

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200}} = x^2 + 6x - 40$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40 \quad \left| : \frac{x+10}{2\sqrt{2}} \right. \quad \begin{array}{l} x \neq -10, \text{ т.к. } x^3 - 64x + 200 \geq 0 \\ \text{При } x = -10 \quad -1000 + 640 + 200 \geq 0 - \text{ неверно} \end{array}$$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = \frac{(x^2 + 6x - 40) \cdot 2\sqrt{2}}{x+10}$$

$$x^3 - 64x + 200 = \frac{(x^2 + 6x - 40)^2 \cdot 8}{(x+10)^2}, \text{ где}$$

$$x^3 - 64x + 200 = \frac{(x-4)^2 \cdot (x+10)^2 \cdot 8}{(x+10)^2}$$

$$x^3 - 64x + 200 - 8(x^2 - 8x + 16) = 0$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0 \quad \begin{array}{r|rrrr} 1 & -8 & 0 & 72 \\ 6 & 1 & -2 & -12 & 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ x = 1 + \sqrt{13} \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$D = 4 + 48 = 52$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{13} \\ x = 1 - \sqrt{13} - \text{не подходит} \end{cases}$$

$$\frac{x^2 + 6x - 40}{x+10} \geq 0$$

$$\frac{(x-4)(x+10)}{x+10} \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x \neq -10 \end{cases}$$

$$x \geq 4.$$

$$\begin{array}{l} x^2 + 6x - 40 = 0 \\ D = 36 + 160 = 196 = 14^2 \end{array}$$

$$x = \frac{-6 \pm 14}{2}$$

$$\begin{cases} x = -10 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 1 + \sqrt{13} > 4 \\ \sqrt{13} > 3 \\ \sqrt{13} > \sqrt{9} \end{array}$$

Ответ: $1 + \sqrt{13}; 6$.

12. Сумма геометрической прогрессии изначально: $S_1 = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$

Сумма геометрической прогрессии, состоящей из членов с номерами, кратными 3:

$$S_2 = \frac{b_3(q^{3 \cdot 1000} - 1)}{q^3 - 1} \quad (q_{\text{прогрессии}} = q^3, \text{ а членов прогрессии } 1000)$$

Сумма геометрической прогрессии, состоящей из членов с номерами, кратными 2:

$$S_3 = \frac{b_2(q^{2 \cdot 1500} - 1)}{q^2 - 1} \quad (q_{\text{прогрессии}} = q^2, \text{ а членов прогрессии } 1500)$$

Тогда:

$$\frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} - \frac{b_3(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} + \frac{40b_3(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{5b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$\frac{39b_3}{q^3 - 1} = \frac{4b_1}{q - 1}$$

$$39b_3(q - 1) = 4b_1(q^3 - 1) \quad b_3 = b_1q^2$$

$$39q^2(q - 1) = 4(q - 1)(q^2 + q + 1)$$

$$39q^2 - 4q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$35q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$D = 16 + 16 \cdot 35 = 16 \cdot 36 = (4 \cdot 6)^2$$

$$q = \frac{4 \pm 24}{70} \quad q = \frac{14}{35}, \text{ т.к. } q > 0 \text{ по условию (все множители)} \quad \text{т.к. } q > 0 \text{ по условию (все множители)}$$

Тогда:

$$\frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} - \frac{b_2(q^{3000} - 1)}{q^{32} - 1} + \frac{3b_2(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{x b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$\frac{2b_2}{q^2 - 1} = \frac{(x - 1)b_1}{q - 1}$$

$$2b_2(q - 1) = (x - 1)b_1(q^2 - 1) \quad b_2 = b_1q$$

$$2q = (x - 1)(q + 1)$$

$$\frac{28}{35} = (x - 1) \cdot \frac{49}{35}$$

$$x - 1 = \frac{28}{49}$$

$$x = \frac{4}{7} + 1$$

$$x = \frac{11}{7}$$

Ответ: S увеличится в $\frac{11}{7}$ раза.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Разложить 4900 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 4900 & 2 \\ \hline 2450 & 2 \\ \hline 1225 & 5 \\ \hline 245 & 5 \\ \hline 49 & 7 \\ \hline 7 & 7 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Это значит, что восьмизначное число, произведение

цифр которого равно 4900 состоит из цифр

цифр: 1) 1 1 2 2 5 5 7 7

2) 1 1 1 4 5 5 7 7

Для первого случая вариантов: ~~1111~~ $\frac{8!}{4 \cdot 2!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3$

