

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Возьмем произвольное восьмизначное число $a_1 \dots a_8$ такое, что $a_1 \dots a_8 = 700$. Тогда $a_1 \dots a_8 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$. Произведение любых двух чисел из набора $2, 5, 7$, кроме $2 \cdot 2$, не является однозначным числом, следовательно, ~~каждое из чисел~~

~~каждое~~ набор цифр $a_1, \dots, a_8$ равен либо набору $1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7$, либо набору $1, 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7$ в некотором порядке. Количество чисел, ~~образованных~~ образованных из цифр первого набора равно $\frac{8!}{3!2!2!}$, а из второго — $\frac{8!}{4!2!}$

(числителем — количество возможных перестановок восьми цифр, знаменателем — количество повторяющихся чисел путем деления на количество способов получить אותו же число).

$$\begin{aligned} & \frac{8!}{3!2!2!} + \frac{8!}{4!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \\ & = 1680 + \frac{1680}{2} = 2520. \end{aligned}$$

Ответ: 2520.

№2. Обозначим $\frac{b_2}{b_1}$ через d .

Тогда $b_1(d^0 + \dots + d^{2999}) +$
 $+ (50-1) b_1 d^2 (d^0 + d^3 + \dots + d^{2997}) =$
 $= 10 \cdot b_1 (d^0 + \dots + d^{2999})$

⇓ 

$b_1 \frac{d^{3000} - 1}{d - 1} + 49 b_1 d^2 \frac{d^{2997} - 1}{d^3 - 1} =$
 $= 10 b_1 \frac{d^{3000} - 1}{d - 1}$

м.к. $d^2(d^0 + d^3 + \dots + d^{2997})$

$$= \frac{d^0 + d^3 + \dots + d^{3000}}{d} - \frac{1}{d} =$$

$$= \frac{d^{3000} - 1}{(d^3 - 1)d} - \frac{1}{d} = \frac{d^{3000} - d^3}{d(1 - d^3)}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\text{№3. } \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

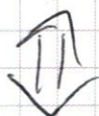


$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)(x+6)$$



$$\left[\begin{array}{l} x = -6 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4) \end{array} \right. \swarrow$$

$$\begin{cases} x^3 - 4x + 80 \geq 0 \\ \frac{1}{2}(x^3 - 4x + 80) = (x+4)^2 \quad (1) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^3 - 4x + 80 \geq 0 \\ x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^3 - 4x + 80 \geq 0 \\ (x-4)(x^2 + 2x - 72) = 0 \end{cases}$$

Корнями данного уравнения являются числа 4, $-1 - \sqrt{73}$, $-1 + \sqrt{73}$. Проверим, удовлетворяют ли они неравенству. Обозначив через x_1 любой из них, из формулы (1) получим:

$$x^3 - 4x + 80 = \frac{(x+4)^2}{2} \geq 0.$$

Ответ: $x \in \{-6, 4, -1 - \sqrt{13}, -1 + \sqrt{13}\}$.

✓ 4. Рассмотрим случай $x \geq 2$. Тогда неравенство равносильно

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

Обозначим эту функцию через $f(x)$. Тогда

$$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 14x - 4$$

$$f''(x) = 24x^2 - 18x + 14$$

$$D = 18^2 - 4 \cdot 14 \cdot 24 = 18^2 - 48 \cdot 24 < 0$$



$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) > 0$$



функция $f'(x)$ возрастает.

$f'(x) = 0$ — кубическое уравнение, следовательно, оно имеет ровно один корень



функция $f(x)$ имеет ровно одну точку локального экстремума. Коэффициент у старшего члена $f(x)$ равен $2 > 0$, следовательно, эта точка — локальный минимум.

$$f(0) = 4 < 6 = f(1), \text{ следова-}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

темлю, данный минимум
находится левее 1, то есть на
луче $[1, +\infty)$ $f(x)$ возрастает.
 $f(1) = 6 > 0 \Rightarrow \forall x \geq 2 \quad f(x) > f(1) > 0$.
Следовательно, в ответ войдет
луч $[2, +\infty)$.

Рассмотрим случай $x \leq 2$.
Тогда неравенство равносильно

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$\Downarrow$

$$(x-1)(x+2)(2x^2+x-2) \geq 0$$

$\Downarrow$

$$(x-1)(x+2)\left(x - \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right) \geq 0$$

Заметим, что

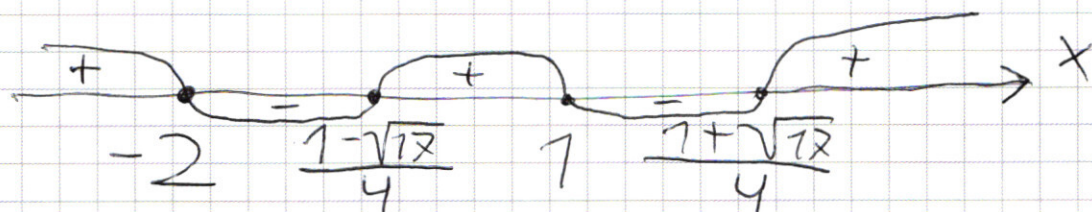
~~$\frac{1+\sqrt{17}}{4} > 1$~~

$$\frac{1+\sqrt{17}}{4} > \frac{1+\sqrt{9}}{4} = 1, \quad -2 < -1 = \frac{1-\sqrt{25}}{4} < \frac{1-\sqrt{17}}{4} < \frac{1-\sqrt{9}}{4} = 1$$

