

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

- † 1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
- † 3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
- * 4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

†

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

W1

$4900 = 7^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2$, но есть 4900 это произведение 6 простых чисел, а т.к. нам нужно 9-значное число, как к числу 6 цифрам нужно еще 2 единицы. У нас есть набор из 2 цифрок, 2 пятёрок, 2 двоек и двух единиц. На 1 место можно поставить 8 раз цифру, на 2-е всего 7. И так далее. У нас у нас $8!$ вариантов, но т.к. у нас цифры повторяются, ~~то~~ $8!$ вариантов делится на факториалы чисел. т.е. у нас 4 пары одинаковых цифр, но ~~такое~~ число равно $\frac{8!}{2^4} =$

$$= 2520$$

Ответ: 2520

W3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+10}{\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4) \Leftrightarrow$$

(2) $\begin{cases} x \geq -10 \\ \sqrt{x^3 - 64x + 200} = \sqrt{2}(x-4) \end{cases}$ при $x = -10$ $\sqrt{x^3 - 64x + 200} < 0$, но есть $x = -10$ не может подходить.

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = \sqrt{2}(x-4) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}(x-4) \geq 0 \\ x^3 - 64x + 200 = 2x^2 - 8x + 128 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^3 - 2x^2 - 56x + 128 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ (x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x = 6 \\ x = 1 \pm \sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 1 + \sqrt{13} \end{cases}$$

Ответ: $x = 6$; $x = 1 + \sqrt{13}$

W4

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 |x+2| + 4 \geq 0$$

$$|x+2|^2 - 5x^2 |x+2| + 4x^4 \geq 0$$

$$1) |x+2|^2 - 5x^2 |x+2| + 4x^4 = 0$$

$$D = 25x^4 - 16x^4 = 9x^4$$

$$|x+2| = \frac{5x^2 \pm 3x^2}{2} = 4x^2; x^2$$

$$|x+2| = 4x^2 \quad (I)$$

$$(II) |x+2| = x^2 \quad (II)$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x+2 = 4x^2 \\ x \leq -2 \\ -x-2 = 4x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} \\ x \leq -2 \\ 0 = (1-32) = 0 \end{cases} \quad (II)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

II

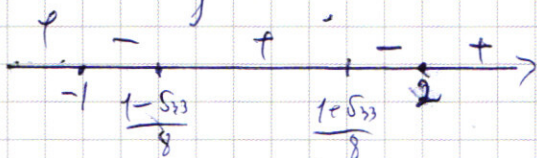
$$|x+2| > x^2 \quad (I)$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x+2 > x^2 \\ x \leq -2 \\ -x-2 > x^2 \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - x - 2 < 0 \\ x \leq -2 \\ x^2 + x + 2 < 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x = 2; -1 \\ x \leq -2 \\ x \in \emptyset \end{cases} \quad (I)$$

$$\Leftrightarrow x = 2; -1$$



$$2) \cancel{(|x+2| - 4x^2)} (|x+2| - x^2) \geq 0$$

$$\text{при } x=10 \quad (12-400)(12-100) \geq 0 \quad (II)$$

$$x \in \cancel{(-\infty, -1]} \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}, \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right] \cup [2, +\infty)$$

W7

$$|y+x+8| + |y-x+8| = 16 \quad (I)$$

$$(x-15)^2 + (y-8)^2 = 9 \quad (II)$$

$$(1) I \begin{cases} y+x \geq -8 \\ y-x \geq -8 \\ y+x+8+y-x+8=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+x \geq -8 \\ y-x \geq -8 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-8; 8] \\ y=0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$II \begin{cases} y+x \geq -8 \\ y-x \leq -8 \\ y+x-8-y+x-8=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+x \geq -8 \\ y-x \leq -8 \\ x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [-16; 0] \\ x=8 \end{cases}$$

$$III \begin{cases} y+x \leq -8 \\ y-x \geq -8 \\ -y-x-8+y-x+8=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8 \\ y \in [-16; 0] \end{cases}$$

$$IV \begin{cases} y+x \leq -8 \\ y-x \leq -8 \\ -y-x-8-y+x-8=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-8; 8] \\ y=-16 \end{cases}$$

