МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 11 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [5 баллов] Бросили 80 правильных игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей меньше: того, что эта сумма больше 400, или того, что эта сумма не больше 160?

2. [4 балла] Дана конечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2 \ldots, a_n$ с положительной разностью, причём сумма всех её членов равна S, а $a_1 > 0$. Известно, что если разность прогрессии увеличить в 3 раза, а её первый член оставить неизменным, то сумма S увеличится в 2 раза. А во сколько раз увеличится S, если разность исходной прогрессии увеличить в 4 раза (оставив первый член неизменным)?

3. [4 балла] Решите неравенство $\left(\sqrt{x^3+2x-58}+5\right)\left|x^3-7x^2+13x-3\right| \leqslant 0$.

4. [5 баллов] Решите уравнение $3x^4+x^2-8x-4x^2|x-4|+16=0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(2;2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5;5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет наибольшим.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и пересекает вторично окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{3}{2}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

   б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD=1$.

7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+(y-a)^2=64, \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=100 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{3.}$ $(\sqrt{x^3+2x-58}+5)|x^3-7x^2+13x-3|\leq 0$

Первый множитель положительный $(\sqrt{x^3+2x-58}+5\geq 5>0)$, второй неотрицательный. Если второй множитель не ноль, значит произведение положительно и неравенство невыполнено. Тогда $x^3-7x^2+13x-3=0$, при этом выражение $\sqrt{x^3+2x-58}$ должно иметь смысл

$$\begin{cases} x^3-7x^2+13x-3=0 & (1) \\ x^3+2x-58\geq 0 & (2) \end{cases}$$

(1): Заметим, что $x=3$ – корень данного выражения

$(3^3-7\cdot 3^2+13\cdot 3-3=27-63+39-3=0)$

	1	−7	13	−3
3	1	−4	1	0

(деление $x^3-7x^2+13x-3$ на $x-3$ схемой Горнера)

$(x-3)(x^2-4x+1)=0$

$x^2-4x+1=0$

$D=16-4=12$

$x_{1,2}=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$

Подставим все три значения в (2) и проверим, выполняется ли неравенство (2)

$x=3$: $3^3+2\cdot 3-58=27+6-58=33-58<0$

$x=2-\sqrt{3}$: $0<2-\sqrt{3}<2, \Rightarrow (2-\sqrt{3})^3<2^3;\ 2\cdot(2-\sqrt{3})<2\cdot 2 \Rightarrow$

$(2-\sqrt{3})^3+2\cdot(2-\sqrt{3})-58<2^3+2\cdot 2-58=8+4-58=12-58<0$

$x=2+\sqrt{3}$: $(2+\sqrt{3})^3=8+3\cdot 4\sqrt{3}+3\cdot 2\cdot 3+3\sqrt{3}=26+15\sqrt{3}$

$(2+\sqrt{3})^3+2\cdot(2+\sqrt{3})-58=30+17\sqrt{3}-58=17\sqrt{3}-28.$

Сравним $17\sqrt{3}$ и 28.

$17\sqrt{3} \vee 28$; $17^2\cdot 3 \vee 28^2$; $289\cdot 3 \vee 784$; $867 > 784 \Rightarrow$

$17\sqrt{3} > 28 \Rightarrow 17\sqrt{3} - 28 > 0 \Rightarrow$ (2) выполняется

Ответ: $x = 2+\sqrt{3}$

$\boxed{1.}$ Рассмотрим случайный бросок кости. Пусть выпало k. Поставим в соответствии ему бросок $7-k$ (тогда каждому найдется пара: $1 \leftrightarrow 6$; $2 \leftrightarrow 5$; $3 \leftrightarrow 4$).

Теперь рассмотрим все броски, при которых сумма больше 400.

Каждому такому броску соответствует какой-то бросок с суммой меньше $7\cdot 80 - 400 = 160$ (для установления взаимно однозначного соответствия отдельно возьмем каждую кость и вместо данного значения a выбросим на ней значение $7-a$, тогда между всеми бросками с $\Sigma > 400$ и $\Sigma < 160$ установлено взаимно однозначное соответствие).

Т.е. вероятность выбросить $\Sigma > 400$ равна вероятности выбросить $\Sigma < 160$. Но случаи $\Sigma \leq 160$ включают в себя $\Sigma < 160$ и $\Sigma = 160 \Rightarrow$ их вероятность больше.

Ответ:

Вероятность выбросить сумму больше 400 меньше.

$\boxed{2.}$ $S = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$; $a_n = a_1 + d(n-1) \Rightarrow S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$.

$S = a_1 n + d\frac{(n-1)n}{2}$. По условию $a_1 n + 3d\frac{(n-1)n}{2} = 2\left(a_1 n + d\frac{(n-1)n}{2}\right) \Rightarrow$

$d\frac{(n-1)n}{2} = a_1 n \Rightarrow S = a_1 n + \frac{d(n-1)n}{2} = 2d\frac{(n-1)n}{2} = d(n-1)n$

Пусть S' — сумма при увеличении d в 4 раза

$S' = a_1 n + 4d\frac{(n-1)n}{2} = \underset{(a_1 n)}{d\frac{(n-1)n}{2}} + 2d(n-1)n = \frac{5}{2}d(n-1)n$.

