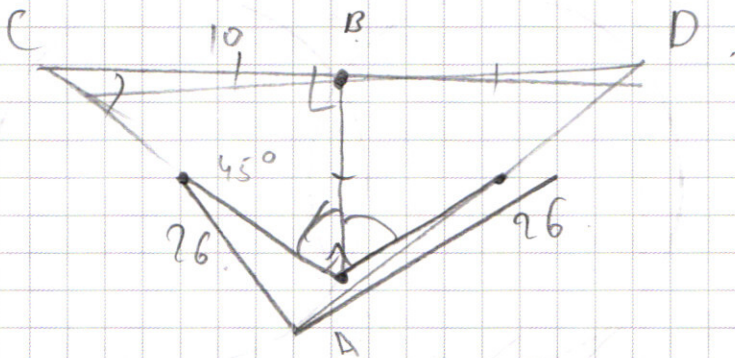
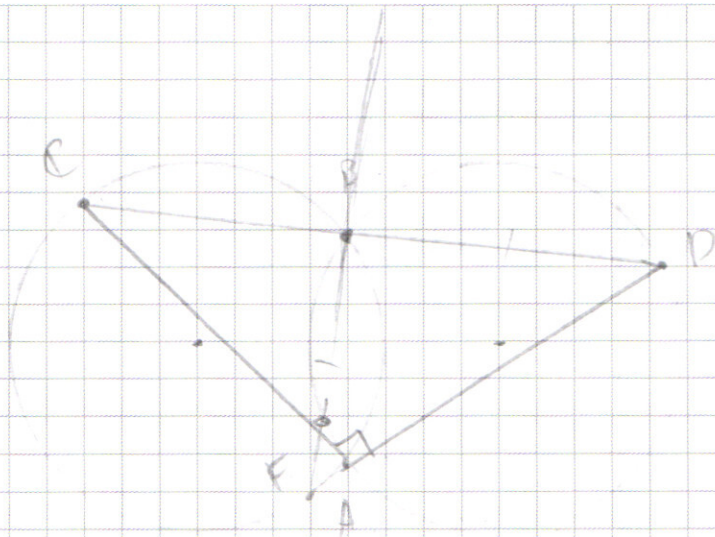
$$\begin{cases} y = 16 \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow a \geq 49 + 64 = 113$$

$$\begin{cases} x = -8 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a \geq 49$$

Ответ: $a \geq 113$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$y + x + 8 \geq 0$$

$$y \geq -x - 8$$

$$y - x + 8 \geq 0$$

$$y \geq -x - 8$$

$$y - x \geq -8$$

$$y + x \geq -8$$

$$y + x + 8 + y - x - 8 = 16$$

$$y + x + 8 - y + x - 8 = 16 \quad y = 0$$

$$-y - x - 8 - y + x - 8 = 16$$

$$y + x + 8 \leq 0$$

$$y - x + 8 \geq 0$$

$$y + x + 8 \leq y - x + 8$$

$$2x \leq 0$$

$$x \leq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①

$$7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \text{всего чисел.}$$

$$4900 = 7^2 \cdot 100 = 7 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 25 = 7^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$

$$\begin{aligned} & (7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1) = \\ & (7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1) = \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 56 \\ \times 6 \\ \hline 336 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 36 \\ \times 7 \\ \hline 252 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 7 \cdot 1 = \\ 2 \cdot 1 = 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \\ & = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^4} = \end{aligned}$$

②

$$\frac{b_1 + q^{n-1} \cdot b_1}{q^n - 1} = \frac{1 + 9}{2} = 5$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad 3 \quad 9 \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 = 16 \\ & = 60 \cdot 56 = 3360 \end{aligned}$$

$$S_3 = S - S_1 = \frac{29(6^3 - 1)}{3n - 1}$$

$$= 1 + 2 + 160 = 1763$$

$$b_1 + qb_1 + q^2b_1 = b_1(1 + q + q^2) = 1 \cdot (1 + 3 + 9)$$

$$S_n = \frac{1 + 3^n - 1}{2}$$

$$S = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot 26}{2} = 13$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \\ b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \\ S = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \end{array}$$

$$S_n = \frac{b_1(q^{3n} - 1)}{3n - 1}$$

$$S_3 = 6$$

$$S_n = \frac{b_1(q^{2n} - 1)}{2n - 1}$$

$$② \quad S = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + 40 \cdot \frac{b_3(q^{8n} - 1)}{3n - 1}$$

$$③ \quad \left(\frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$-64 \cdot 4 + 64 \cdot x^3 - 64x + 200 = 0$$

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{x+10}{5+2} \right)$$

$$x(x-8)(x+8) = -200$$

$$y \neq -10$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 16 \\ \times 8 \\ \hline 128 \\ 128 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 6x - 40 \quad | \quad x+10 \\ -x^2 + 10x \\ \hline -4x - 40 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & x^3 - 64x + 200 = 25(x-4)^2 \\ & x^3 - 64x + 200 = 25x^2 + 200 + 16 \end{aligned}$$

$$64 = 8 \cdot 8 + 42$$

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$128$$

$$8 - 32 + 72 = 0$$

$$10 - 27 - 8 \cdot 9 + 72$$

$$125 - 8 \cdot 25 + 72 = -22$$

$$100 + 128 - 384$$

$$9 - 25 \cdot 9 - 64 \cdot 3 + 384$$

$$-244 + 252 + 384$$

$$4x^2 + x^2 + 4x - 5x^2 / x + 2 / + 4 \geq 0.$$

$$x \geq -2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0.$$

$$4x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0.$$

$$4x^2(x^2-1) - 4x^2(x+1) + 4(x+1) \geq 0$$

$$(4x^2(x-1) - 4x^2 + 4)(x+1) \geq 0$$

$$(4x^2(x-1) + 4(x^2-1)(x+1)) / (x+1) = 0$$

$$(x^2 - 1) \left(4x^2 - 4x - 4 \right) = 0.$$

$$4(x-1)(x+1)(x^2-x-1) = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$-2 - 32 + 31$$

$$r = 22 + 72$$

$$-2 + \dots + 7$$

84-8.16
128.

3

~~216~~

$$36.6 - 36.2 + 12 = 0$$

$$4 \cancel{x^8} \\ (x-1)(x^2$$

$$(x-6)/(x^2-2x-12) =$$

$$= x^3 - 2x^2 - 12x -$$

$$-6x^2 + 12x - 72$$

$$(4x^2 - x - 2) / (x - 2) =$$

$$= 4x^2 - x^2 - 2x - 8x^2 + 2x + 4$$