

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{r}
 31 \\
 31 \\
 \hline
 98 \\
 961
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 32 \\
 32 \\
 \hline
 64 \\
 96 \\
 124
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 56 \\
 2n^4 + n^2 \\
 \hline
 56 \\
 30 \\
 1680
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2 \\
 24 \\
 \hline
 316 \\
 144 \\
 24 \\
 72 \\
 7584 \\
 98 \\
 17381
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 75,84 \\
 37,92 \\
 37,92 \\
 89 \\
 126,92
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2n^4 + n^2 - 4n - 3n^3 + 6n^2 + 4 \geq 0 \\
 2n^4 + 7n^2 - 3n^3 - 4n + 4 \geq 0 \\
 \frac{n^3 - 2n^2 - 20n + 48}{n-4} \\
 \frac{48}{n-4} \\
 n^2 + \frac{2n^2 - 20n + 48}{n-4} \\
 n^2 + 2n + \frac{-12}{n-4} \\
 n^3 - n^2 - 20 \\
 -n^2 - 10n + 48 \\
 4 + 48 \\
 n^3 - 88 \\
 n^3 - 16n \\
 n^3 - 4n \\
 2n^4 + n^2 \\
 -2(n^2 + 2n - 24) \\
 -2(n-4)(n+6) \\
 n(-2 + 2\sqrt{13})
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x + 2n + 2n^2 + \dots + 2n^{k-1} \\
 x(1 + n + n^2 + \dots + n^{k-1}) \\
 \frac{x(1 - n^k)}{1 - n} \\
 \frac{n}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \sqrt{n^3 - 4n + 80} \geq n^2 + 10n + 24 \\
 (n+6)(n+4) \\
 \frac{6+n}{\sqrt{2}} \\
 100 \\
 \frac{-2+10}{2} \\
 \frac{-2-10}{2} \\
 2n^4 + n^2 \\
 -2(n^2 + 2n - 24) \\
 -2(n-4)(n+6) \\
 n(-2 + 2\sqrt{13})
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 173,84 \\
 9 + 12\sqrt{10} \\
 80 \\
 16,5 \\
 \frac{174}{127} \\
 \frac{127}{127} \\
 \frac{138}{138} \\
 \frac{470}{470} \\
 \frac{381}{381} \\
 \frac{890}{890} \\
 \frac{36}{6} \\
 278
 \end{array}$$