(2) $(x-15)^2 + (y-8)^2 = 9$ — это окружность с $r=3$ и в 4 четвертях:

в I четверти $O_1(15; 8)$

в II четверти $O_2(-15; 8)$

в III четверти $O_3(-15; -8)$ и в IV четверти $O_4(15; -8)$

~~Но~~ (Видно на другой стороне)
Каждая окружность лежит только в одной четверти,

но если максимальный возможный радиус каждой

окружности это 8. Проверим I уравнение. Крайнейшая

Посчитаем от уравнения I уравнения до точек O_1 и O_2

равно 5105 , что больше 8, то есть окружности

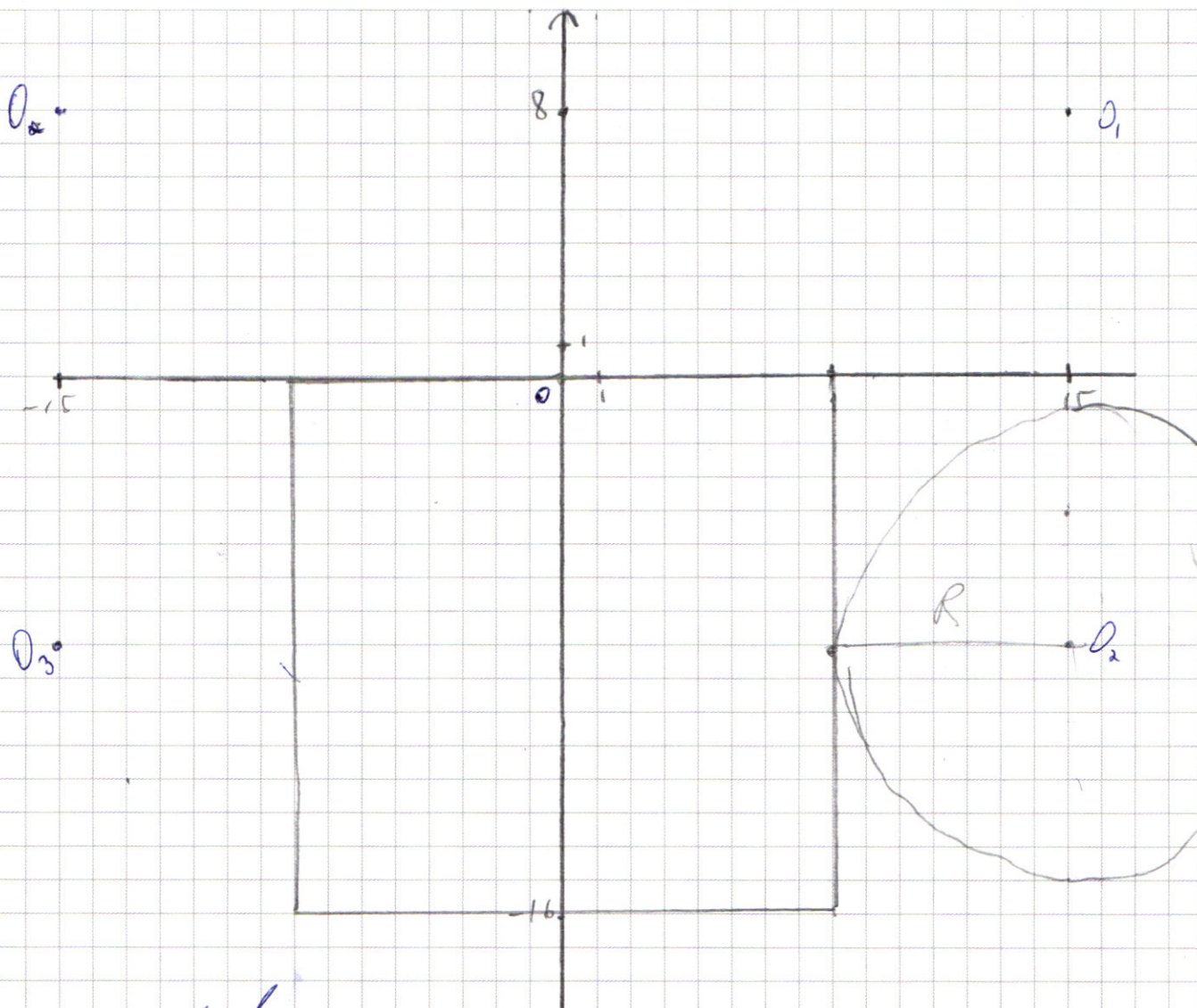
из I и II четвертей не пересекутся с уравнением 1

уравнения и след-но решений не будут.