Для второго случая вариантов: $\frac{8!}{2 \cdot 2! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

Всего чисел: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 48 \cdot 35 \cdot 4 = 48 \cdot 140 = 6720$

Ответ: 6720 чисел.

$$\sqrt{7}(|y+x+8|+|y-x+8|)=16$$

$$(x-15)^2+(y-8)^2=a$$

$$(x-15)^2+(y-8)^2=a$$

График окружности, радиусом $\sqrt{a}$ и центром в точке

- 1) (15; 8)
- 2) (-15; -8)
- 3) (15; -8)
- 4) (-15; 8)

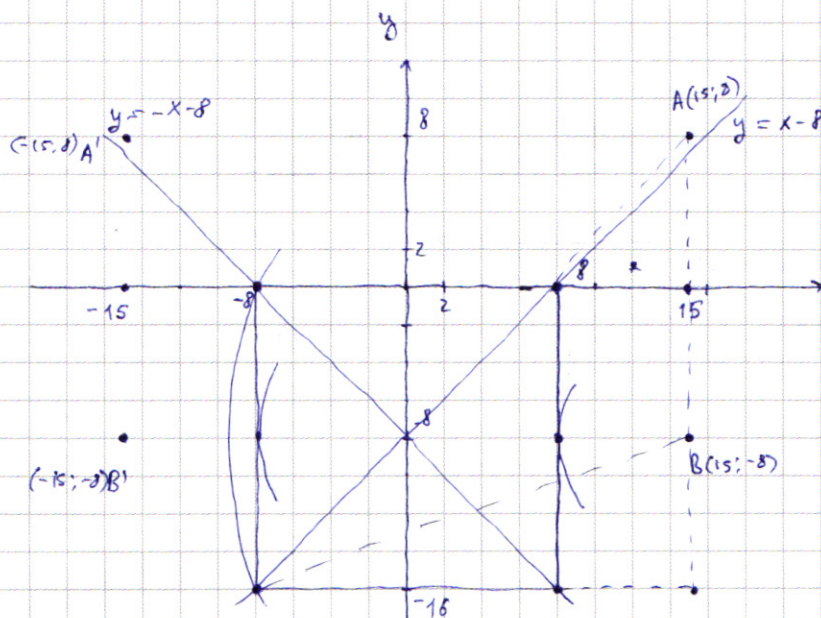
$$|y+x+8|+|y-x+8|=16$$

$$1) \begin{cases} y > -x-8 \\ y > x-8 \end{cases}, \text{ то } y=0$$

$$2) \text{ Если } \begin{cases} y > -x-8 \\ y \leq x-8 \end{cases}, \text{ то } x=8$$

$$3) \text{ Если } \begin{cases} y \leq -x-8 \\ y > x-8 \end{cases}, \text{ то } x=-8$$

$$4) \text{ Если } \begin{cases} y \leq -x-8 \\ y \leq x-8 \end{cases}, \text{ то } y=-16$$



~~Две точки A и B' знамен
будут такими же как
и в точке A и B.~~

Две точки A' и B' знамен
будут такими же как и в точке A и B.

1) Для точки A: окружность будет иметь с квадратом одну общую точку при a , равном:

$$1) \sqrt{a} = \sqrt{8^2+7^2} \quad a=113$$

$$2) \sqrt{a} = \sqrt{(16+7)^2+(16+8)^2} \quad a=1105$$

$$a \in (113; 1105)$$

2) Для точки B: окружность имеет с квадратом одну общую точку при $a=49$

$$\text{Три общ. точки при } a = (16+7)^2 = 529$$

$$\text{Четыре общ. точки при } a \in (529; 593)$$

$$a = 8^2+23^2 = 593$$

$$\text{Две общ. точки при } a \in (49; 529) \cup \{593\}$$

$$a=113$$

$$a \in (113; 1105)$$

$$a=593$$

$$a > 49$$

$$a \leq 529$$

Получим также подходящие значения A и a , при которых в точке B одно значение, а в точке A 0, либо когда в точке A одно значение, а в точке B 0. (Т.е. где точки A' и B' значения одинаковы).

