

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$4900 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$ - эти шесть цифр обязаны присутствовать в записи восьмизначного числа или $4900 = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$, тогда все остальные цифры будут единицами.

Количество восьмизнач. чисел: $8! + 8! = 2 \cdot 720 \cdot 7$.

$\cdot 8 = 80640$ чисел

$$\begin{array}{r} \times 1440 \\ \times 56 \\ \hline 864 \\ 720 \\ \hline 80640 \end{array}$$

Ответ: 80640

№2

$b_1, b_2, \dots, b_{3000}$ - ариф. прогр.; сумма $S = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q}$

Членов, кратных 3, в арифметической прогрессии $3 \cdot 1000$

$q' = q^3$, так $\frac{b_5}{b_2} = q^3$. По условию $S' = 55 = \frac{b_1(1-q'^{1000})}{1-q'}$

$= \frac{b_1 \cdot q^2 \cdot (1-q^{3000})}{1-q^3} \Rightarrow \frac{5 \cdot b_1(1-q^{3000})}{1-q} = \frac{b_1 \cdot q^2 \cdot (1-q^{3000})}{1-q^3}$

По условию, $S' = 55$ - сумма новой прогрессии, которая равна $S' = 55 = S + 39$

$$\frac{b_2(1-q^{3000})}{1-q^3} \Rightarrow \frac{4 \cdot b_1(1-q^{3000})}{1-q} = \frac{39 \cdot b_1 \cdot q^2}{1-q^3}$$

$\Rightarrow 4 - 4q^3 = 39q^2 - 39q^3$

$$35q^3 - 35q^2 - 4 = 0$$

$$35q^3 - 35q^2 - 4q^2 + 4 = 0$$

$$35q^2(q-1) - 4(q-1)(q+1) = 0$$

$$(q-1)(35q^2 - 4q - 4) = 0$$

$q=1$ — не удовл.
условию.

$$35q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$D = K^2 - ac = 12^2 > 0$$

$$q_{1,2} = \frac{2 \pm 12}{35} =$$

$$\left[\frac{14}{35} = q \right]$$

$-\frac{10}{35}$ — не удовл. усл.; так
все члены > 0

Пусть S_1 — сумма при увеличении членов на чет мес-
тах в три раза, тогда $S_3 = S + 2 \cdot \frac{b_2(1-q^2)^{500}}{1-q^2} =$

$$= \frac{b_1(1-q^{3000})(1+q) + 2b_1q(1-q^{3000})}{1-q^2} = \frac{b_1q(1-q^{3000})(1+3q)}{1-q^2}$$

$$= \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q} \cdot \left(\frac{1+3q}{1+q} \right) \Rightarrow \frac{S_2}{S} = \frac{1+3q}{1+q}$$

$$\frac{1+3q}{1+q} = \frac{1+\frac{42}{35}}{1+\frac{14}{35}} = \frac{49}{49} = \frac{11}{7} = 1\frac{4}{7} \text{ — увеличился } S$$

Ответ: S увеличился в $1\frac{4}{7}$ раза

№3. №4.

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

$$\begin{cases} 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$\begin{cases} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0 \\ x+2 \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$(1) \begin{cases} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x = -1 \quad 4 + 4 + 5 - 9 - 4 + 4 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & -5 & -9 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & -9 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) = 0$$

$$x = 2 \quad 3 \cdot (32 - 36 + 4) = 0$$

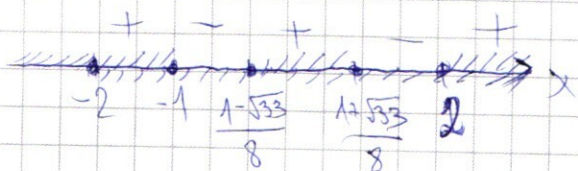
$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -9 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$4x^2 - x - 2 = 0 \quad (x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) = 0$$

$$D = 1 + 32 = 33 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+1)(x-2)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0 \\ x \geq -2 \end{array} \right.$$



$$x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$$

$$\sqrt{3}.$$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\frac{(x+10) \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+3)^2 - 7^2$$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = \frac{4(x+10)(x-4)}{(x+10) \cdot \sqrt{2}}$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$x^3 - 6x^2 - 2x^2 + 72 = 0$$

$$x^2(x-6) - 2(x-6)(x+6) = 0$$

$$(x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0$$

$$x=6 \quad \text{или} \quad x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$D = 13 > 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{13}$$

Проверка: 1) $6^3 - 64 \cdot 6 + 200 = 216 - 384 + 200 = 32 > 0$ - верно.