$$n-2 \geq 0$$

$$n-2 < 0$$

$$2n^4 + n^2 - 4n - 3n^3 + 6n^2 + 4 \geq 0$$

$$2n^4 + n^2 - 4n + 3n^3 - 6n^2 + 4 \geq 0$$

$$2n^4 + 7n^2 - 4n - 3n^3 + 4 \geq 0$$

$$3 \cdot 84 - 38 = 234$$

$$2n^4 - 3n^3 + 7n^2 - 4n + 4 \geq 0$$

$$2n^4 + 3n^3 - 5n^2 - 4n + 4 \geq 0$$

$$2557244$$

$$32$$

$$21$$

$$124$$

$$\frac{2n^4 + 3n^3 - 5n^2 - 4n + 4}{n-1}$$

$$32 + 24 + 28 - 8 + 4$$

$$\frac{1}{128}$$

$$\frac{1}{8} - \frac{3}{8} + \frac{14}{8} - \frac{16}{8} + 4$$

$$2n^3 + \frac{5n^3 - 5n^2 - 4n + 4}{n-1}$$

$$(n-1)(2n^3 + 5n^2 - 4) \geq 0$$

$$n(n+1) + (n-1)(n+1)$$

$$-16 + 20$$

$$(n-1)(n+2)(2n^2 + n - 1)$$

$$(n-1)(n+1)(n+2)(2n+1)$$

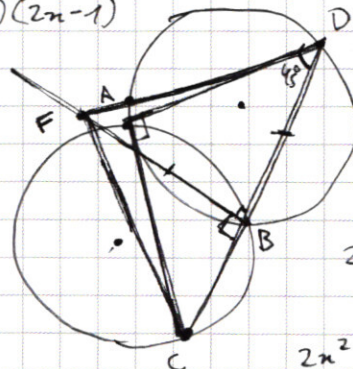
$$\frac{2}{256} - \frac{6}{256} +$$

$$(n-1)(n+1)(n+2)(2n-1)$$

$$2n^2 + 3n + 4 \quad 32 \rightarrow 24$$

$$9 - 8a$$

$$3n^3$$



$$\frac{2n^3 + 5n^2 - 4}{(n+2)}$$

$$2n^2 + n + \frac{-2n-4}{n+2}$$

$$3n^2 - 4n - 20$$

$$n^2(2n^2 + 7) - n(3n^2 - 4) = -4$$

$$1$$

$$(2n^2 + 1)(n^2 - 1)$$

$$-3$$

$$-64 - 32 + 80 + 48$$

$$(2n^4 + 7n^2 - 3) - (3n^3 + 4n - 7)$$

$$\frac{3n^3 + 4n - 7}{(n-1)}$$

$$-27$$

$$(n^2 + 3)(n^2 + \frac{1}{2})$$

$$2n^2 + 7n$$

$$-3n^3 + 4n + 7$$

$$-6$$

$$-216 - 120$$

$$725 - 50 -$$

$$2n^2 + 7n + 3$$

$$-(n-1)(3n^2 - 3n + 7)$$

$$49 - 8a \quad 3n^2 + \frac{-3n^2 + 4n - 7}{n-1}$$

$$\frac{-7-5}{4}$$

$$\frac{-7+5}{4}$$

$$3n^2 - 3n + \frac{2n-7}{n-1}$$

$$-3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$700 = 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5;$$

если число удовлетворяет условию, то в нём не должно быть нулей, а произведение всех остальных от 1 цифр должно быть равно 700.

исходя из разложения 700 на простые множители, есть только два варианта разложения 700 на однозначные множители:

$$700 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

$$700 = 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5.$$

найдем кол-во ~~различных~~ размещений для каждого из разложений, если на место оставшихся цифр поставим 1:

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 2520. \quad \text{Ответ: } 2520$$

первое к числу №2.

формула суммы геометрич. прогрессии - $\frac{n(1-n^k)}{1-n}$.

члене исходной прогрессии, номер которой больше 3, образует прогрессию, заданную формулой $x_k = x n^{3k}$;

~~ее~~ ее сумма до 1000-го члена (3000-го чл исходной прогрессии): $\frac{x n^{24} (1-n^{3k})}{1-n^3} = \frac{x n^{24} (1-n^{3000})}{1-n^3}$

~~или~~ по условию: $\frac{x(1-n^k)}{1-n}$

по условию:

$$\left(\frac{x(1-n^{3000})}{1-n} + \frac{49x^2(1-n^{3000})}{1-n^3} \right) = 10 \left(\frac{x(1-n^{3000})}{1-n} \right);$$

$$\frac{9x(1-n^{3000})}{1-n} = \frac{49x^2(1-n^{3000})}{(1-n)(1+n+n^2)};$$

$$9 = \frac{49n^2}{1+n+n^2}; \quad \begin{cases} n = \frac{9+12\sqrt{10}}{80} \\ n = \frac{9-12\sqrt{10}}{80} \text{ не подходит, т.к. } < 0. \end{cases}$$

$$9+9n+9n^2=49n^2;$$

$$40n^2-9n-9=0;$$

$$n = \frac{9+12\sqrt{10}}{80}.$$

последовательность, образованная попарно делением соседних членов, будет иметь сумму $\frac{2x(1-n^{3000})}{1-n^2}$.

$$\frac{\left(\frac{x(1-n^{3000})}{1-n} + \frac{2x(1-n^{3000})}{1-n^2} \right)}{\left(\frac{x(1-n^{3000})}{1-n} \right)} = \frac{\left(\frac{x(1-n^{3000})}{1-n} \right) \left(1 + \frac{2}{1+n} \right)}{\left(\frac{x(1-n^{3000})}{1-n} \right)} = 1 + \frac{2}{1+n} =$$

$$= \frac{9+12\sqrt{10}}{80+9+12\sqrt{10}} + 1 = \frac{9+12\sqrt{10}+89+12\sqrt{10}}{89+12\sqrt{10}} = \frac{98+24\sqrt{10}}{89+12\sqrt{10}}; \quad \sqrt{10} \approx 3,16;$$

$$\frac{173,84}{126,92} \approx 1,36.$$

Ответ: примерно в 1,36 раз.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^3-4x+80} = x^2+10x+24; \quad \text{нз.}$$