1) В точке B одно значение при

$$a=49, \text{ в точке A при этом значение нет}$$

2) В точке A одно значение при

$$a=113$$

$$a=1105. \text{ При } a=1105 \text{ в точке B одно значение нет.}$$

Значит система имеет ровно два решения при $a=49$ и $a=1105$.

Ответ: 49; 1105.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

Дано:

$$\omega_1 = \omega_2, r = 13$$

$$\omega_1 \cap \omega_2 \text{ в } A \text{ и } B$$

$$CE \in \omega_1, DE \in \omega_2$$

$$B \in CD$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$FB \perp CD$$

$$BF = BD$$

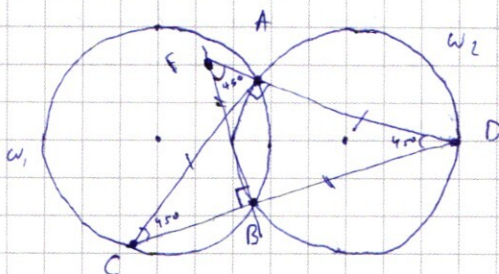
Найти:

а) CF ?

б) $BC = 10$

S_{ACF} ?

Решение:



а) $\angle ACB = \angle ADB$, т.к. эти углы в равных окружностях опираются на равные дуги.

Т.к. $\angle CAD = 90^\circ$, то $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$

$\triangle BFD$ - прямоугольный и равнобедренный. Следовательно $\angle FDB = 45^\circ$

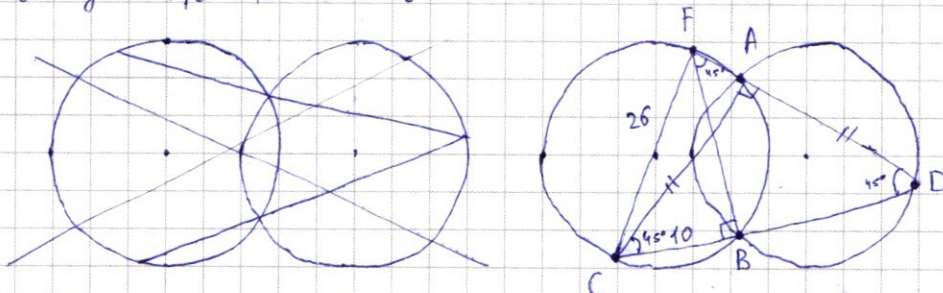
Т.к. F и A лежат по одну сторону от CD, то $F \in AD$

$\angle FCB = 45^\circ$, следовательно $F \in \omega_1$

$\angle FBC = 90^\circ$ и вписанный в окружность, значит он опирается на диаметр.

CF - диаметр ω_1 , $CF = 26$

б)



$\triangle FCB$ - прямоугольный

$$FB = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24$$

$$FB = BD = 24 \quad CD = 34$$

$\triangle CAD$ - прямоугольный и равнобедренный

$$CD^2 = 2AC^2 \quad AC = \frac{34}{\sqrt{2}} = 17\sqrt{2}$$

г)

$$\triangle CFA$$
 - прямоугольный $FA = \sqrt{26^2 - 17^2 \cdot 2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$

$$S_{CFA} = \frac{1}{2} CA \cdot FA = \frac{1}{2} \cdot 17\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 7 \cdot 17 = 119$$

Ответ: а) $CF = 26$

$$б) S_{CFA} = 119$$

№6.

Дано:

$\omega_1 \cap \omega_2 \cap AB$

$r=13$

$\omega_1 = \omega_2$

$C \in \omega_1$

$D \in \omega_2$

$BECD$

$\angle CAD = 90^\circ$

$FB \perp CD$

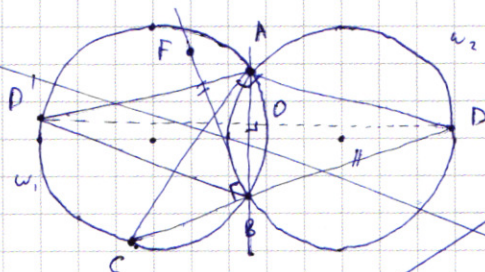
$FB = BD$

Найти:

$\angle CFB = ?$

$\angle BCF = 10^\circ$

$S_{ACF} = ?$



Решение.

Возьмем точку D' симметричную D относительно прямой AB .