$\frac{S'}{S} = \frac{\frac{5}{2}d(n-1)n}{d(n-1)n} = \frac{5}{2}$ Ответ: в $5/2$ раза

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{4.}$ $3x^4+x^2-8x-4x^2|x-4|+16=0$

$x^2-8x+16+3x^4-4x^2|x-4|=0$

$(x-4)^2+x^2(3x^2-4|x-4|)=0$

Пусть $x\geqslant 4$

$(x-4)^2+x^2(3x^2-4x+16)=0 \quad (1)$

Рассмотрим $3x^2-4x+16$: $D=16-4\cdot16\cdot3<0$, при $x=10$

$3\cdot100-4\cdot10+16=300-40+16>0$

$\Rightarrow x^2(3x^2-4x+16)>0$ ($x^2\neq0$ т. к. мы рассматриваем $x\geqslant4$),

$(x-4)^2\geqslant0 \Rightarrow (x-4)^2+x^2(3x^2-4x+16)>0 \Rightarrow (1)$

решений не имеет

Пусть $x<4$. Рассмотрим начальное ур-ние:

$3x^4+x^2-8x-4x^2|x-4|+16=0$. Т. к. $x<4$, то ур-ние имеет вид:

$3x^4+x^2-8x+4x^3-16x^2+16=0$

$3x^4+4x^3-15x^2-8x+16=0$. Заметим, что $x=1$ - корень

$(3+4-15-8+16=0)$

	3	4	−15	−8	16
1	3	7	−8	−16	0

(деление $3x^4+4x^3-15x^2-8x+16$ на $x-1$ схемой Горнера)

$(x-1)(3x^3+7x^2-8x-16)=0$.

Рассмотрим $3x^3+7x^2-8x-16=0$.

Заметим, что $x=-\frac{4}{3}$ - корень $\left(-\frac{64}{9}+\frac{112}{9}+\frac{32}{3}-16=\right.$

$\left.=\frac{48}{9}+\frac{32}{3}-16=\frac{16}{3}+\frac{32}{3}-16=\frac{48}{3}-16=16-16=0\right)$

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3+7x^2-8x-16 & x+4/3 \\
\cline{2-2}
-\ 3x^3+4x^2 & 3x^2+3x-12 \\
\cline{1-1}
3x^2-8x & \\
-\ 3x^2+4x & \\
\cline{1-1}
-12x-16 & \\
-\ -12x-16 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$3x^3+7x^2-8x-16=(x+4/3)(3x^2+3x-12)$

Рассмотрим $3x^2+3x-12=0$

$x^2+x-4=0.$

$D=1+16=17 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}.$

Итак, корни ур-ния: $1;\ -4/3;\ \dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$ при $x\le 4$.

Т.к. все эти значения меньше 4, они являются решением ур-ния.

Ответ: $x\in\left\{-\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};\ -4/3;\ 1;\ \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right\}$

<u>Примечание</u> Покажем что корни меньше 4.

$1<4\ ;\ -4/3<4\ ;\ \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}<0<4;\ \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}<\dfrac{-1+\sqrt{25}}{2}=2<4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{7}$ $\begin{cases} x^2+(y-a)^2=64 & (1) \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=100 & (2) \end{cases}$

Построим график (2).

(График см. на обратной стороне)

1) $x, y \geq 0$: $(x-6)^2+(y-8)^2=10^2$

2) $x \geq 0, y<0$: $(x-6)^2+(y+8)^2=10^2$ $\left((-y-8)^2=(y+8)^2\right)$

3) $x, y<0$: $(x+6)^2+(y+8)^2=10^2$ (аналогично с пред.)