$\Downarrow$

$$-2 < \frac{1-\sqrt{17}}{4} < 1 < \frac{1+\sqrt{17}}{4}$$

Отметим промежутки положительности и отрицательности функции $(x-1)(x+2)(x-\frac{1+\sqrt{12}}{4})(x-\frac{1-\sqrt{12}}{4})$:



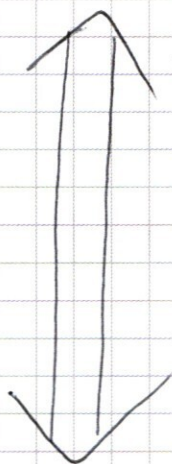
$\frac{1+\sqrt{12}}{4} < \frac{1+\sqrt{49}}{4} = 2$, следовательно, в ответ войдут промежутки $(-\infty, -2]$, $[\frac{1-\sqrt{12}}{4}, 1]$ и $[\frac{1+\sqrt{12}}{4}, 2]$.

Ответ: $x \in (-\infty, -2] \cup [\frac{1-\sqrt{12}}{4}, 1] \cup [\frac{1+\sqrt{12}}{4}, +\infty)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

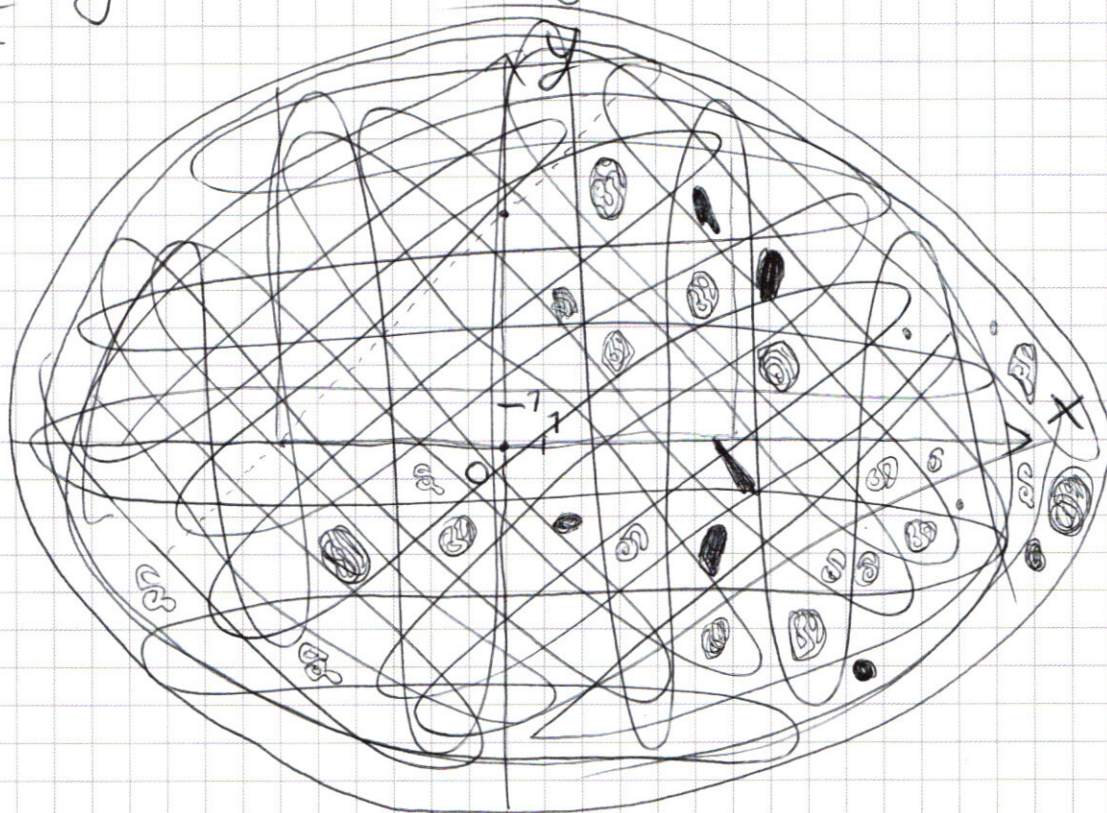
$$\text{N 7. } |y-6-x| + |y-6+x| = 12$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y-6-x \geq 0 \\ y-6+x \geq 0 \\ y-6-x+y-6+x=12 \end{cases} \\ & \begin{cases} y-6-x \geq 0 \\ y-6+x \leq 0 \\ y-6-x-y+6-x=12 \end{cases} \\ & \begin{cases} y-6-x \leq 0 \\ y-6+x \geq 0 \\ -y+6+x+y-6+x=12 \end{cases} \\ & \begin{cases} y-6-x \leq 0 \\ y-6+x \leq 0 \\ -y+6+x-y+6-x=12 \end{cases} \end{aligned}$$





$$\begin{cases} y \geq x+6 \\ y \geq 6-x \\ 2y-12=12 \Leftrightarrow y=12 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y \geq x+6 \\ y \leq 6-x \\ -2x=12 \Leftrightarrow x=-6 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y \leq x+6 \\ y \geq 6-x \\ 2x=12 \Leftrightarrow x=6 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y \leq x+6 \\ y \leq 6-x \\ -2y+12=12 \Leftrightarrow y=0 \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Напишите график данного уравнения: y