$$\frac{(x+5)\sqrt{x^3-4x+80}}{\sqrt{2}} = (x+5)(x+4);$$

$x = -5$ не является корнем, т.к. $(-5)^3-4 \cdot (-5)+80 < 0$,
или $x \neq -5$:

$$\sqrt{\frac{x^3-4x+80}{2}} = x+4;$$

или $x \leq -4$ корней нет, т.к. выражение всегда неотрицательно.
или $x \geq -4$:

$$\frac{x^3-4x+80}{2} = x^2+8x+16;$$

$$x^3-4x+80=2x^2+16x+32;$$

$$x^3-2x^2-20x+48=0;$$

разложим на множители вида $(x-a)$;

Ответ:

$$4; \sqrt{13}-1$$

$$x(x-4)(x+4)-2(x-4)(x+5)=0;$$

$$(x-4)(x^2+4x-2x-12)=0;$$

$$(x-4)(x^2+2x-12)=0$$

$$(x-4)(x+2)(x-6)=0$$

$$\begin{cases} x=4 \\ x=\frac{-2-\sqrt{52}}{2} \text{ не подходит, } < -4 \\ x=\frac{-2+\sqrt{52}}{2} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

14.

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0;$$

$$2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2|x-2| \geq 0;$$

$$x-2 \geq 0:$$

$$2x^4 + 7x^2 - 4x - 3x^3 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0;$$

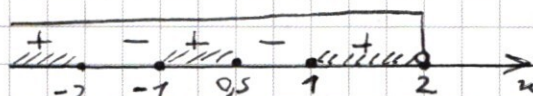
$$x-2 \geq 0:$$

разложить на множители и
решить методом интервалов;

$$x-2 < 0:$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x-1)(x+1)(x+2)(2x-1) \geq 0;$$



15.

м.к. насекомые движутся по окружностям,
то координаты удовлетворяют уравне-
ниям $x^2 + y^2 = R_i^2$

тогда R_i (радиус траектории водоемной):

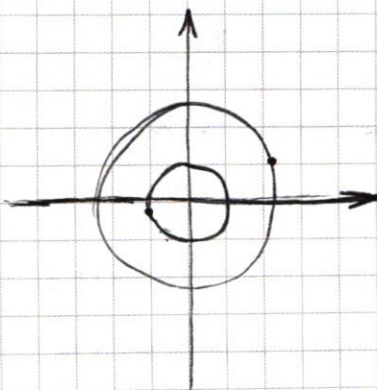
$$R_1^2 = (-2)^2 + (-2\sqrt{7})^2 = 32; \quad R_1 = 4\sqrt{2}.$$

R_2 - радиус траектории муха:

$$R_2^2 = (5)^2 + (5\sqrt{7})^2 = 25 \cdot 8; \quad R_2 = 10\sqrt{2};$$

в начальный момент времени насекомые находятся

в точках, лежащих на общей прямой (м.к. центр
обеих окружностей $(0;0)$, $-\frac{2}{5} = -\frac{2\sqrt{7}}{5\sqrt{7}}$), и максимально
удалены друг от друга (м.к. у одного все координаты
положительны у другого - все отрицательны).



сравним угловые скорости насекомых: пусть
 скорость муха = π , тогда скорость водоемки = 2π .

$$\omega = \frac{v}{R};$$

$$\omega_2 = \frac{\pi}{10\sqrt{2}}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{4\sqrt{2}};$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{5 \cdot 10\sqrt{2} \pi}{2\sqrt{2} \pi} = 5.$$

тогда пусть угловая скорость водоемки = 5α , тогда угловая
 скорость муха = α .

рассмотрим момент между насекомыми кратчайший, когда
 они летят на объект диаметром на одной стороне от
 центра. в таком случае:

$\alpha t = 5\alpha t - \pi$; где t - данный момент времени.

$$\pi = 4\alpha t; \quad t = \frac{\pi}{4\alpha}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2\pi N}{4\alpha} + t = \frac{\pi}{4\alpha};$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi N}{2}.$$

тогда координаты муха: $(10\sqrt{2} \cos(\alpha); 10\sqrt{2} \sin(\alpha))$.

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi N}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} - \pi N.$$

тогда координаты муха: $(10; 10); (-10; 10); (10; -10); (-10; -10)$.

Ошибки: $(10; 10); (-10; 10); (10; -10); (-10; -10)$.