2) $(1 + \sqrt{13})^3 - 64(1 + \sqrt{13}) + 200 = (1 + \sqrt{13})(1 + 2\sqrt{13} + 13 - 64 + 200) =$
 $= (1 + \sqrt{13})(2\sqrt{13} - 50) + 200 = -48\sqrt{13} + 176 = 16(11 - 3\sqrt{13}) > 0$ - верно.
 $(121 > 117 \Rightarrow 11 > 3\sqrt{13})$

3) $(1 - \sqrt{13})^3 - 64(1 - \sqrt{13}) + 200 = (1 - \sqrt{13})(-80 - 2\sqrt{13}) + 200 =$
 $= -24 + 48\sqrt{13} + 200 = 176 + 48\sqrt{13} > 0$ - верно.

Ответ: $1 - \sqrt{13}$; $1 + \sqrt{13}$; 6

№7.

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 & (1) \\ (|x-15|)^2 + (|y-8|)^2 = (\sqrt{2})^2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad |y+x+8| + |y-x+8| = 16$$

$$(2) \quad |x-15|^2 + (|y-8|)^2 = (\sqrt{2})^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} y=0 \\ y+x+8 \geq 0 \\ y-x+8 \geq 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=8 \\ y+x+8 \geq 0 \\ y-x+8 < 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=-8 \\ y+x+8 < 0 \\ y-x+8 \geq 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y=-16 \\ y+x+8 < 0 \\ y-x+8 < 0 \end{cases}$

1) $\begin{cases} y=0 \\ x \in [-8, 8] \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=8 \\ y \in [-16, 0) \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=-8 \\ y \in [-16, 0) \end{cases}$

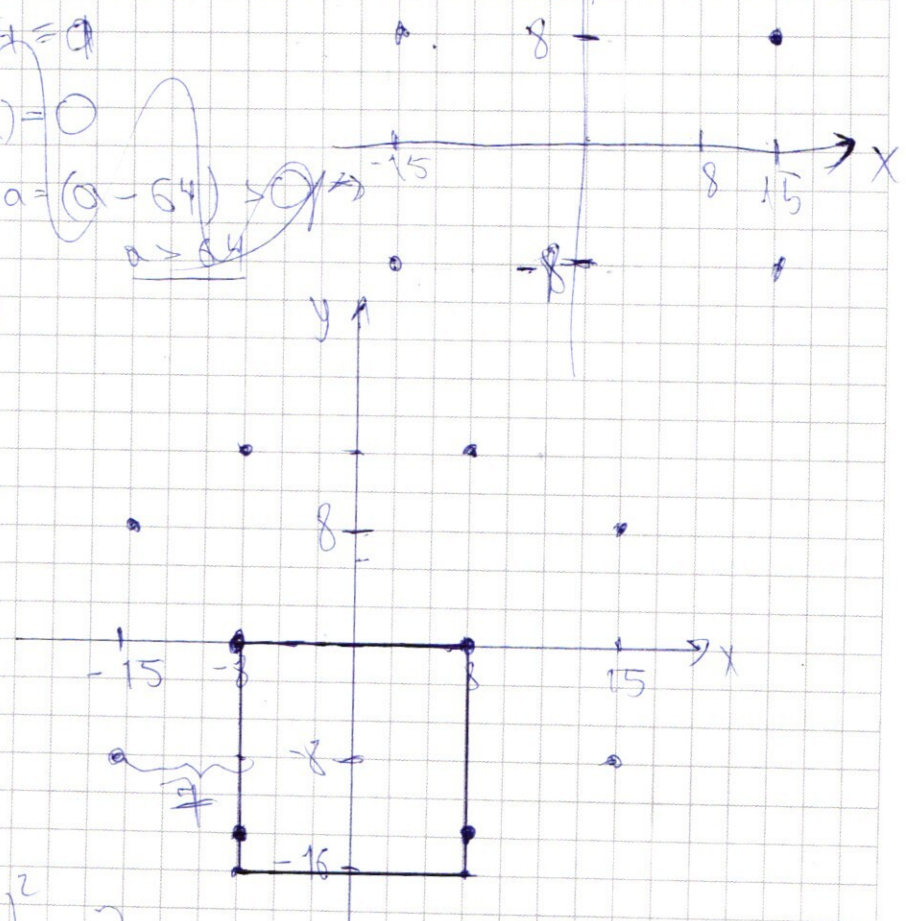
4) $\begin{cases} y=-16 \\ x \in [-8, 8] \end{cases}$