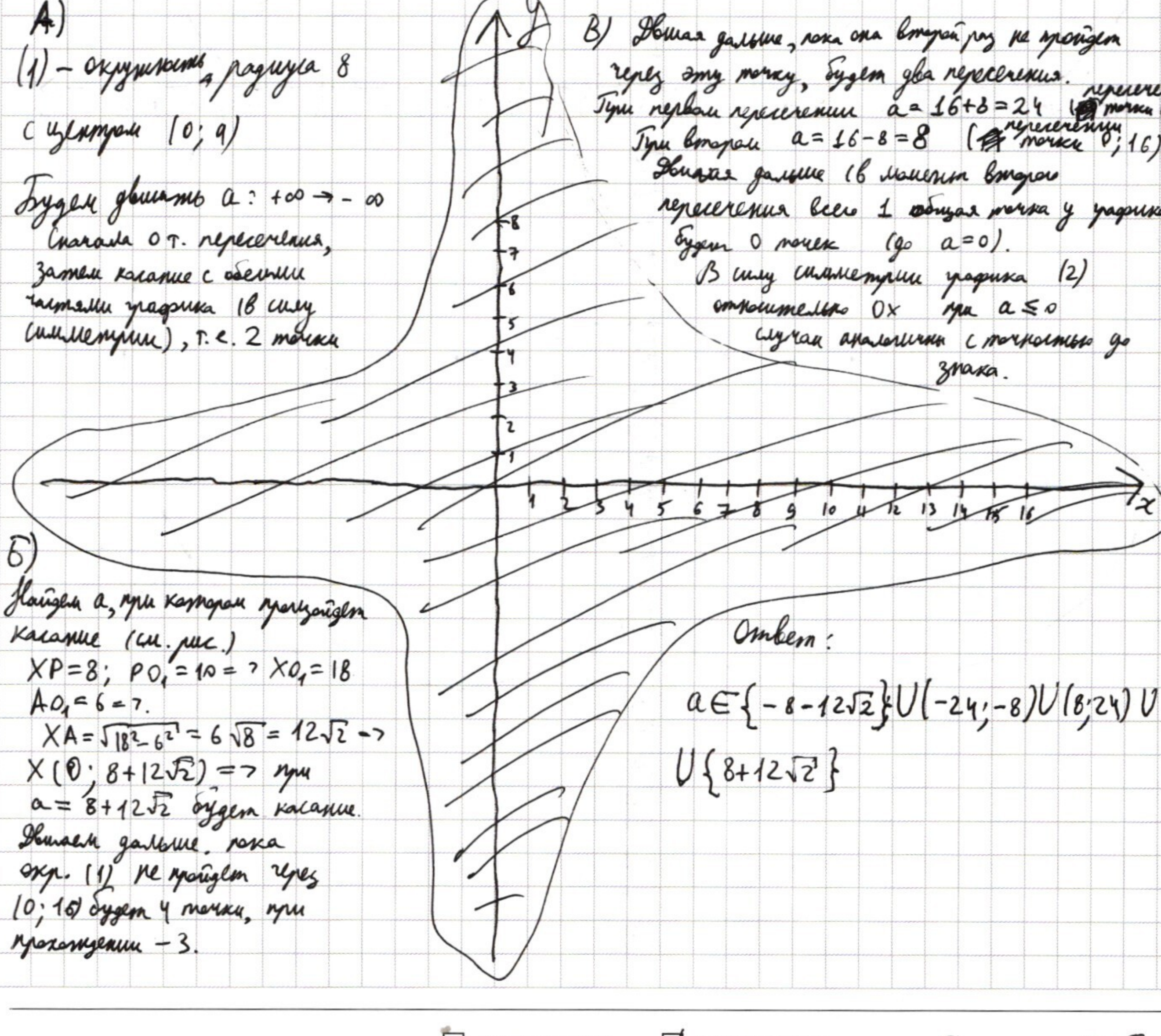
4) $x<0, y>0$ $(x+6)^2+(y-8)^2=10^2$ (аналогично с пред.)

А)

(1) – окружность радиуса 8 с центром $(0; a)$

Будем двигать $a: +\infty \to -\infty$

Сначала 0 т. пересечения, затем касание с обеими частями графика (в силу симметрии), т.е. 2 точки



Б)

Найдем a, при котором произойдет касание (см. рис.)

$XP=8$; $PO_1=10 \Rightarrow XO_1=18$

$AO_1=6 \Rightarrow$

$XA=\sqrt{18^2-6^2}=6\sqrt{8}=12\sqrt{2} \Rightarrow$

$X(0; 8+12\sqrt{2}) \Rightarrow$ при $a=8+12\sqrt{2}$ будет касание.

Двигаем дальше. пока окр. (1) не пройдет через $(0; 16)$ будет 4 точки, при прохождении – 3.

В) Двигая дальше, пока она второй раз не пройдет через эту точку, будет два пересечения.

При первом пересечении $a=16+8=24$ (точки пересечения $(0;16)$)