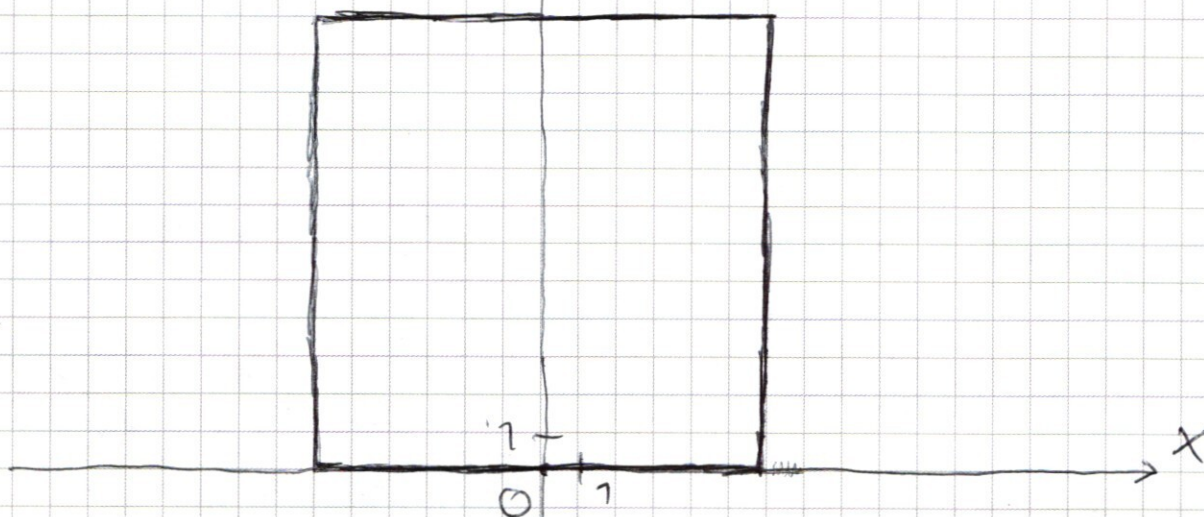
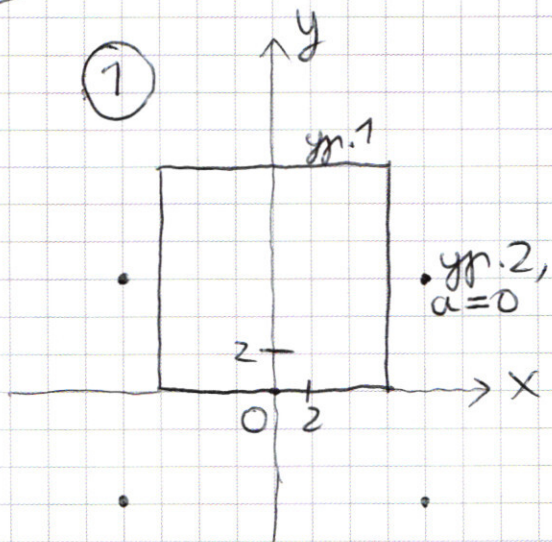


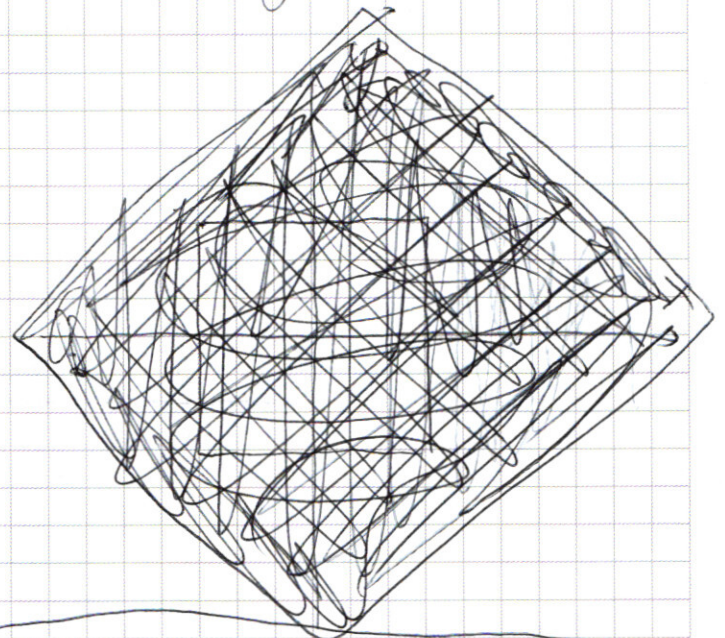
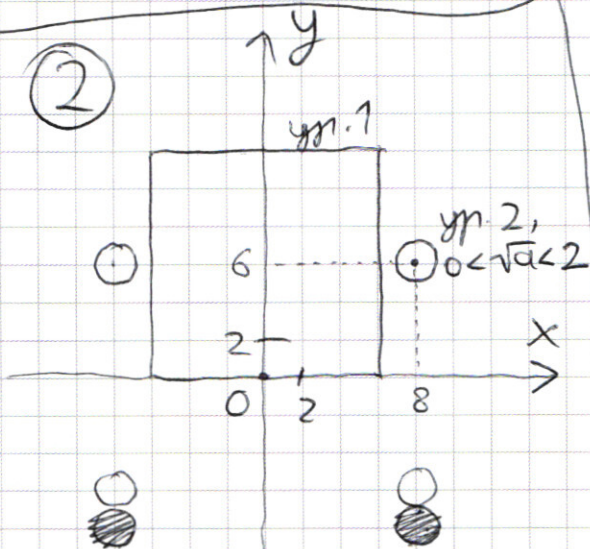
График уравнения $(|x| - 3)^2 + (|y| - 6)^2 = a$ симметричен отно-
сительно осей, а для $x, y \geq 0$
является графиком ок-
ружности с центром в
точке $(3, 6)$ и радиусом $\sqrt{a}$,
~~если~~ если $a > 0$. При $a \leq 0$
второе уравнение решений не
имеет, при $a = 0$ у него четы-
ре решения, не являющиеся
решениями первого, что
видно из графиков на
рисунке 7.