$x^2 - 30|x| + 225 + 64 = a$

$x^2 - 30|x| + (225 - a) = 0$

$D = K^2 - ac = 225 - 289 + a = (a - 64) \geq 0$
 $a \geq 64$

$|x| = 15 \pm \sqrt{a-64}$



$\sqrt{AC^2 + AD^2} = (BC + BD)^2$

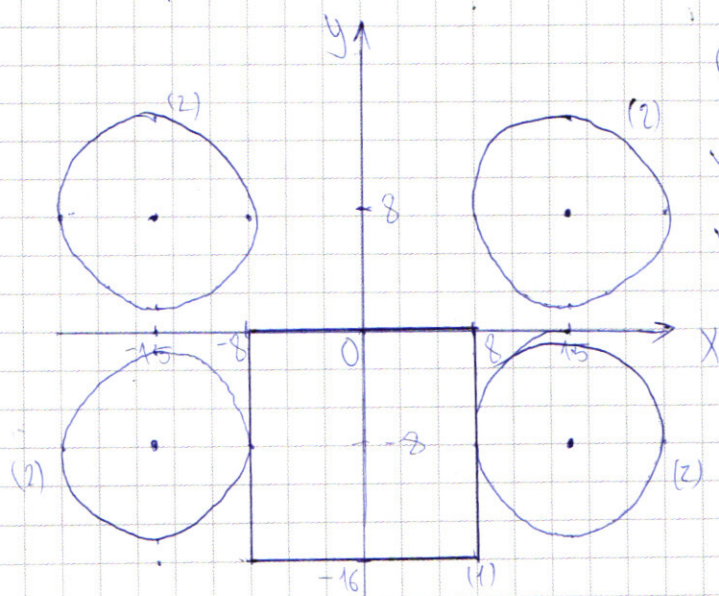
$BD^2 + FD^2 - BD^2 = \frac{FD^2}{2}$

$BC^2 = FC^2 - BD^2$

$\Rightarrow AC^2 + AD^2 \geq FC^2 \geq 2 \cdot BC \cdot BD$

$$\begin{array}{llll}
 1) \begin{cases} y=0 \\ y+x+8 \geq 0 \\ y-x+8 \geq 0 \end{cases} & 2) \begin{cases} x=8 \\ y+x+8 \geq 0 \\ y-x+8 \leq 0 \end{cases} & 3) \begin{cases} x=-8 \\ y+x+8 \leq 0 \\ y-x+8 \geq 0 \end{cases} & 4) \begin{cases} y=-16 \\ y+x+8 \leq 0 \\ y-x+8 \leq 0 \end{cases} \\
 \begin{cases} y=0 \\ x \in [-8; 8] \end{cases} & \begin{cases} x=8 \\ y \in [-16; 0] \end{cases} & \begin{cases} x=-8 \\ y \in [-16; 0] \end{cases} & \begin{cases} y=-16 \\ x \in [-8; 8] \end{cases}
 \end{array}$$