Окружности из III и IV четвертей могут касаться,

так, и пересечь в 2 точках каждая уравн. 1 ур-я, т.к.

расстояние от O_3 и O_4 равно 8. Но т.к. мы



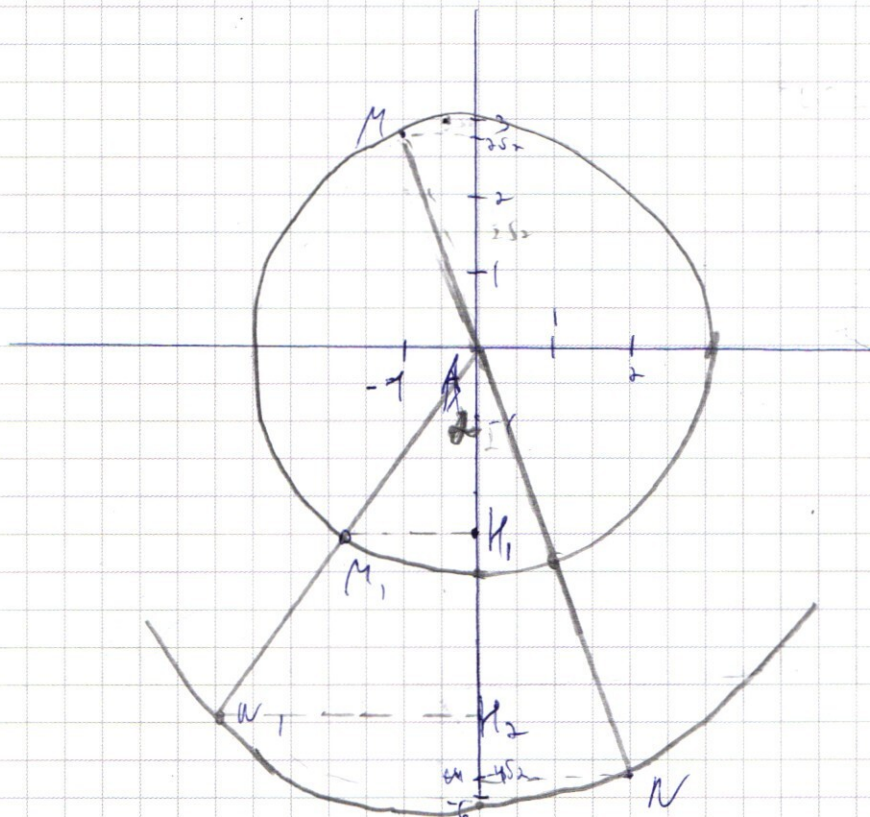
если ~~тогда~~ равно 2 радиуса, а радиусы этих окружностей равны, это будет только тогда, когда они обе касаются графика 1 ур-я, то есть радиус будет 7.

Так. радиус равен $5a$, то $a = 49$.

Ответ: $a = 49$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5



Радиус первой окружности равен $R_1 = \sqrt{1+8} = 3$

Радиус второй окружности равен $R_2 = \sqrt{4+32} = 6$

Кратчайшее расстояние между 2 окружностями
с общим центром равно $R_2 - R_1 = 6 - 3 = 3$