и т.д.

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12; \\ (x-8)^2 + (y-6)^2 = a. \end{cases}$$

решим задачу графически.

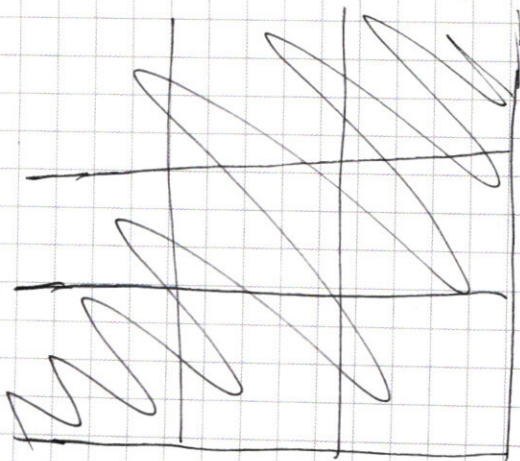
$$|y-6-x| + |y-6+x| = 12;$$

$$y-6-x < 0; \quad y-6+x < 0;$$

$$y < x+6; \quad y < 6-x$$

построим $x+6=y$, построим $y=6-x$

линии водоемки
 обходят, где водоем-
 не имеет условия.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

I. $y - 6 - x \geq 0; y - 6 + x \geq 0:$

$$y - 6 - x + y - 6 + x = 12;$$

$$2y = 24;$$

$$y = 12$$

II

$y - 6 - x < 0; y - 6 + x \geq 0:$

$$y - 6 - x - y + 6 - x = 12;$$

$$-2x = 12$$

$$x = -6;$$

III $y - 6 - x \geq 0; y - 6 + x < 0:$

$$x = 6;$$

IV $y - 6 - x < 0; y - 6 + x < 0:$

$$y = 0.$$

$(x+8)^2 + (y-6)^2 = a$ - уравнение окружностей с центрами $(-8; 6), (-8; 0), (8; 6), (8; 0)$

относимых симметрично относительно осей x и y , и

одинаковым радиусом $\sqrt{a}$. при $a < 4$ общих точек нет;

при $a = 4$ две окружности касаются квадрата, являющегося

записью $|y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12;$

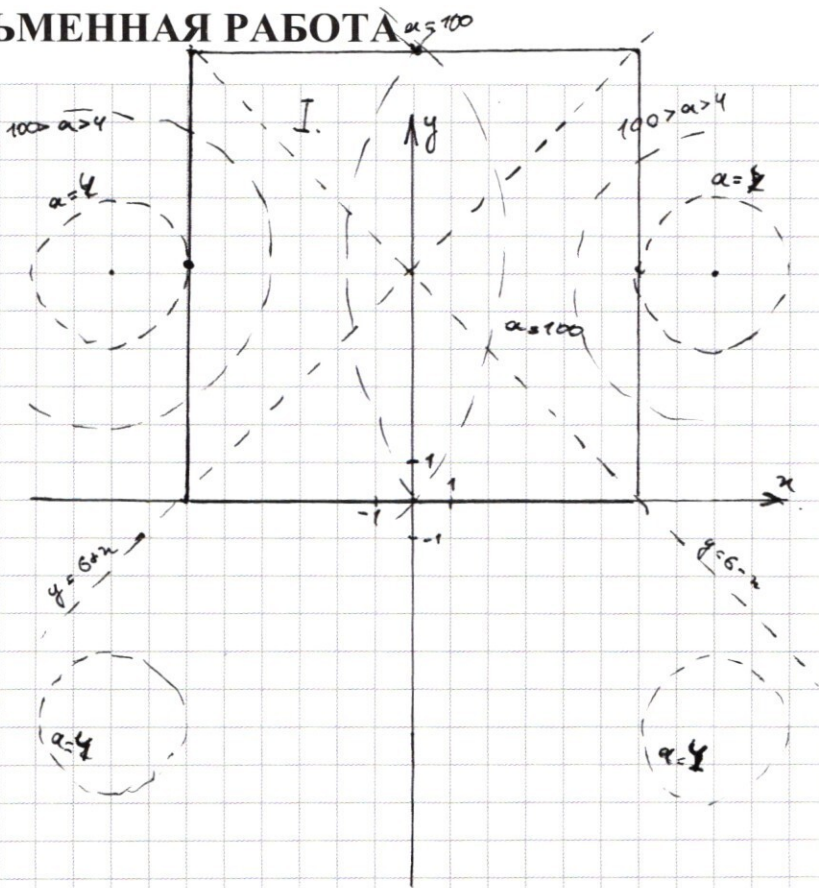
при увеличении a окружности пересекают квадрат в центре