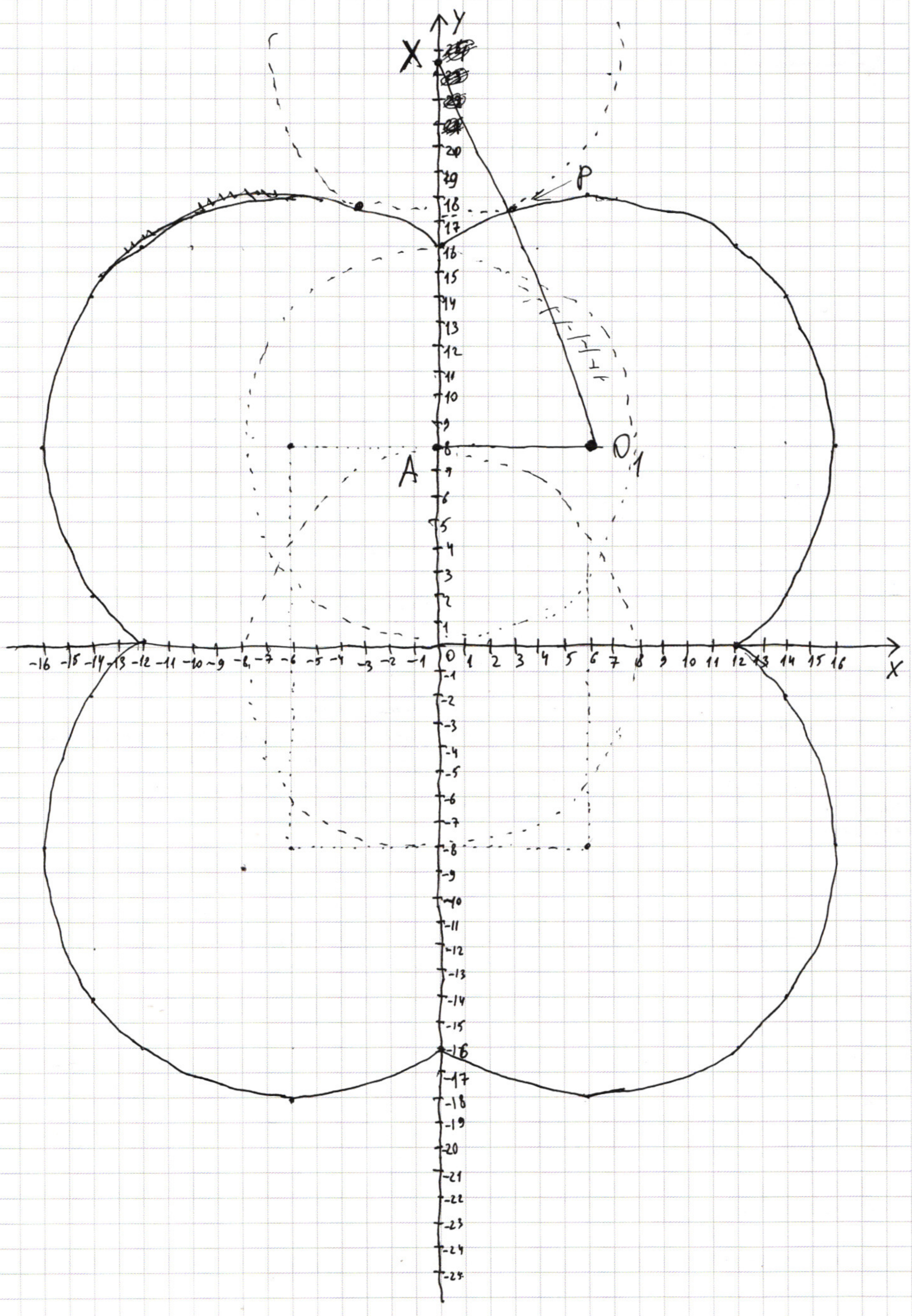
При втором $a=16-8=8$ (точки пересечения $0;16$)

Двигая дальше (в момент второго пересечения всего 1 общая точка у графиков) будет 0 точек (до $a=0$).

В силу симметрии графика (2) относительно Ox при $a \leq 0$ случаи аналогичны с точностью до знака.

Ответ:

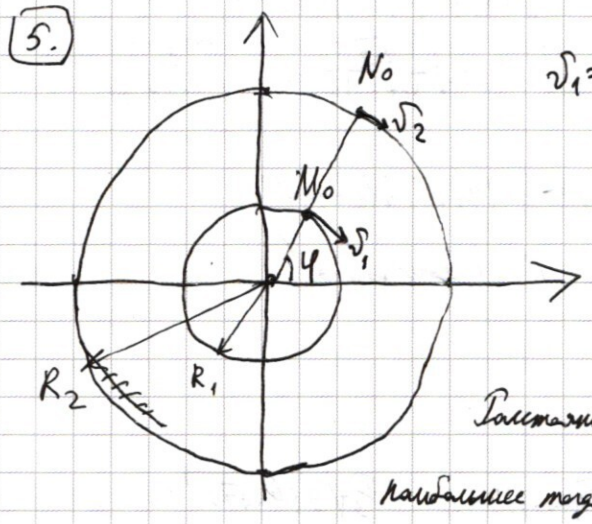
$a \in \{-8-12\sqrt{2}\} \cup (-24; -8) \cup (8; 24) \cup$
$\cup \{8+12\sqrt{2}\}$



y
X
P
A
O
1
x

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.



$v_1 = 2v_2$ $\quad R_1 = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{7})^2} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$

$R_2 = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{7})^2} = 5\sqrt{8} = 10\sqrt{2}$.