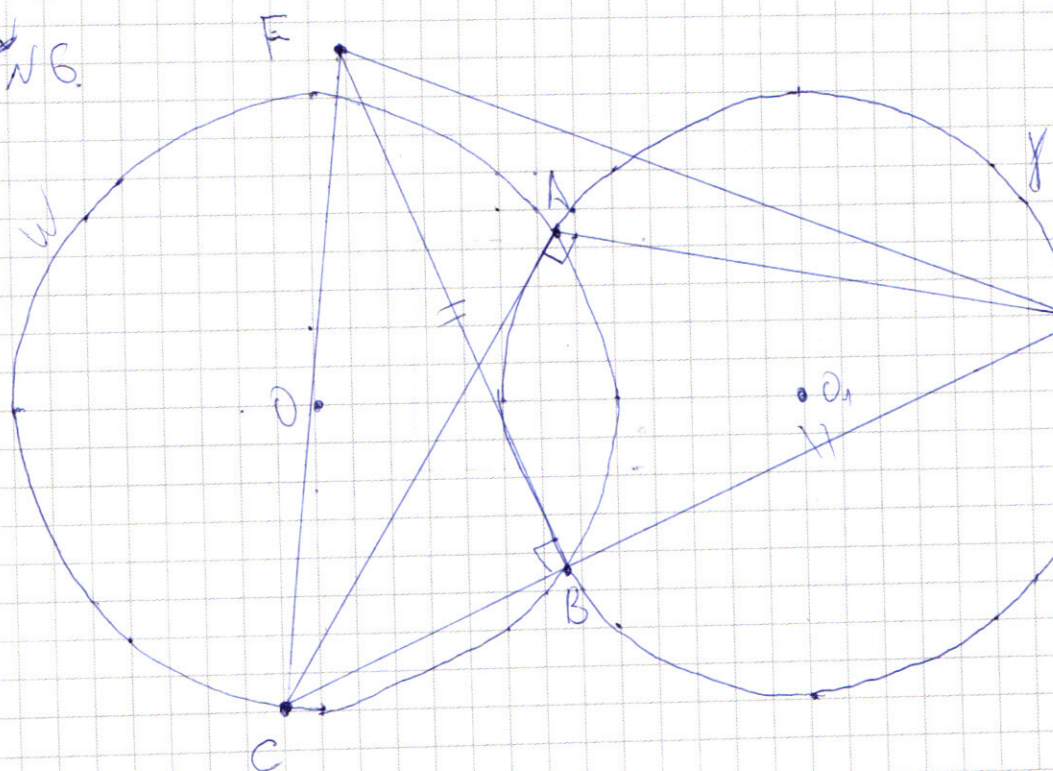
(2) $(|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a$ — окружности с радиусом $\sqrt{a}$ и центрами в точках $(\pm 15; 8); (-15; 8); (15; -8); (-15; -8)$



Система имеет два решения, если две окружности касаются квадрата. $\Rightarrow$ их радиус равен $15-8=7$
 $\Rightarrow \sqrt{a} = 7 \Rightarrow a = 7^2 = 49$

Ответ: $a = 49$

№6.



Дано:
 W, X — окружности
 $r = 13 \text{ см}$
 $\angle CAD = 90^\circ$
 $C \in W$
 $D \in X$
 $BF \perp CD$
 $BF = BD$

Найти:
 а) $CF = ?$
 б) $BC = ?$
 $S_{ACF} = ?$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

$b_1, b_2, \dots, b_{3000}$ - геом. прогр. ; S -сумма = $\frac{b_1 \cdot (1 - q^{3000})}{1 - q}$

$$S_1 = S; S_2 = 5S \quad 5S = \frac{b_1 \cdot (1 - q^{3000})}{1 - q} + 39 \cdot \frac{b_1 \cdot (1 - q^{2000})}{1 - q^2} =$$

$$= \frac{b_1(1 - q^n)(1 - q) + 39 \cdot b_1 \cdot q^2 \cdot (1 - q^{2n})}{1 - q^2} = \frac{b_1(1 - q^n)(1 + q + 39q^2)}{1 - q^2}$$

$$\frac{b_1(1 - q^n)(1 + q)}{1 - q^2} = \frac{b_1(1 - q^n)(1 + q + 39q^2 + 39q^{2n})}{1 - q^2} = \frac{5b_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$5b_1(1 - q^n)(1 - q)(1 + q) = b_1(1 - q^n)(1 - q)(1 + q + 39q^2 + 39q^{2n})$$

$$5 + 5q = 1 + q + 39q^2 + 39q^{2n}$$

$$39q^{n+2} + 39q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$S = \frac{b_1(1 - q^{3000})}{1 - q}; 5S = \frac{b_1(1 - q^{3000})}{1 - q} + 39 \cdot \frac{b_1(1 - q^{2000})}{1 - q^2} =$$

$$= \frac{b_1(1 - q^{1000})(1 + q^{1000} + q^{2000})(1 + q) + 39 \cdot b_1 \cdot q^2(1 - q^{1000})(1 + q^{1000})}{1 - q^2}$$

$$= \frac{b_1(1 - q^{1000})(1 + q^{1000} + q^{2000})(1 + q) + 39q^2(1 + q^{1000})}{1 - q^2} = 5 \frac{b_1(1 - q^{1000})}{1 - q}$$

$$5b_1(1 - q^{1000})(1 + q^{1000} + q^{2000})(1 - q)(1 + q) = (1 - q) \cdot b_1(1 - q^{1000})(1 + q^{1000} + q^{2000})(1 + q) + 39q^2(1 + q^{1000})$$