Н.к. расстояние кратчайшее, но отн. к диаметру на
радиусе большой окружности. Пусть это точки M_1 и N_1

$$M_1(x_1, y_1), N_1(x_2, y_2); \begin{cases} \sin \alpha = \frac{M_1 N_1}{R_1} \\ \sin \alpha = \frac{M_1 N_2}{R_2} \end{cases}$$

$$M_1 H_1 = X_1$$

$$M_1 H_2 = X_2$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{X_1}{3} \\ \sin \alpha = \frac{X_2}{6} \end{cases} \Rightarrow X_1 = \frac{X_2}{2}$$

$$\text{Из-за } y_1 = \frac{y_2}{2}$$

ω_1, ω_2 - угловые скорости

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R_1} = \frac{5\sqrt{5}}{3} = \frac{5}{6}\sqrt{5}$$

$$\omega_2 = \frac{v_2}{R_2} = \frac{v}{6}$$

~~или~~

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega_{\text{sum}}$$

Пл. н. ~~или~~ ~~угловая скорость~~ ~~или~~ $\omega_{\text{sum}} = \frac{\pi}{2}$ ~~или~~ $\omega_{\text{sum}} = \frac{\pi}{2}$

$$\omega_{\text{sum}} = \frac{5\sqrt{5}}{6} - \frac{v}{6} = \frac{4v}{6}$$

$$\frac{4v}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$\pi = \frac{8\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$\omega_2 = \frac{v_2}{R_2}$$

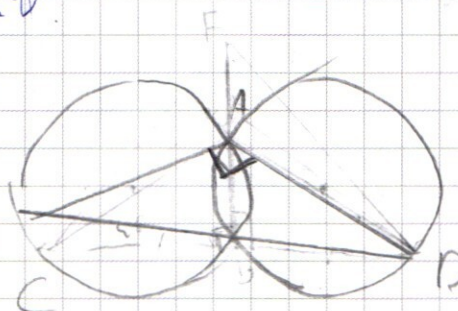
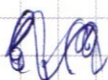
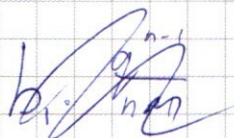
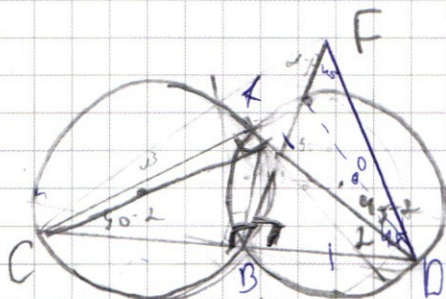
$$\frac{v}{6} = \frac{v_2}{2}$$

$$v_2 = \frac{v}{3} \cdot \frac{2\sqrt{5}\pi}{2\sqrt{5}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha = \alpha_2 - \arcsin \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \alpha_2 \cos(\arcsin \frac{1}{3}) - \sin(\arcsin \frac{1}{3}) \cos \alpha_2 = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos(\arcsin \frac{1}{3}) - \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$S_2 = b_1(q^1 + q^2 + \dots + q^{2559})$$

$$S^2 = 54b_1 \cdot (9^1 \pi - 9^{2539})$$

$$SS = b_1 (40(q^2 + q^5 + \dots + q^{1599}) + q^1 + q^3 + q^4 + \dots + q^{2592})$$

$$5(q^2 + q^5 + \dots + q^{1999}) + 5(q^1 + q^3 + \dots + q^{1999})$$

$$5I_3 + 5I_1 = 40I_3 + I_1$$

$$4f_1 = 35f_3$$

$$q(q^1 + q^3 + \dots + q^{295}) = 35(q^2 + q^5 + \dots + q^{299})$$

$$3 \left(7q^3 + q^5 + \dots + q^{295} \right) / \left(q^2 + q^4 + q^6 + \dots + q^{300} \right) = 6.5$$

$$\sin z = \frac{x_1}{3}$$

$$x_1 = 3 \sin z$$

$$x_1 = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos(\arcsin \frac{1}{3}) - \frac{1}{3} \right)$$

$$x_2 = 3 \sqrt{2} \left(\cos(\arcsin \frac{1}{3}) - \frac{1}{3} \right)$$

$$\cos z = \frac{y_2}{6}$$

$$y_2 = 6 \cos z$$

$$\cos z = \cos z_1 \cos(\arcsin \frac{1}{3}) + \sin z_1 \sin(\arcsin \frac{1}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\arcsin \frac{1}{3}) + \frac{1}{3}$$

$$y_2 = 3\sqrt{2} \left(\cos(\arcsin \frac{1}{3}) + \frac{1}{3} \right)$$

Ответ: $(3\sqrt{2}(\cos(\arcsin \frac{1}{3}) - \frac{1}{3}); 3\sqrt{2}(\cos(\arcsin \frac{1}{3}) + \frac{1}{3}))$