Т.к. $\omega R = v \Rightarrow \omega_1 = \frac{v_1}{R_1}$; $\omega_2 = \frac{v_2}{R_2} \Rightarrow$

$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{R_2}{R_1} = 2 \cdot \frac{10\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 5. \Rightarrow \omega_1 = 5\omega_2$

Расстояние между водомеркой и жуком будет наибольшее тогда, когда они будут лежать на одной прямой с $(0;0)$, причем по разные стороны от нее. $\alpha_1 = \omega_1 t$; $\alpha_2 = \omega_2 t \Rightarrow$.

$\alpha_1 - \alpha_2 = \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\omega_1 - \omega_2)t = \pi(2k+1) \Rightarrow$

$4\omega_2 t = \pi(2k+1) = 4\alpha_2 = \pi(2k+1) \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, где α_1, α_2 — угол поворота при движении водомерки и жука ~~[illegible]~~ с начала (M_0 и N_0) соответственно. $k=0$: $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $k=1$: $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; $k=2$: $\frac{5\pi}{4}$; $k=3$: $\alpha = \frac{7\pi}{4}$

При $k > 3$ $\quad k = 4m + n \Rightarrow \alpha = 2\pi l + \frac{\pi}{4}(2n+1) \underset{2\pi}{\equiv} \frac{\pi}{4}(2n+1)$, т.е. точки совпадают

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{5\sqrt{7}}{5} \Rightarrow$

$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{7}$; $\operatorname{tg}(\varphi - \frac{\pi}{4}) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{7}-1}{1+\sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{7}-1)^2}{\sqrt{7}^2 - 1^2} = \frac{(\sqrt{7}-1)^2}{6} = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$

Пусть точки A, B, C, D — точки, в которых жук оказался после поворота на $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ соответственно. $A(x_a; y_a)$, причем

$\sqrt{x_a^2 + y_a^2} = R_2 = 10\sqrt{2}$; $\operatorname{tg}(\varphi - \frac{\pi}{4}) = \frac{y_a}{x_a} \Rightarrow y_a = \frac{(\sqrt{7}-1)^2}{6} x_a \Rightarrow$.

$\sqrt{x_a^2\left(1 + \left(\frac{8-2\sqrt{7}}{6}\right)^2\right)} = 10\sqrt{2}$; $\quad x_a = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^2}} = 10\sqrt{\frac{2\cdot 9}{9+(4-\sqrt{7})^2}} =$

$= 10\sqrt{\frac{18}{32-8\sqrt{7}}} = 10\sqrt{\frac{9}{16-4\sqrt{7}}} = 30\sqrt{\frac{16+4\sqrt{7}}{16\cdot 9}} = \frac{5}{2}\sqrt{16+4\sqrt{7}}$

$y_a = \frac{5}{6}(4-\sqrt{7})\sqrt{16+4\sqrt{7}}$

$A\left(\frac{5}{2}\sqrt{16+4\sqrt{7}};\ \frac{5}{6}(4-\sqrt{7})\sqrt{16+4\sqrt{7}}\right)$. Точка A получается при повороте на $\frac{\pi}{4}$, а C – на $\frac{5\pi}{4}$, т.е. A и C – противоположны. $\Rightarrow C\left(-\frac{5}{2}\sqrt{16+4\sqrt{7}};\ -\frac{5}{6}(4-\sqrt{7})\sqrt{16+4\sqrt{7}}\right)$

$$tg\left(\varphi-\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{tg\,\varphi-tg\frac{3\pi}{4}}{1+tg\,\varphi\, tg\frac{3\pi}{4}}=\frac{\sqrt{7}+1}{1-\sqrt{7}}=-\frac{(\sqrt{7}+1)^2}{6}=-\frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

$tg\left(\varphi-\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{y_B}{x_B}$ и $\sqrt{x_B^2+y_B^2}=R_2=10\sqrt{2}$ $\Rightarrow \sqrt{x_B^2+x_B^2\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^2}=10\sqrt{2}\Rightarrow$

$y_B=x_B\left(-\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$ (т.к. $x_B>0$) $x_B=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^2}}=10\sqrt{\frac{2\cdot 9}{9+(4+\sqrt{7})^2}}=10\sqrt{\frac{2\cdot 9}{32+8\sqrt{7}}}=10\sqrt{\frac{9}{16+4\sqrt{7}}}=$

$=30\sqrt{\frac{16-4\sqrt{7}}{16^2-(4\sqrt{7})^2}}=30\sqrt{\frac{16-4\sqrt{7}}{16\cdot 9}}=\frac{5}{2}\sqrt{16-4\sqrt{7}};\ y_B=-\frac{5}{6}(4+\sqrt{7})\sqrt{16-4\sqrt{7}}$

$B\left(\frac{5}{2}\sqrt{16-4\sqrt{7}};-\frac{5}{6}(4+\sqrt{7})\sqrt{16-4\sqrt{7}}\right)$. ~~Упростим в~~ Т.к. B получается поворотом на $\frac{3\pi}{4}$, а D – на $\frac{7\pi}{4}$, то $D(-x_B;-y_B)$

Упростим вид. A и C:

$\frac{5}{2}\sqrt{16+4\sqrt{7}}=5\sqrt{4+\sqrt{7}};\ \frac{5}{6}(4-\sqrt{7})\sqrt{16+4\sqrt{7}}=\frac{5}{3}\sqrt{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})^2}=\frac{5}{3}\sqrt{9(4-\sqrt{7})}=$

$=5\sqrt{4-\sqrt{7}}$. Тогда $A(5\sqrt{4+\sqrt{7}};5\sqrt{4-\sqrt{7}})$, а $C(-x_A;-y_A)$:

$C(-5\sqrt{4+\sqrt{7}};-5\sqrt{4-\sqrt{7}})$

Упростим вид B и D:

$\frac{5}{2}\sqrt{16-4\sqrt{7}}=5\sqrt{4-\sqrt{7}};\ \frac{5}{6}(4+\sqrt{7})\sqrt{16-4\sqrt{7}}=\frac{5}{3}\sqrt{(4+\sqrt{7})^2(4-\sqrt{7})}=\frac{5}{3}\sqrt{9(4+\sqrt{7})}=5\sqrt{4+\sqrt{7}}$

Тогда $B(5\sqrt{4-\sqrt{7}};-5\sqrt{4+\sqrt{7}})$. Т.к. $D(-x_B;-y_B)$:

$D(-5\sqrt{4-\sqrt{7}};5\sqrt{4+\sqrt{7}})$

Ответ: $A(5\sqrt{4+\sqrt{7}};5\sqrt{4-\sqrt{7}})$

$B(5\sqrt{4-\sqrt{7}};-5\sqrt{4+\sqrt{7}})$

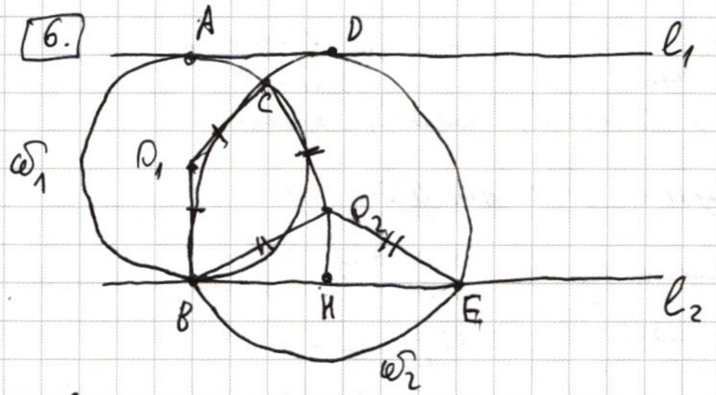
$C(-5\sqrt{4+\sqrt{7}};-5\sqrt{4-\sqrt{7}})$

$D(-5\sqrt{4-\sqrt{7}};5\sqrt{4+\sqrt{7}})$

Примечание. $x_B>0$, т.к. при повороте из I четверти по часовой стрелке на $\frac{3\pi}{4}$ жук окажется либо в IV, либо в III четверти. Но $tg\left(\varphi-\frac{3\pi}{4}\right)<0\Rightarrow$ четверть – IV, $\Rightarrow x_B>0$.

2-е примечание к этой задаче на стр. 10

6.



Из ω_1: $O_1B = O_1C$; из ω_2: $O_2C = O_2B \Rightarrow \triangle O_1BO_2 = \triangle O_1CO_2$

Проведем $O_2H \perp BE$ $(H \in BE)$

$\triangle BO_2E$ — равнобедренный ($BO_2 = O_2E$ из ω_2), $\Rightarrow$ высота O_2H является медианой $\Rightarrow \triangle BO_2H = \triangle EO_2H$. Тогда

$$\frac{3}{2} = \frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}} = \frac{2S_{BO_1O_2}}{2S_{BO_2H}} = \frac{S_{BO_1O_2}}{S_{BO_2H}}$$

$O_1B \perp l_2$ из касания. В трапеции O_1BHO_2 высота, опущенная из O_2 равна высоте, опущенной из $H \Rightarrow S_{O_1O_2B} = \frac{1}{2} \cdot O_1B \cdot BH$.

$$\frac{3}{2} = \frac{S_{BO_1O_2}}{S_{BO_2H}} = \frac{\frac{1}{2} O_1B \cdot BH}{\frac{1}{2} \cdot BH \cdot O_2H} = \frac{O_1B}{O_2H} \Rightarrow O_2H = \frac{2}{3} O_1B.$$

$$O_2D = DH - O_2H = AB - O_2H = 2O_1B - \frac{2}{3}O_1B = \frac{4}{3}O_1B \Rightarrow \frac{O_2D}{O_1B} = \frac{4}{3}, \text{ но}$$

⊛ $\frac{O_2D}{O_1B}$ — отношение радиусов ω_2 и ω_1

⊛ $O_1A \perp l_1$ и $O_1B \perp l_2$ из касания, $\Rightarrow A, O_1, B$ лежат на одной прямой. $\Rightarrow AB \perp l_1$ и l_2