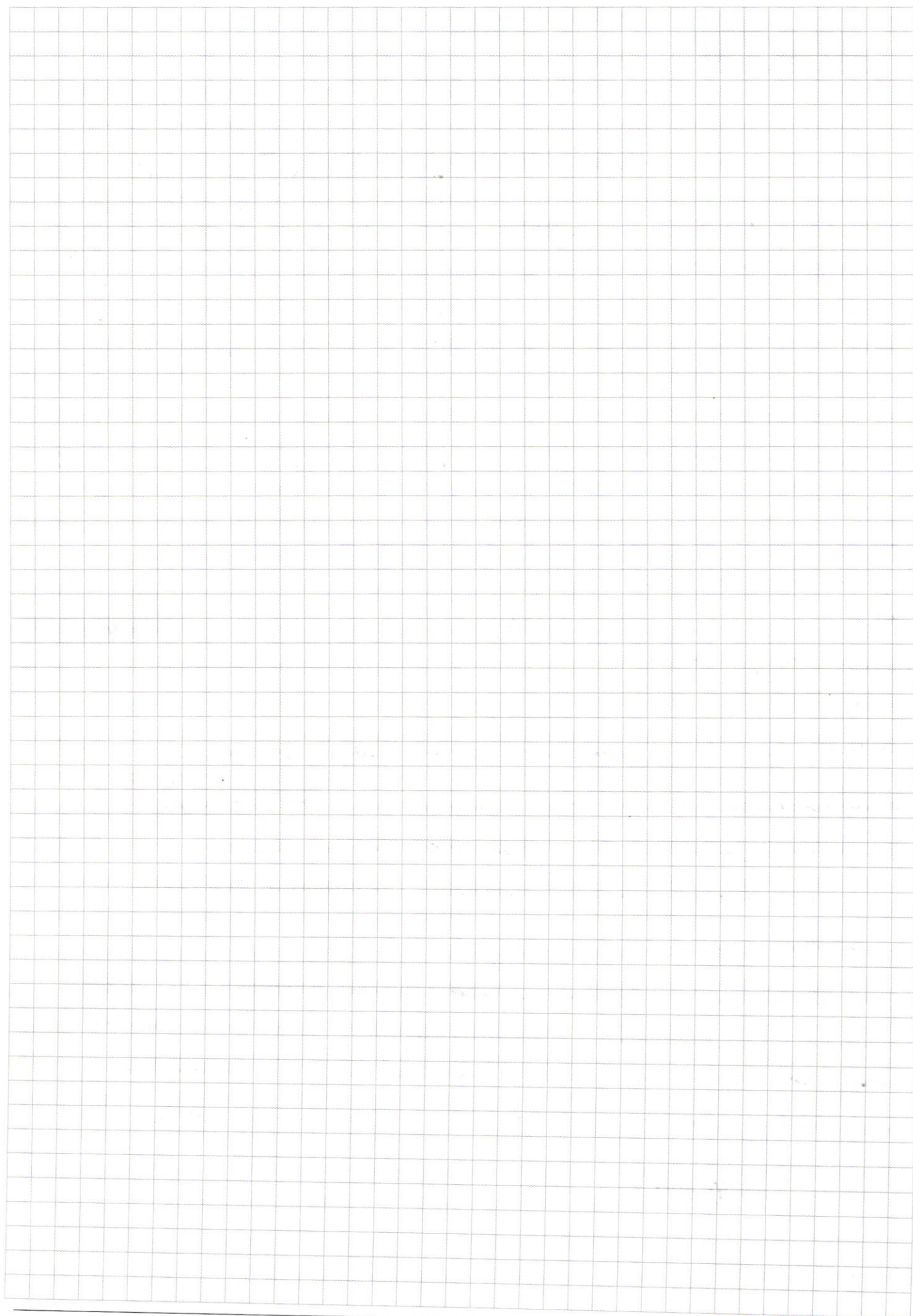
точка, симметричная относительно $y = 6$. при $a = 100$

некоторые из точек совпадают, и становятся

две общие точки. при $a > 100$ общих точек нет.