N2

$$S = b_1(q_1 + q_2 + \dots + q^{2555}) = b_1 + b_2 + \dots + b_{2555}$$

$$5S = 5b_1(q_1 + \dots + q^{2555}) = 5(b_1 + b_2 + \dots + b_{2555})$$

$$5S = b_1(40(q_1^4 + q_1^5 + \dots + q^{2555}) + q_1^6 + q_1^7 + q_1^8 + \dots + q^{2558})$$

$$5(b_1 + b_2 + \dots + b_{2555}) = 40(b_3 + b_6 + \dots + b_{2558}) + b_1 + b_2 + b_4 + \dots + b_{2555}$$

$$4S = 3(b_2 + b_4 + \dots + b_{2555}) + b_1 + b_3 + \dots + b_{2555}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{4500} \approx 67$$

$$\frac{700}{7} = 100$$

100 / Kg

20/5

412

$$2 \mid 2$$

111

7 4 разн. цифров.

24. 4. 2024. Членство.

五

7 7 5 5 2 2 4 1 1

Они, а м.к. число восстановлено,
но как можно было ~~было~~ же считать.
Умножить 2 числа, 2 числа,
2 числа, 2 числа.

ка нежеде мило мило момчице.

Задача. На контроле 7. Сдать работу на

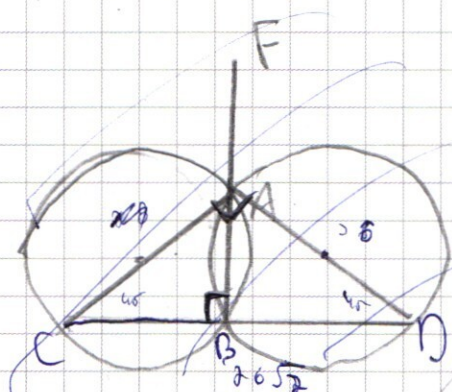
17 24 50 71

1 2 2 2 5 2 7 2

1 5 25 55 75

17 27 57 77

~~8~~ 7 6 5 4 3 2 1



1 2 3 4

$$\frac{26 \cdot 26}{2652} = \frac{26}{52}$$

$$\frac{26^2}{2} + x^2 = 26^2$$

since

$$X_{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6} - ar$$

$$\frac{x}{3} = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 1.5$$

$y_1 =$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{5})}{10}$$

$$\alpha_2 = \frac{100}{6} = 30^\circ$$

$$\angle \frac{F}{8} = \arcsin \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{3}$$

$x_1 = 1.5$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 / |x+2| + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^2 / |x+2| + x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^2 / (x+2) + (x+2)^2 \geq 0$$

$$x \neq -2 \quad D = 25x^4 - 16x^4 = 9x^4$$

$$|x+2| = \frac{5x^2 \pm 3x^2}{2} = x^2, 4x^2$$

$$(x+2) - 4x^2 / (x+2) - x^2 \geq 0$$

$$|x+2| = 4x^2$$

$$x \geq -2$$

$$x+2 = 4x^2$$

$$4x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 32 = 33$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$x < -2$$

$$4x^2 + x + 2 = 0$$

$$D = 1 - 32$$

$$D < 0$$

$$|x+2| = x^2$$

$$x \geq -2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1$$

$$x < -2$$

$$x^2 + x + 2$$

$$D < 0$$

$$x \in \mathbb{R} \quad \frac{5}{6} \cdot \tau$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\tau = \frac{1-\sqrt{33}}{-8} + \frac{1+\sqrt{33}}{8} = \frac{1}{2}$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}, \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty)$$

$$b_1, b_2, \dots, b_{\infty} = S$$

$$S_3 + S_4 = S_5$$

$$b_3 = b_1 \cdot q^2$$

$$b_0 = b_1 \cdot q^5$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$q \neq 0$$

$$\begin{aligned} 5S &= b_1(5q^0 + q^1 + \dots + q^{2009}) \\ 5S &= b_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{2009}) \\ 40(S_3 + S_4) &= 5 \cdot (S_3 + S_4) \\ 40S_3 &= 5S_3 + 4S_4 \\ 35S_3 &= 4S_4 \end{aligned}$$