Аналогично из $O_2H \perp l_2$ и $O_2D \perp l_1 \Rightarrow DH \perp l_1$ и $l_2 \Rightarrow ABHD$ — прямоугольник $\Rightarrow$ $AB = DH$

Ответ: $4/3$

Пусть $BO_1 = 3x \Rightarrow O_2H = 2x$ и $O_2D = 4x = BO_2$. Из $\triangle BO_2H$: $BH = \sqrt{BO_2^2 - O_2H^2} =$ $(\angle BHO_2 = 90^\circ)$ $= \sqrt{(4x)^2 - (2x)^2} = 2\sqrt{3}x$. В $\triangle BHD$: $(\angle BHD = 90^\circ$, см. ⊛$)$ $BH^2 + HD^2 = BD^2 \Rightarrow$

$$(2\sqrt{3}x)^2 + (2x+4x)^2 = 1^2 \Rightarrow 12x^2 + 36x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{48}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$ (т.к. $x > 0$)

Тогда $O_1B = 3x = \sqrt{3}/4$ и $O_2D = 4x = 1/\sqrt{3}$

Ответ: $\sqrt{3}/4$ и $1/\sqrt{3}$

2-е примечание к задаче 5.

Мы рассматривали движение по часовой стрелке. Пусть жук повернулся на $\pi/4$ => водомерка на $5\pi/4$. Если рассматривать это же направление угла и движение уже против часовой стрелки, то жук повернется на $-\pi/4 \equiv 7\pi/4$, а водомерка на $-5\pi/4 \equiv 3\pi/4$, но случай с поворотом на $7\pi/4$ и $3\pi/4$ был рассмотрен в решении. Таким образом можно заметить, что смена движения по часовой на движение против часовой стрелки меняет лишь знак поворота. Т.е. при движении по часовой в случаях поворота на $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $7\pi/4$ мы должны были рассматривать $-\pi/4$, $-3\pi/4$, $-5\pi/4$, $-7\pi/4$, т.е. $7\pi/4$, $5\pi/4$, $3\pi/4$, $\pi/4$. Но эти случаи аналогичны рассмотренным.

Таким образом точки, полученные в результате рассматривания движения по часовой стрелки не отличаются от точек, которые мы получили бы, рассматривая движение против часовой.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\left(\underbrace{\sqrt{x^3+2x-68}+5}_{\geq 0}\right)\underbrace{|x^3-7x^2+13x-3|}_{\geq 0}\leq 0$

$17 \cdot 17$: 119, 17

$x^3-7x^2+13x-3=0$

$\cancel{8-28+26-3}$

$27-63+39-3$

$x=3$

$28 \cdot 28 = 784$

x^3-7

$(30-2)^2=900+4-120=$

$(300-11)\cdot 3=900-33=867$

$289 \cdot 3 = 867$

$S=a_1+a_2+\ldots+a_n$

$S=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n = na_1+d\,\frac{n(n-1)}{2}$

$3d\,\frac{n(n-1)}{2}+na_1=2\left(na_1+d\,\frac{n(n-1)}{2}\right)$

$d\,\frac{n(n-1)}{2}=na_1.$

$3,\ \cancel{6},\ 11$

$3,\ 6,\ 9.$ $\quad\Sigma=18$

$3,\ 12,\ 21$ $\quad 36.$

$3,\ 9,\ 15$ $\quad \Sigma=27$

$3,\ 15,\ 27$ $\quad 45$

$\frac{45}{18}=2{,}5.$

$-\frac{4}{3}$

$16 \cdot 7 = 112$

$3x^4+x^2-8x-4x^2|x-4|+16=0.$

$(x^2-8x+16)+3x^4-4x^2|x-4|=0.$

$\underbrace{(x-4)^2}_{\geq 0}+\underbrace{x^2(3x^2-4|x-4|)}_{\geq 0}=0$

1) $x=4$ – нет

2) $x\geq 4.$

$3x^2-4x+4$

$D=16-16\cdot 3<0.$

3) $x<4$

$(x-4)^2+x^2(3x^2+4x-16)=0$

$3x^4+x^2-8x+4x^3-16x^2+16=0.$

$3x^4+4x^3-15x^2-8x+16=0$

	3	4	−15	−8	16
$x=1$	3	7	−8	−16	0.