Ответ: $a = 4; 100.$





☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2) + 4 \geq 0$$

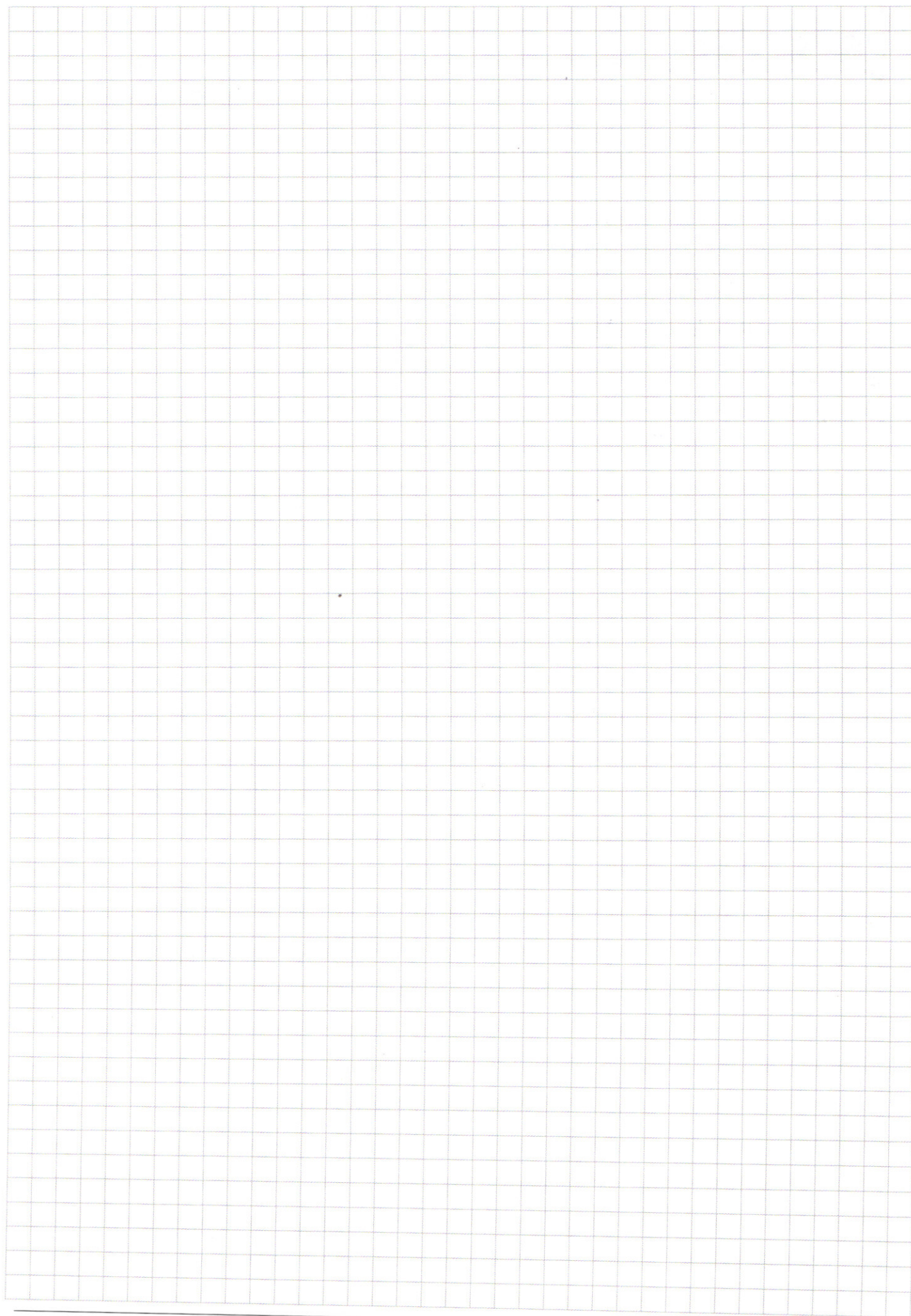
$$2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2(x-2) \geq 0$$

$$x^2(x-2)(2x^2(x-2) - 3) \geq 0$$

$$2x^2(x-2) - 3$$

$$2x^3 - 4x^2 - 3$$

2



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)