$OD \perp AB$, $OD = OD'$ треугольники $\triangle AOD$ и $\triangle AOD'$ прямоугольные и равны по двум катетам (AO - общий)

Следовательно $\angle AD'O = \angle ADO$, аналогично $\angle$

$$4. \quad 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$x \geq 2$$

$$x^2(4x^2 - 9) + 4x - 9x^3 + 4x + 4 \geq 0$$

$$x^2(4x^2 - 9) + 4x - 9x^3 + 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^2(4x^2 - 9) + 4x - 9x^3 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 5x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^2(x^2 - 1) - 5x^2(x^2 + 1) + 4(x + 1) \geq 0$$

$$4x^2(x - 1)(x + 1) + 4(x + 1) - 5x^2(x^2 + 1) \geq 0$$

$$4(x + 1)(x(x - 1) + 1)$$

$$x \leq -2$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 4 + 5x^3 + 5x + 11x^2 - x \geq 0$$

$$4x^4 + 4 + 5x^3 + 5x + 11x^2 - x \geq 0$$

$$x^3(4x + 5)$$

$$x^3(4x + 5)$$

$$4x^4 + 5x^3 + 5x + 11x^2 - x \geq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7.

$$|y+x+8| + |y-x+8| = 16$$

$$y = -x - 8$$

$$y = x - 8$$

1) $y+x+8+y-x+8=16$
 $y=0$

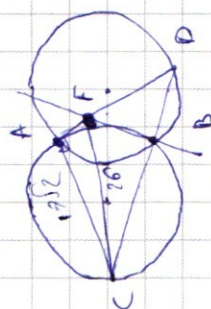
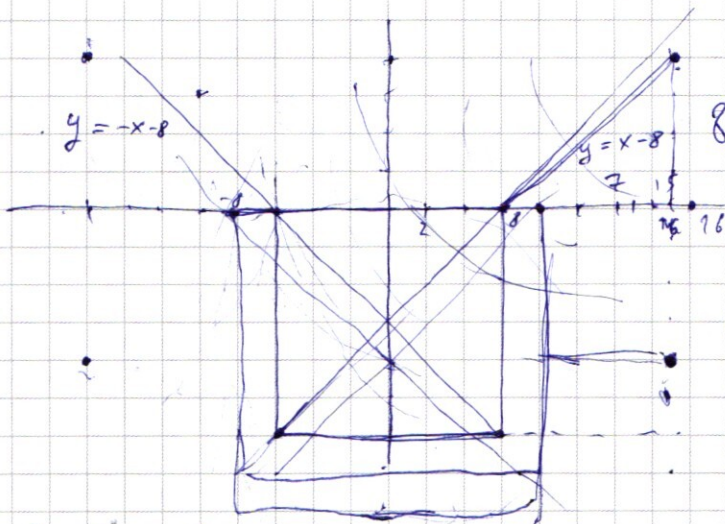
2) $y+x+8-y+x-8=16$
 $x=8$

3) $-y-x-8+y-x+8=16$
 $x=-8$

4) $-y-x-8-y+x-8=16$
 $-2y=32$
 $y=-16$

$$\sqrt{64+49} = \sqrt{113}$$

16+8



$$\begin{array}{r} 16 \\ + 64 \\ + 49 \\ \hline 113 \end{array}$$

mm

$$(x-15)^2 + (y-8)^2 = a$$

1) $x=15$
 $y=8$

2) $x=-15$
 $y=-8$

3) $x=-15$
 $y=8$

3) $x=15$
 $y=-8$

$$(24-1)^2 = 24^2 - 48 + 1$$

$$\begin{array}{r} 576 \\ - 48 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline + 56 \\ + 56 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$16+9 = 23^2 + 24^2$$

$$(24-1)^2 + 24^2 =$$

$$= 24^2 - 48 + 1 + 24^2$$

$$\begin{array}{r} 576 \\ \times 2 \\ \hline 1152 \\ - 48 \\ \hline 1104 \end{array}$$

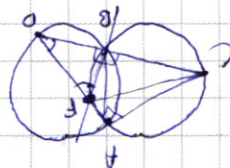
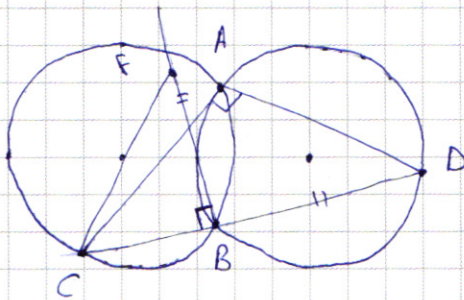
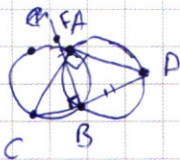
ae'

$$\begin{array}{r} 528 \\ \times 529 \\ \hline 593 \end{array}$$

√6.