①

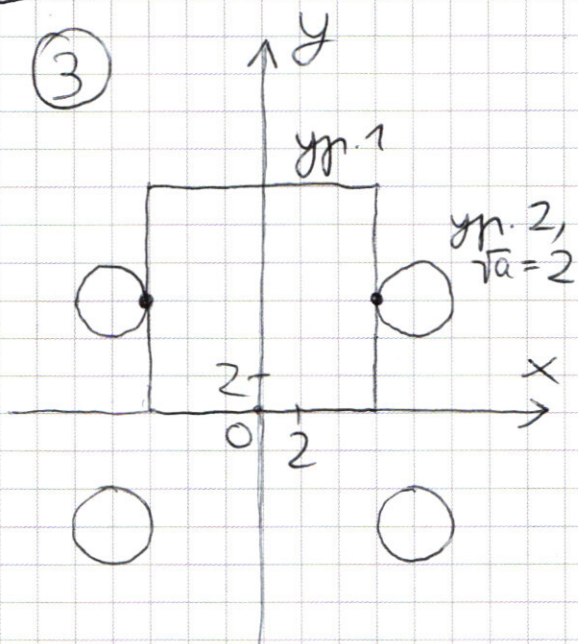


Из рисунка ②
Видно, что при $0 < \sqrt{a} < 2$
общих решений
нет. Из рисунка
③ Видно, что при
 $\sqrt{a} = 2$ ровно два
общих решения.