$3x^3+7x^2-8x-16$

$\cancel{-8+28}$ $\cancel{24+28-16-16}$

$-81+63+24-16=$

$=87-97.$

$\frac{8}{3}-\frac{1}{9}+\frac{7}{9}$

$-\frac{8}{9}+\frac{28}{9}+\frac{16}{3}=$

$=-\frac{64}{9}+\frac{112}{9}+\frac{32}{3}-16$

$\frac{1}{9}+\frac{7}{9}-\frac{28}{9}-16$

$-\frac{8}{9}+\frac{28}{9}=$

$\cancel{8-24}$

112, 64, $48.$

$$3x^4+x^2-8x-4x^2|x-4|+16=0.$$

$$x^2\left(3x^2-4|x-4|\right)+(x-4)^2=0.$$

$x\geq 4.$

$$x^2(3x^2-4x+16)+(x-4)^2=0.$$

$x<4$

$$x^2(3x^2+4x-16)+(x-4)^2.$$

$D=16+\ldots=4+48=52$

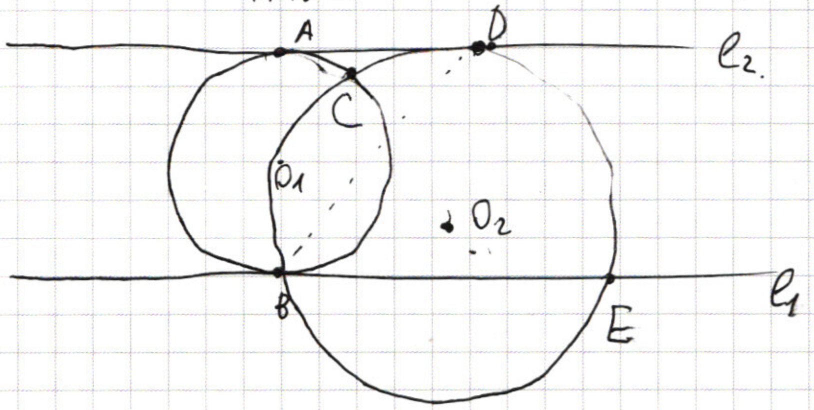
$$3t^2=3x^2-12x+12.$$

$$t^2=x^2-4x+4$$

$x-2=t.$ $\quad +16x-28.$

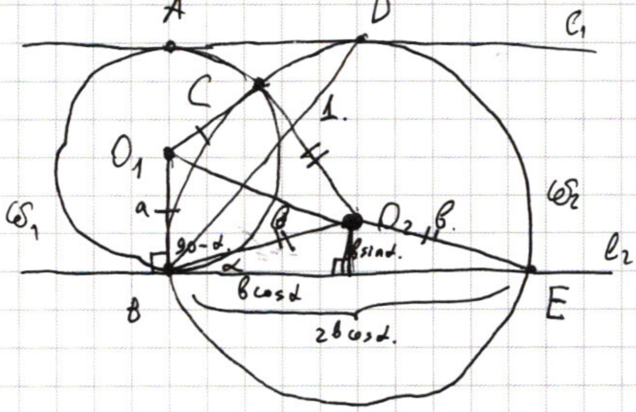
$$(t+2)^2(3t^2+16t+4)+(t-2)^2=0$$

$D_1=16-$



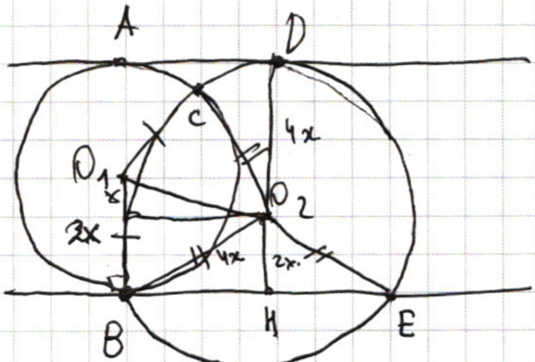
$$3x^3+7x^2-8x-16 \;\Big|\; x+4/3$$

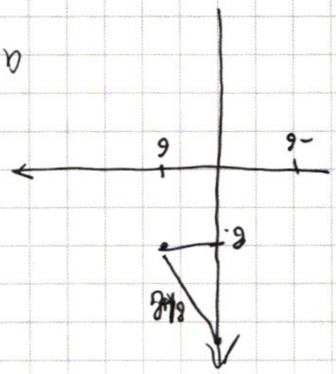
$$3x^2+3x-12.$$

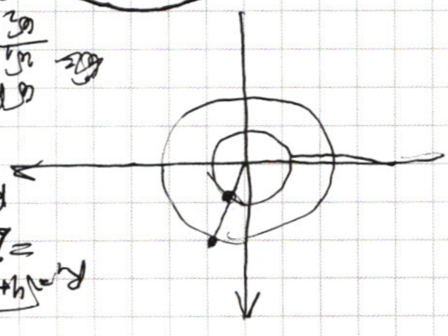


$$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}}=\frac{3}{2}.$$

$$S_{BO_1O_2C}=ab\sin(90^\circ-\alpha)$$







$x, y\geq 0$: $(x-6)^2+(y-8)^2=10^2$

$x\geq 0, y<0$: $(x-6)^2+(y+8)^2=10^2$

$x, y<0$: $(x+6)^2+(y+8)^2=10^2$

$x<0, y\geq 0$: $(x+6)^2+(y-8)^2=10^2$

6; 8

6; −8

−6; −8