$$|y+x+8| + |y-x+8| = 16$$

$$\text{I } \begin{cases} y+x \geq -8 \\ y-x \geq -8 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x \geq -8 \\ x \leq 8 \end{cases}$$

$$\text{II } \begin{cases} y+x \geq -8 \\ y-x \leq -8 \\ y+x+8 - y+x-8 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y \geq -16 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{III } \begin{cases} y+x \leq -8 \\ y-x \geq -8 \\ -y-x-8 + y-x+8 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8 \\ y \leq 0 \\ y \geq -16 \end{cases}$$

$$\text{IV } \begin{cases} y+x \leq -8 \\ y-x \leq -8 \\ y-x-8 - y+x-8 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x \geq -8 \\ y = -16 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x}{25} + \frac{58}{52}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\frac{x+10}{25} \sqrt{x^3 - 64x + 200}$$

$$\frac{x+10}{5} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$22 = 3^2 - 2^2$$

$$\left(\frac{x+10}{5} \sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^3 - 8x + 25}\right)^2 = x^2 + 6x - 40$$

$$x^2 - 4x + 10x - 40$$

$$\left(\frac{x+10}{5} \sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^3 - 8x + 25}\right)^2 = (x+10)(x-4)$$

$$\sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^3 - 8x + 25} = x - 4$$

$$x = -10$$

$$x^2 - 8x + 16 = \left(\frac{x}{5}\right)^3 - 8x + 25$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 84x + 128$$

$$x^3 - 8x^2 + 72x - 128 = 0$$

$$x - 4 \geq 0, \quad x \geq 4$$

$$x^3 - 64x + 200 - 8x^2 + 84x - 128 = 0$$

$$x^3 - 8x^2 + 72x - 128 = 0$$

$$6 \cdot 36 - 8 \cdot 36$$

$$-72$$

$$1 + \sqrt{13} > 4$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & -8 & 0 & 72 & \\ \hline 6 & 1 & -2 & -12 & 0 \end{array}$$

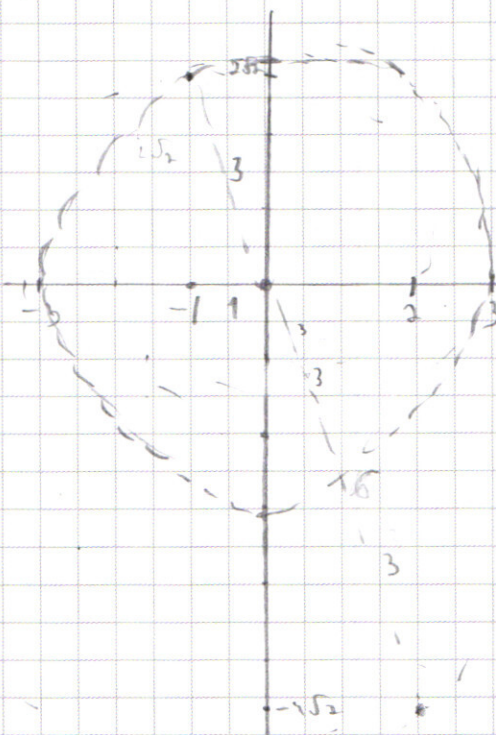
$$(x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0$$

$$x^2 - 2x - 12$$

$$D = 4 + 48 = 52$$

$$1 \pm \sqrt{13}, \quad 6$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{2} = 1 \pm \sqrt{13}$$



$$1/4 \cdot 9 = 9$$

$$r = 3$$

$$4 + 32 = 36$$

$$r = 6$$

k

$$r = 3$$

$$S = 20\pi$$

$$v = 2,5 \pi$$

t

$$t = \frac{20\pi}{2,5\pi} = 8$$

$$= 2,4$$

17

$$r = 6$$

$$12\pi$$

$$v_n = 8$$

$$t_2 = \frac{12\pi}{8} = 1,5$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 9$$

$$x_2^2 + y_2^2 = 36$$

$$180 - 90 - 2 \cdot 45$$

$$45 - 90 + 2 = 2 - 45$$