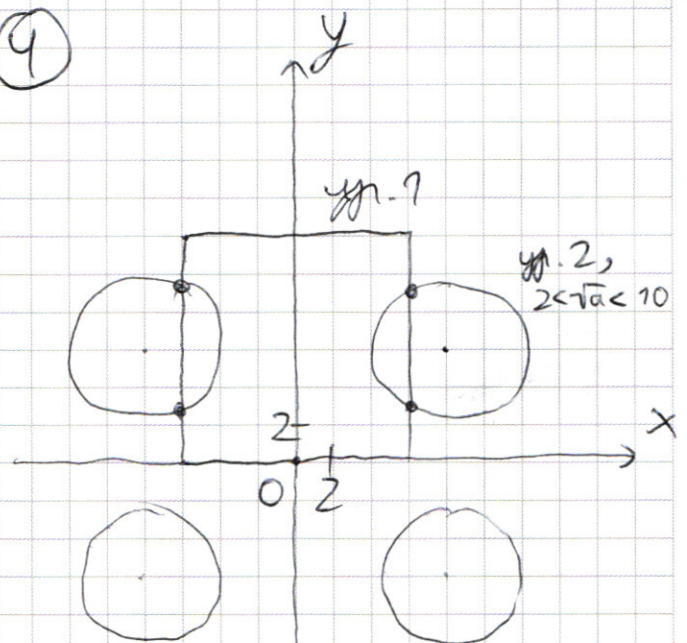
②



③

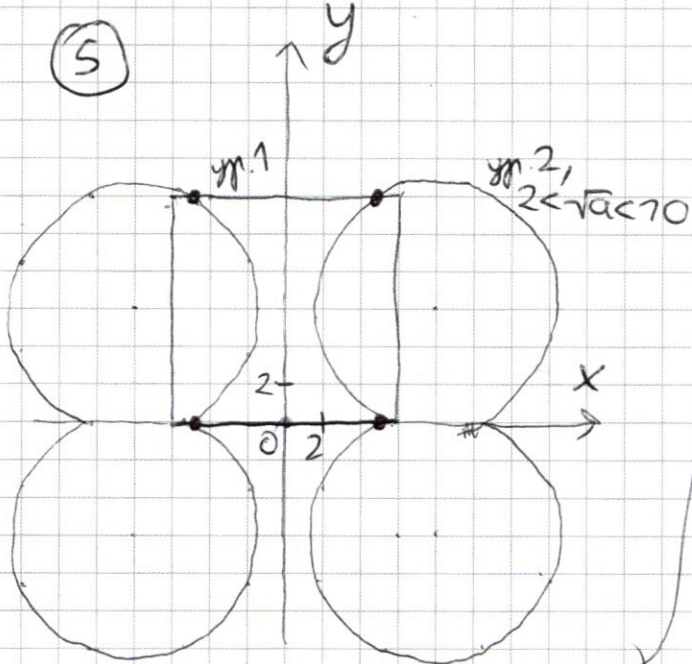


④

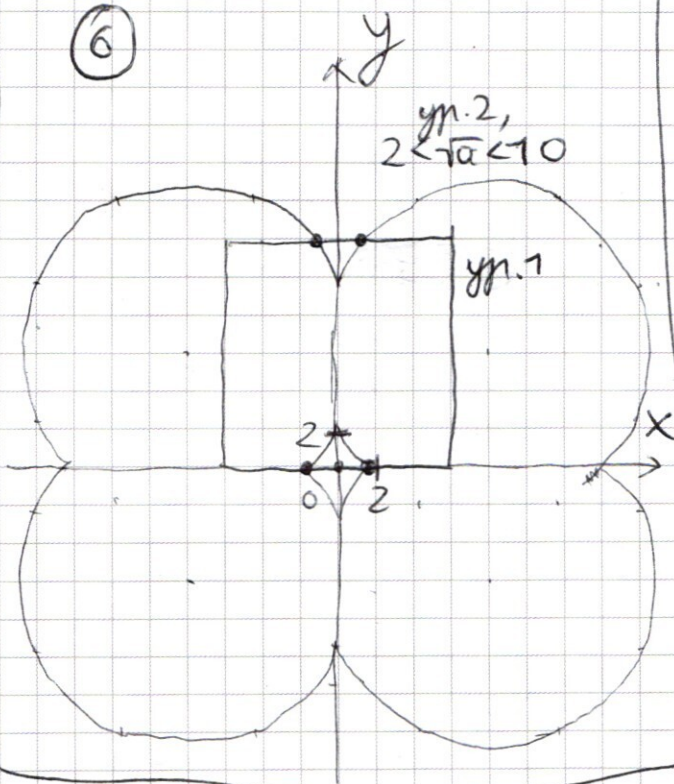


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5

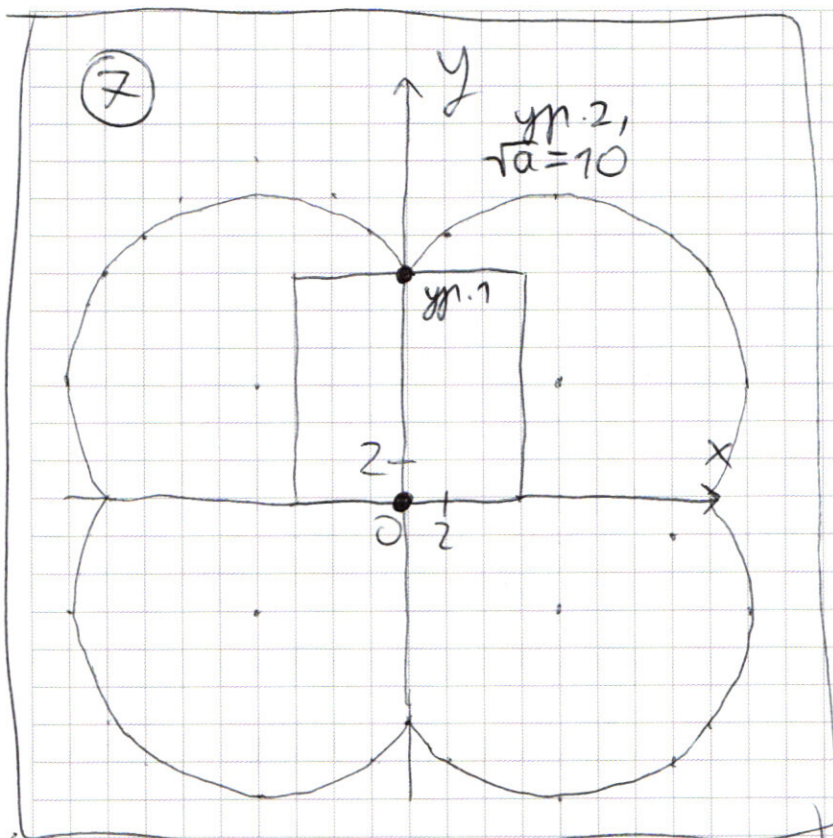


6



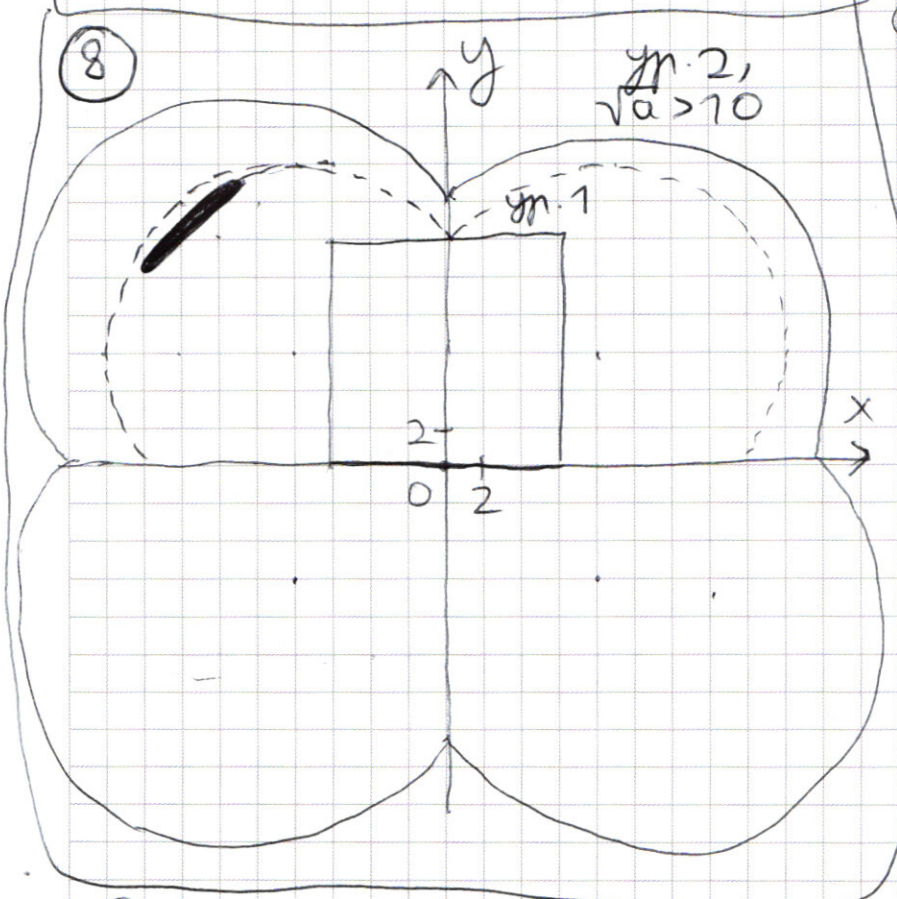
Как видно
из рисунков
4-6, при $2 < a < 10$,
каждая из двух
окружностей
(возможно, об-
резанных) вер-
хней полуок-
лости будет
иметь как ми-
нимум две не-
рассеченные с квад-
ратом, при этом
пары пересечений
будут нахо-
диться в раз-
ных полуок-
лостях отно-
сительно y и,
следовательно,
не будут сов-
падать, то
есть всего
пересечений

будет не менее четырех.



При $a = \sqrt{10}$
 пересечение
~~сечения~~ сечения
 квадрата с
 каждой из
 окружностей
 совпадут, и
 пересечение
 будет равно 2.

При $a > \sqrt{10}$
 все точки
 квадрата
 будут внут-
 ренними точ-
 ками фигуры,
 ограниченной
 графиком
 уравнения 2,
 так как они
 будут при-
 надлежать
~~фигуре~~ фигуре,
 ограниченной
 графиком
 уравнения 2
 для $a = \sqrt{10}$,
 а внешней
 остается



внутри данной фигуры. Сле-
 довательно, при $a > \sqrt{10}$ у урав-
 нений будет 0 общих решений.
 $\sqrt{a} \in \{2, 10\} \Leftrightarrow a \in \{4, 100\}$.

Ответ: $a \in \{4, 100\}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. Обозначим знаменатель про-
грессии через d . Тогда, обоз-
начив $\frac{b_1}{d}$ через c , а $d^0 + d^3 + \dots + d^{2002}$
через k , получим:

$$c(dk + d^2k + 50d^3k) = c(10dk +$$

$$+ 10d^2k + 10d^3k)$$

⇓

$$d + d^2 + 50d^3 = 10d + 10d^2 + 10d^3$$

⇓

$$40d^2 - 9d - 9 = 0$$

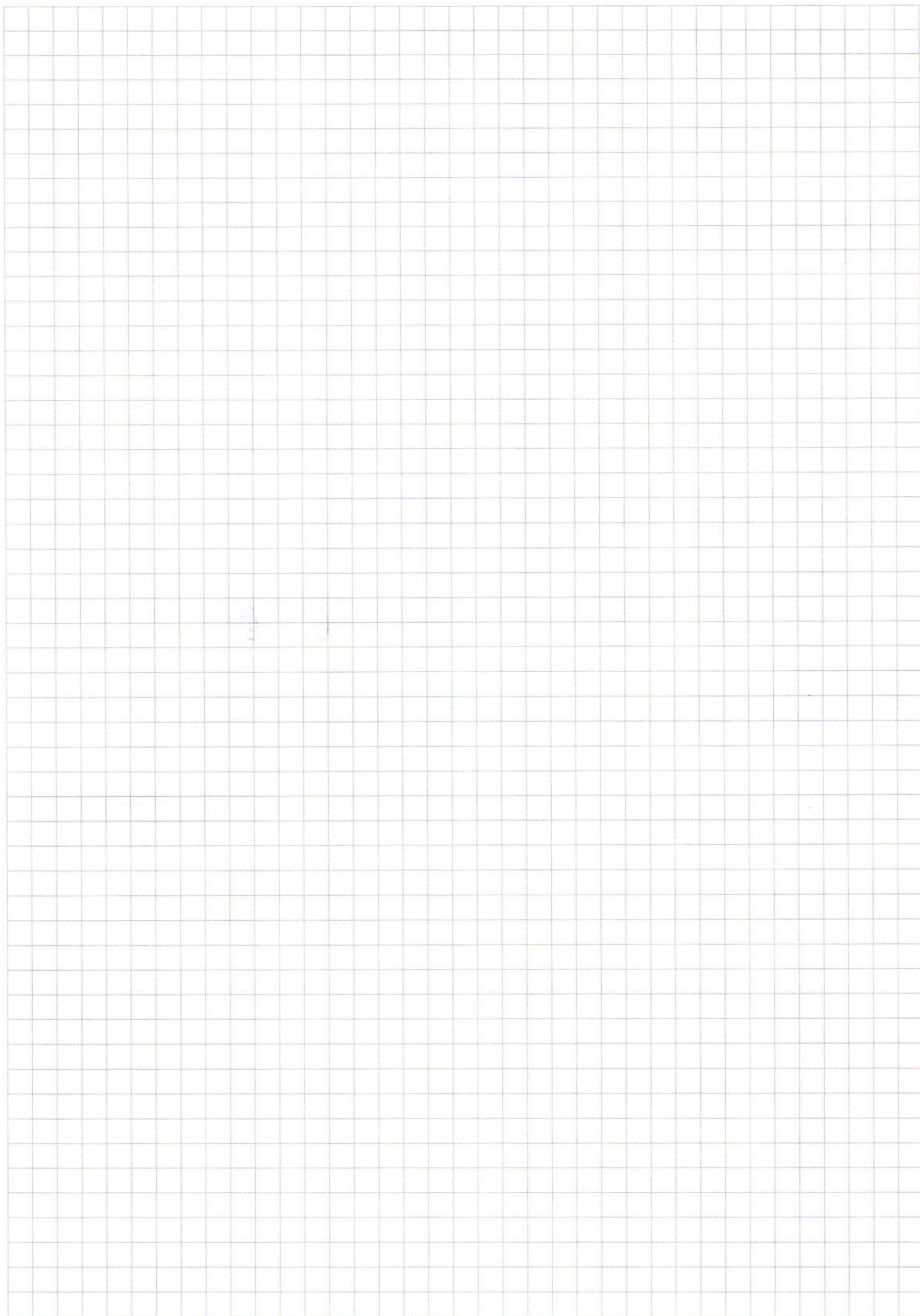
⇓

$$d = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 40 \cdot 9}}{80} = \frac{9 \pm \cancel{39}}{80}$$

$\frac{9-39}{80} < 0$, при $d < 0$ в прогрессии
внутренние бы отрицатель-
ные члены $\Rightarrow d = \frac{9+39}{80} = \frac{3}{5}$.

Обозначим $d + d^3 + \dots + d^{2002}$ через e .
Тогда $\frac{2de + e}{de + e} = \frac{2d+1}{d+1} = \frac{\frac{3}{5}+1}{\frac{3}{5}+1} = \frac{11}{8}$.

Ответ: S увеличится в $\frac{11}{8}$ раз.

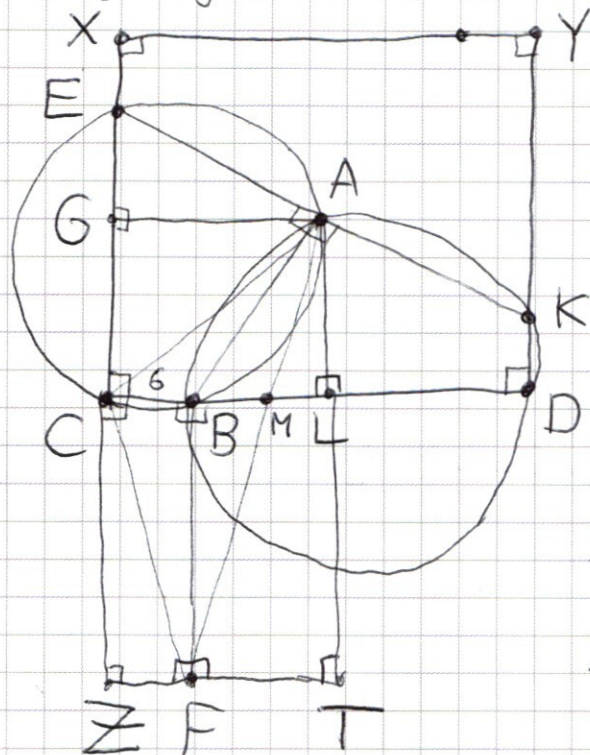


☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6. Построим квадрат с основанием CD в сторону точки A . Введем обозначения с рисунка.



Окружности
равны, следова-
тельно, $\angle ACB = \angle ADB \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$,
 $AC = AD$, $\angle CAD = 90^\circ$

$\Downarrow$
 A — центр $\square CDYX$.

$$\angle CAD = 90^\circ = \angle BAK$$

$$\Downarrow$$

$$\angle CAB = \angle DAK$$

$$\Downarrow$$

$$CB = DK$$

$$\Downarrow$$

$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{KD^2 + BD^2} =$$

$= BK = 2.5$, т.к. на хорду BK
опирается прямой угол, то
есть она является диаметром.