$$5(1 + q^{1000} + q^{2000})(1 + q) = (1 + q^{1000} + q^{2000})(1 + q) + 39q^2(1 + q^{1000})$$

$$(4 + 4q)(1 + q^{1000} + q^{2000}) = 39q^2 + 39q^{1002}$$

$$S_2 = S + 2 \cdot \frac{b_1 \cdot q^2 (1 - q^{3000})}{1 - q^3}$$

$$48 \cdot \frac{1 - q^{3000}}{1 - q} = \frac{39 b_1 \cdot q^2 (1 - q^{3000})}{1 - q^3}$$

$$48 \cdot \frac{1 - q^{3000}}{1 - q} = \frac{39 b_1 \cdot q^2 (1 - q^{3000})}{1 - q^3}$$

$$4(1 - q^3) = 39 q^2 (1 - q)$$

$$4 - 4q^3 = 39q^2 - 39q^3$$

$$43q^3 - 39q^2 + 4 = 0$$

$$43q^3 - 39q^2 + 4q^2 - 4 = 0$$

$$35q^3 - 39q^2 + 4 = 0$$

$$35q^3 - 35q^2 - 4q^2 + 4 = 0$$

$$35q^2(q - 1) - 4(q - 1)(q + 1) = 0$$

$$(q - 1)(35q^2 - 4q - 4) = 0$$

$$q = 1 \text{ — не годится} \quad 35q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$D = k^2 - ac = 16 + 140 = 156 > 0$$

$$q_{1,2} = \frac{2 \pm 12}{35} = \frac{14}{35}$$

$$-\frac{10}{35} \text{ — не годится}$$

$$S_2 = \frac{b_1(1 - q^{3000})(1 + 3q)}{1 - q^2} = \frac{b_1(1 - q^{3000})}{1 - q} \cdot \frac{(1 + 3q)}{1 + q}$$

$$\frac{1 + 3q}{1 + q} = \frac{1 + 3 \cdot \frac{14}{35}}{1 + \frac{14}{35}} = \frac{4 \cdot 35 + 14}{35 + 14} = \frac{154}{49} = 3 \frac{1}{7}$$

N3

$$\frac{(x+5)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{(x+10)\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$x^3 - 64x + 200 \geq 0$$

$$x^3 - 16x - 48x + 200 \geq 0$$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = \frac{(x+3)^2 - 7^2}{(x+10)\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{(x-4) \cdot 2\sqrt{2}}$$

$$x(x-4)(x+4) - (x^2 - 25) \sqrt{x^3 - 64x + 200} =$$

$$x^3 - 100x + 36x + 200 = (x-4)^2 \cdot 8$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 4

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

$$\begin{cases} 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0 \\ x+2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0 \\ x \leq -2 \end{cases} \quad (2)$$

(1) $x = -1$

$$4 + 5 - 9 - 4 + 4 = 0$$

	4	-5	-9	4	4
-1	4	-9	0	4	0

$$4x^3 - 9x^2 + 4 = 0$$

$x = 2$

	4	-9	0	4
2	4	-1	-2	0

$$4x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 32 = 33 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

(2) $4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$; $4 \cdot 5 + 11 \cdot 4 + 4 = 80$

~~$$x = -2 \quad 64 - 40 + 44 + 8 + 4 = 20$$~~

~~$$x = -3 \quad 162 - 135 + 99 + 12 + 4 = 42$$~~

~~$$x = -4 \quad 256 - 320 + 176 + 16 + 4 = 128$$~~

~~$$x(4x^3 + 5x^2 + 11x + 4) + 4 =$$~~

~~$$= x(x(4x^2 + 5x + 11) + 4) + 4 =$$~~

~~$$= x(x(x(4x + 5) + 11) + 4) + 4 =$$~~

~~$$4x^5 + 5x^4 + 11x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = 10x^2 =$$~~

~~$$= 10x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$~~

~~$$16 \quad 25 \quad 36 \quad 49$$~~

$$x^3 - 64x + 200 \geq 0$$

$$8 - 128 + 200 = 80$$

$$27 - 192 + 200 = 35$$

$$4^3 - 4^4 + 200 = 8$$

$$125 - 320 + 200 = 5$$

$$216 - 384 + 200 = 32$$

$$(x+1)(x-2)(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8})(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}) \geq 0$$

1) $x \in [-2; -1] \cup [\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}] \cup [2; +\infty)$