$r=13$

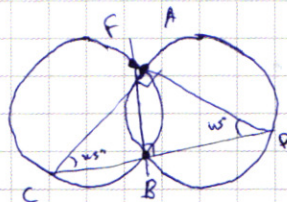
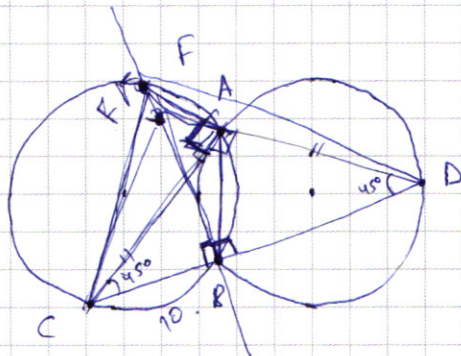
$r=13$



676
-578

106-8

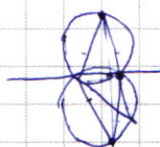
100-7
(98)



$CF=26$



5n

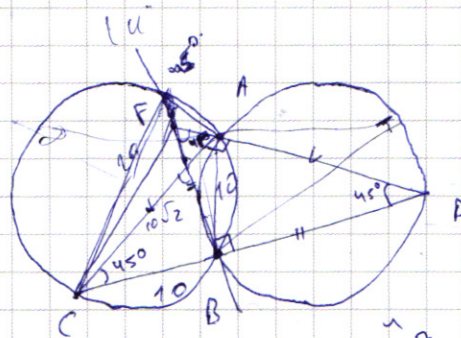


5²
5²

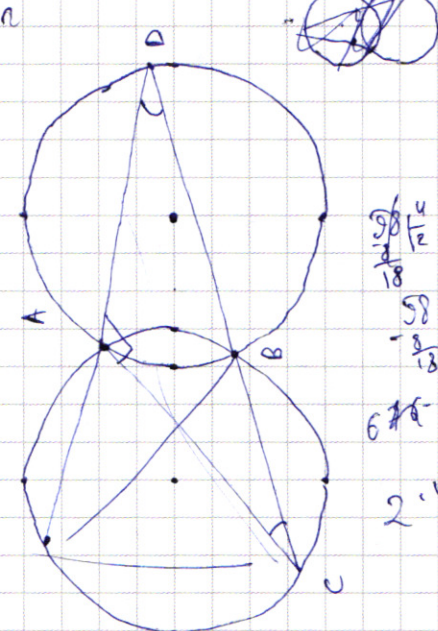
3
126
126
752
152
676-100
568
576

(24²)

$r=13$

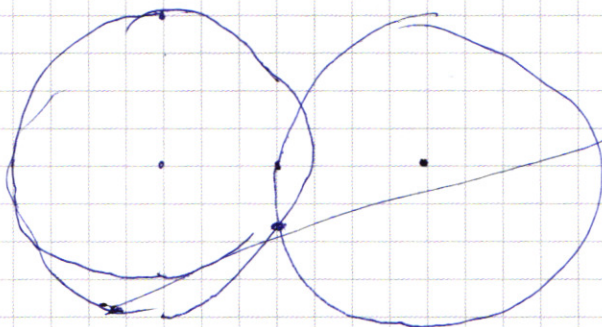


17.2
17.2
17.2



98 1/2
18
58 1/2
- 8/18
676

2.49



676-578=2

17 1/2
17 1/2
17 1/2
+ 17 1/2
578

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3. \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{x+10}{2\sqrt{2}}$$

$$x \neq -10$$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = \frac{(x^2 + 6x - 40) \cdot 2\sqrt{2}}{x+10}$$

$$(x^3 - 64x + 200)(x+10)^2 = 8(x^2 + 6x - 40)^2$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$x^3 - 64x + 200 = \frac{8(x^2 + 6x - 40)^2}{(x+10)^2}$$

$$(x^3 - 64x + 200)(x^2 + 20x + 100) = 8(x^2 + 6x - 40)^2$$

$$x^3 - 64x + 200 = \frac{8(x-4)^2(x+10)^2}{(x+10)^2}$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8(x-4)^2$$

$$x^3 - 64x + 200 - 8(x^2 - 8x + 16) = 0$$

$$x^3 - 8x^2 + 200 - 8 \cdot 16 = 0$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