Ответ: $CF = 10$.

5) Вычислим длину стороны квадрата l . $10 = CF =$

$$= \sqrt{CB^2 + BD^2} = \sqrt{6^2 + (l-6)^2} =$$

$$= \sqrt{72 + l^2 - 12l}$$

⇓

$$l^2 - 12l + 72 = 100$$

⇓

$$l^2 - 12l - 28 = 0$$

⇓

$$l = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 28}}{2} = 6 \pm 8$$

⇓

$$l = 6 + 8 = 14.$$

Итого $S_{ACF} = S_{GATZ} - S_{AGC} -$

$$- S_{AFT} - S_{CZF} = \text{[scribble]} = \left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2} + BF\right) - \frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right)}{2} - \frac{\left(\frac{l}{2} - CB\right)\left(\frac{l}{2} + BF\right)}{2}$$

$$= \frac{BF \cdot CB}{2} = 7(7 + 10) - \frac{7 \cdot 7}{2} -$$

$$- \frac{(7 - 6)(7 + 10)}{2} - \frac{6 \cdot 10}{2} = 70 + 49 -$$

$$- \frac{49}{2} - \frac{17}{2} - 30 = 56. \text{ Ответ: } 56.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$200 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

$$B_1 (d^0 + \dots + d^{2999}) = B_1 \frac{d^{3000} - 1}{d - 1} + 49 B_1 d^2 \frac{d^{3000} - 1}{d^3 - 1} =$$

$$B_1 \frac{d^{3000} - 1}{d - 1} = \frac{-20 \pm 2}{2} = -5 \pm 1$$

$$49 d^2 = (d^2 + d + 7) \Rightarrow d^2 - d - 7 = 0$$

$$(x+4)(x+6)$$

$$\frac{(x-6)^2(x^3-4x+80)}{2}$$

$$9 \pm \sqrt{27 + 4 \cdot 9 \cdot 40}$$

$$B_1 \frac{d^{3000} - 1}{d - 1} + B_1 d \frac{d^{3000} - 1}{d^2 - 1}$$

$$(d+7) + 7$$

$$\frac{x^3 - 4x + 80}{2} = (x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$$

$$d^2 + d^2 + 3 + \dots + \frac{x^{36}}{40}$$

$$\frac{2^{2022} - 1}{d^3 - 1}$$

$$\frac{d^{3000} - 1}{d^3 - 1}$$

$$\frac{d^{2022} - 1}{d^3 - 1} = \frac{x^3 - 2x^2 - 20x + 48}{(x-4)(x^2 + 2x - 12)} = 0$$

$$d^2(d^0 + \dots + d^{2999}) = \frac{d^0 + d^2 + \dots + d^{3000}}{2} - \frac{1}{d}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 22}}{2}$$



$$-1 \pm \sqrt{3}$$

$$|x-2|=x-2$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$8x^3 - 9x^2 + 14x - 4$$

	2	-3	7	-4	4
2					

$$x \geq 2$$

$$x \leq 2$$

$$(y-x) + (y+x) = 12$$

$$2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 \geq 0$$

$$32 - 48 + 28 - 8 + 4 = 6$$

$$\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{72}}{4}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2^4} - 3 \cdot \frac{1}{2^3} + 7 \cdot \frac{1}{2^2} - 4 \cdot \frac{1}{2} + 4$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 2 \cdot 2}}{4}$$

$$\frac{1}{2^3} = \frac{3}{2^3} + \frac{7}{4} - \frac{1}{2} + 4$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$x \leq 2$$

$$(x-1)(2x^3+5x^2-4)$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2+x-2)$$

$$-2$$

$$1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{72}}{4}$$

$$\frac{1+\sqrt{72}}{4} < \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{25}}{4} = \frac{6}{4} < 2$$

$$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{72}}{4} > \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{25}}{4} = -1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$24x^2 - 18x + 74$$

$$12x^2 - 9x + 7 > 0$$

32

$$9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 7 \cdot 12}$$

$$\begin{array}{r} 78 \\ \times 73 \\ \hline \end{array}$$

$$\theta_n = c d^n$$

$$d^1 + d^4 + \dots + d^{2008} = dk$$

$$= d^2 k$$

$$d^3 k$$

$$\begin{array}{r} 9600 \\ \times 33 \\ \hline 28800 \\ 28800 \\ \hline 316800 \end{array}$$

$$(d^1 + \dots + d^{3000}) + 49(d^3 + d^6 + \dots + d^{3000}) =$$

$$= 10(d^1 + \dots + d^{3000})$$

$$\begin{array}{r} \times 360 \\ 1440 \end{array}$$



$$d^0 + d^3 + \dots + d^{2997} = k$$

$$dk + 49d^3k$$

$$dk + 49d^3k = 10dk$$

$$49d^2 - 9 = 0$$

$$d = \sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$$

$$\begin{array}{r} 1440 \\ \div 921 \\ \hline 1521 \end{array}$$

$$dk + d^2k + 50d^3k = 10dk + 10d^2k + 10d^3k$$

$$1 + d + 50d^2 = 10 + 10d + 10d^2$$

$$40d^2 - 9d - 9 = 0$$

☐ черновик

☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