1	-8	0	72
4	1	-4	-16
-4	1	-12	
-8	1	-11	88

1	-8	0	72
-6	1	-4	
6	1	-8	-1272
		-2	

1	-8	0	72
6	1	-12	0

$$x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$D = 4 + 48 = 52$$

$$D = 4 + 48 = 52$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{2}$$

$$x = 1 - \sqrt{13}$$

$$x = 1 + \sqrt{13}$$

$$\begin{array}{r} 1 + \sqrt{13} \\ \sqrt{13} \\ \sqrt{13} \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 3 \\ \sqrt{13} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 - 60 - 40 \\ 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 8 \\ 140 \\ -1000 \\ x^3 - 64x + 200 \geq 0 \\ -1000 + 640 + 200 = -160 \\ x \neq -10 \end{array}$$

$$\frac{x^2 + 6x - 40}{x+10} \geq 0$$

$$x^2 + 6x - 40$$

$$D = 36 + 4 \cdot 40 = 196$$

$$x = \frac{-6 \pm 14}{2}$$

$$\frac{(x-4)(x+10)}{(x+10)} \geq 0$$

$$x \neq -10$$

$$\begin{cases} x = -10 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$x - 4 \geq 0$$

$$x \geq 4$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ -10 \end{array}$$

$$52 \begin{array}{c} 14 \\ 13 \end{array}$$

$$x \geq 4$$

$$\sqrt{4}. 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$$

$$1) x \geq -2$$

$$x \neq 0.$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0 : x^2$$

$$4x^2 - 5x - 9 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \geq 0$$

$$\left(\frac{4}{x} - 5x\right)^2 = \frac{16}{x^2} + 25x^2 - 40$$

$\sqrt{7}.$

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (x-15)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+x+8 > 0 \\ y-x+8 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > -x-8 \\ y > x-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < -x-8 \\ y < x-8 \end{cases}$$

$$y < -x-8$$

$$y+x+8+y-x+8=16$$

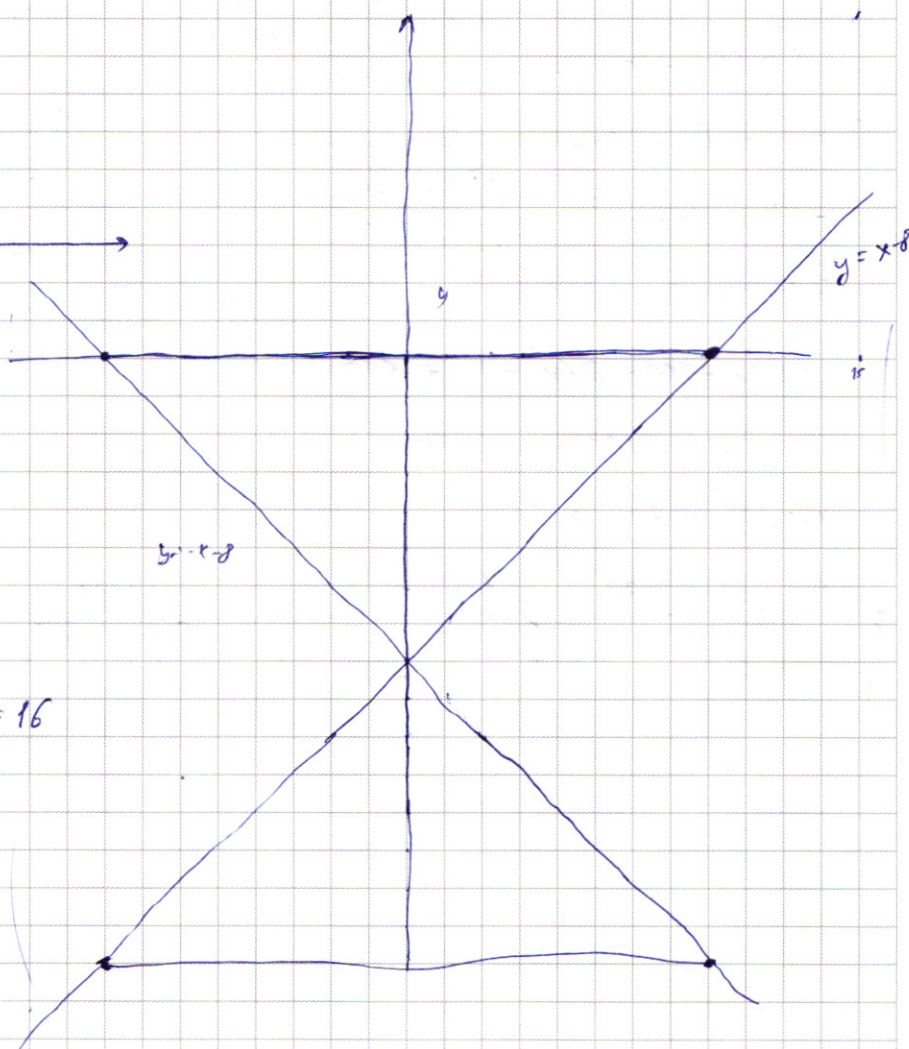
$$\begin{cases} 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$y+x+8-y+x-8=16$$

$$-y-x-8-y+x-8=16$$

$$-2y = 32$$

$$y = -16$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. b_1, b_2, b_{300} экз. ~~b_1, b_2, b_3~~

$S = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$

$S = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$

$S_1 = \frac{b_3(q^{3 \cdot 1000} - 1)}{q^3 - 1}$

$S_{sub} = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} - \frac{b_3(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} + \frac{40b_3(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{5b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$

$\frac{39b_3(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{4b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$

$39b_3(q - 1) = 4b_1(q^3 - 1)$

$b_3 = b_1 q^2$

$S'_{sub} = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} - \frac{b_2(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} + \frac{3b_2(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = ?$

$\frac{2b_2(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{(x-1)b_1(q^3 - 1)}{q - 1}$

$2q(q - 1) = (x-1)(q^2 - 1)$

$2q(q - 1) = (x-1)(q^2 - 1)$

$2q = (x-1)(q+1)$

$2q = (x-1)(q+1)$

$\frac{28}{35} = \left(\frac{14}{35} + \frac{35}{35}\right) \cdot (x-1)$

$(x-1) = \frac{28}{35} \cdot \frac{35}{49} = \frac{7 \cdot 4}{7 \cdot 7} = \frac{4}{7}$

$x = \frac{4}{7} + \frac{7}{7} = \frac{11}{7}$

$36q^2 - 4q - 4 = 0$

$9q^2 - q - 1 = 0$

$q = \frac{1 \pm 24}{70}$

$q = \frac{28}{70} = \frac{14}{35}$

$S = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 1225 \overline{) 5} \\ 10 \\ \underline{22} \\ 22 \\ \underline{22} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4900 \overline{) 2} \\ 2450 \overline{) 2} \\ 1225 \overline{) 5} \\ 245 \overline{) 5} \\ 49 \overline{) 7} \\ 77 \overline{) 7} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4900 \overline{) 2} \\ 2450 \overline{) 2} \\ 1225 \overline{) 5} \\ 245 \overline{) 5} \\ 49 \overline{) 7} \\ 77 \overline{) 7} \\ 1 \end{array}$$

$$4900 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \quad 22 \quad 2 \cdot 1 \\ 10 \quad 22 \quad 1 \\ 01 \quad 2 \end{array}$$

$$4100 \quad 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\begin{array}{r} 122 \\ 2211 \\ \underline{42211} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 \\ \underline{2 \cdot 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 331 \\ 313 \\ 133 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1122 \\ 1212 \\ 1221 \\ 2211 \\ 2121 \\ 2112 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 \end{array}$$

$$42 \cdot 20 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ 20 \\ \underline{840} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \\ 2 \end{array}$$

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$\frac{4!}{2 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2}$$

$$C_k^h = \frac{h!}{k!(h-k)!}$$

$$k=8$$

$$h=4$$

$$k=8 \cdot 2$$

$$2$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 135 \\ \underline{140} \end{array}$$

$$\frac{3!}{4 \cdot 2!}$$

$$\frac{4!}{2 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4} = 6$$

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot 2 \end{array}$$

$$= 27 \quad 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \end{array}$$

$$\times 48$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 48 \\ \underline{140} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 48 \\ \underline{140} \\ 6720 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 56 \\ 12 \\ \underline{112} \\ 56 \\ \underline{672} \end{array}$$